

革技船造

齿轮专辑

(三)

六机部六〇一研究所编

一九八〇年十一月

目 录

前 言

1. M值研究简况.....陶文梅(1)
2. 小模数阿基米德蜗杆及法向直廓蜗杆M尺寸的计算
.....哈尔滨工业大学 刘法权(4)
3. 蜗杆M值的计算.....大众机械厂 陈德津(25)
4. 螺纹M值与中径.....洪芝云 陶文梅(35)
5. 齿轮、蜗杆、螺纹M值通用公式探讨.....洪芝云(42)
6. 齿轮、蜗杆M值测量的实践与认识
.....汉光机械厂计量室 张先芝(63)

M 值 研 究 简 况

陶 文 梅

一、概 况

对于作精密传动的小模数齿轮，几何精度是它的主要质量指标。概括起来有：齿厚、齿形、相对位置误差。齿形主要由刀具精度保证；相对位置误差主要由机床精度保证；齿厚是人为控制的，设计时给定齿厚尺寸 $S = \frac{m\pi}{2}$ 或给定变位系数 ξ_n 都是容易的，但弧齿厚的直接测量则比较困难。

在生产中如何控制齿厚，人们采取了许多方法，主要是光学测量和接触测量。光学测量，即利用“万能工具显微镜”直接测齿厚，一般只测蜗杆的轴向齿厚。接触测量有好几种方法：用公法线千分尺量公法线长度；用齿厚卡尺直接量齿厚；还有综合测量，即控制双啮中心距来控制齿厚；用圆棒量 M 值， M 值为控制齿厚的重要参数。综合测量主要优点是效率高、缺点是精度低，即便是使用综合测量， M 值仍是必须注明的参考尺寸。对于高精度齿轮（3~4级）、螺纹样柱、标准蜗杆等等，则需用单项指标控制齿厚。用圆棒量 M 值，既经济（使用量具是千分尺和圆棒）又方便（在机床上加工时能直接测量），而且精度高（ M 值的公差示值比齿厚公差示值大，即 $\Delta M = (\operatorname{tg} \alpha_n \cdot \Delta S)$ ），因此，用 M 值来控制齿厚，在国内外都得到广泛的应用。

人们在运用 M 值过程中，不断发现问题。特别感到，目前国内外有关 M 值计算方法还不够完善，计算的公式很多，有些结果误差较大，直接影响产品的质量。因此近年来引起人们的注意，对 M 值计算问题从不同途径进行了摸索和探讨。

二、研究简况

从现有的资料来看，中、美、苏、德、日等国对 M 值都作过不同程度的研究。齿轮、蜗杆及螺纹的 M 值计算公式，据不完全统计，目前至少有30种，研究过 M 值的人数至少有20人。

人们为了寻求精确的 M 值，做了许多艰苦的工作，有的甚至还走过不少弯路，下面从德国螺纹 M 值公式及苏联奇数齿螺旋齿轮 M 值公式作例子加以分析。

例一，德国螺纹 M 值公式

在德国综合测长仪的说明书上有如下公式：

$$M = m_n + d_p + \delta_n - \frac{7}{m_n^2} \delta_n^3 - \frac{2}{m_n} \delta_n^2 - \left[\frac{m_n^2}{2d_p \sin \alpha_o} \left(\frac{m_n^2}{4d_p^2} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{d_p t Z \cos \alpha_o}{\pi m_n (m_n - d_p \sin \alpha_o)} \right)^4 \right]$$

$$\text{式中：} \delta_n = \frac{d_p t^2 Z^2 \cos \alpha_o \operatorname{ctg} \alpha_o}{2\pi^2 m_n (m_n - d_p \sin \alpha_o)}$$

$$m_n = d_f + \frac{d_p}{\sin \alpha_o} - \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \alpha_o \quad (1)$$

常见公式:

$$M = d_f + d_p \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_o} \right) - \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \alpha_o \quad (2)$$

$$M = d_f + d_p \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_o} \right) - \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \alpha_o + \frac{d_p}{2} \cos \alpha_o \operatorname{ctg} \alpha_o \operatorname{tg}^2 \lambda_f \quad (3)$$

$$M = d_f + d_p \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_o} \right) - \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \alpha_o \quad (4)$$

对于公制梯形螺纹 $T24 \times 6/4$, $d_p = 3.2$ 时, (1)、(2)、(3)、(4) 各式的 M 值依次分别为 26.0173, 25.368, 26.131, 26.109。

从不同途径可以证明, 德国人的公式要比我们常用的螺纹公式准确一些, 但其误差没有明显的规律性, 有时达到不可忽略的程度, 例如对 $T22 \times 8/5$ 的螺纹, $\Delta M = 0.135$ 。

例二, 苏联的奇数齿螺旋齿轮 M 值公式

常见奇数齿 M 值公式如下^②:

$$M = d_f \frac{\cos \alpha_s}{\cos \alpha_{Ms}} \cos \frac{\pi}{2Z} + d_p \quad (5)$$

人们早就发现上式对于奇数齿螺旋齿轮有问题, 曾进行过各种尝试, 费路^③就是其中一位, 他的公式为:

$$M = R_M \sqrt{2[1 - \cos(\gamma - \varphi)] + \frac{\cos^2(\gamma - \varphi)}{\operatorname{ctg}^2 \beta_p}} \pm d_p$$

式中: $R_M = R_f \frac{\cos \alpha_s}{\cos \beta_f \cos \alpha_{Ms}}$

$$\operatorname{inv} \alpha_{Ms} = \operatorname{inv} \alpha_s + \frac{d_p}{d_f \cos \alpha_n} - \frac{\pi}{2Z} + \frac{2\xi_n \operatorname{tg} \alpha_n}{Z}$$

$$\gamma = 180^\circ \left(\frac{Z-1}{Z} \right); \quad \operatorname{ctg} \beta_p = \operatorname{ctg} \beta_f \frac{d_f}{2R_M}; \quad \varphi = \varphi_1 + \Delta \varphi_1;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{ctg}^2 \beta_p + \cos \gamma}; \quad \Delta \varphi_1 = - \frac{\Delta h_1}{1 + \frac{\cos(\gamma - \varphi_1)}{\operatorname{ctg}^2 \beta_p}};$$

$$\Delta h_1 = \varphi_1 - \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\operatorname{ctg}^2 \beta_p}$$

作者没有说明公式的使用条件, 也没有见过别的文献引用。对下面的齿轮进行计算, 发现误差太大。齿轮参数: $m_n = 0.8$, $Z = 7$, $\beta_f = 71^\circ 34'$, $d_f = 17.710$, $d_p = 1.441$, 上式结果 $M = 50.3563$ 。

三、存在问题

1. 齿轮

从事齿轮设计与测量的同志都知道, 问题最大的是奇数齿螺旋齿轮。不难发现, (5) 式和奇数齿直齿轮公式完全一样。分析其理由, 可能前人从斜齿轮是直齿轮的引伸这个概念出发, 沿用了直齿轮的公式。在生产中, 按此式得到的 M 值加工出来的齿轮, 装配后空

小模数阿基米德蜗杆及 法向直廓蜗杆M尺寸的计算

哈尔滨工业大学 刘法权

一、小模数阿基米德蜗杆M尺寸的计算

在设计、制造和检验小模数圆柱蜗杆时,常常需要给出其M尺寸。所谓蜗杆的M尺寸,就是将二根或三根同样大小的量棒(通常称为螺纹三线)相对的放在蜗杆齿槽外贴紧后,用千分尺或其他精密量具测出的量棒外廓间的距离。M尺寸是评定蜗杆齿厚的重要参数,用M尺寸控制蜗杆齿厚不但容易测量,而且测值稳定,容易保证精度。但是,蜗杆M尺寸的计算方法目前还不够完善,一些文献给出的计算公式[1-4]不是误差太大就是方法过烦,它们列出的M尺寸的现成表格与实际也有很大出入。这无疑给生产带来一定的困难,甚至导致不良后果。因此,有必要对蜗杆M尺寸的计算作进一步的探讨。因为实际使用的蜗杆多为阿基米德蜗杆,所以,本文主要讨论小模数阿基米德蜗杆M尺寸的计算方法。讨论时,以向量代数为主要工具。

如图1,取坐标系 $X_0Y_0Z_0$,令 Z_0 轴与蜗杆轴线重合,而 Y_0 轴通过齿槽对称中心。将量棒放入齿槽内,使其与座标平面 $X_0Y_0Z_0$ 平行,当其达到平衡和稳定的位置后,其与蜗杆左、右齿廓的接触点必然处在垂直于量棒轴线的同一截面内,且该截面的中心Q在 Y_0 轴上。设 O_0 与Q的距离为 q ,而量棒直径为 d_p ,则蜗杆的M尺寸可用下式表示:

$$M = 2q + d_p \quad (1)$$

为求 q ,将 O_0 、 R 、 Q 联成向量封闭图,其中 R_K 是量棒与蜗杆左齿廓的接触点,显然有:

$$\vec{r}_K + \vec{r}_p = \vec{q} \quad (2)$$

现求 $\vec{r}_K$ 、 $\vec{r}_p$ 、 $\vec{q}$ 的投影表达式。将坐标系 $X_0Y_0Z_0$ 绕 Z_0 转 φ_K 角,直至平面 $Y_0O_0Z_0$ 与向量 $\vec{r}_K$ 重合,则得一新座标 XYZ ,为方便,我们将向量 $\vec{r}_K$ 、 $\vec{r}_p$ 、 $\vec{q}$ 表示在此新坐标系中(图2a)。根据阿基米德蜗杆的性质可知,在新坐标系中,蜗杆在 YOZ 截面上的齿形仍为直线形,但其齿槽的对称线向左偏移了一个距离 u ,且

$$u = \frac{L}{2\pi} \varphi_K = \frac{mk}{2} \varphi_K$$

式中 L 为蜗杆导程, m 、 k 为蜗杆的轴向模数和头数, $L = m\pi k$ 。

由图2的几何关系可知, $\vec{r}_K$ 在 X 轴上的投影为0,在 Y 轴上的投影为 $d/2$,在 Z 轴上的投影为 $-\overline{R_K N}$ 。而:

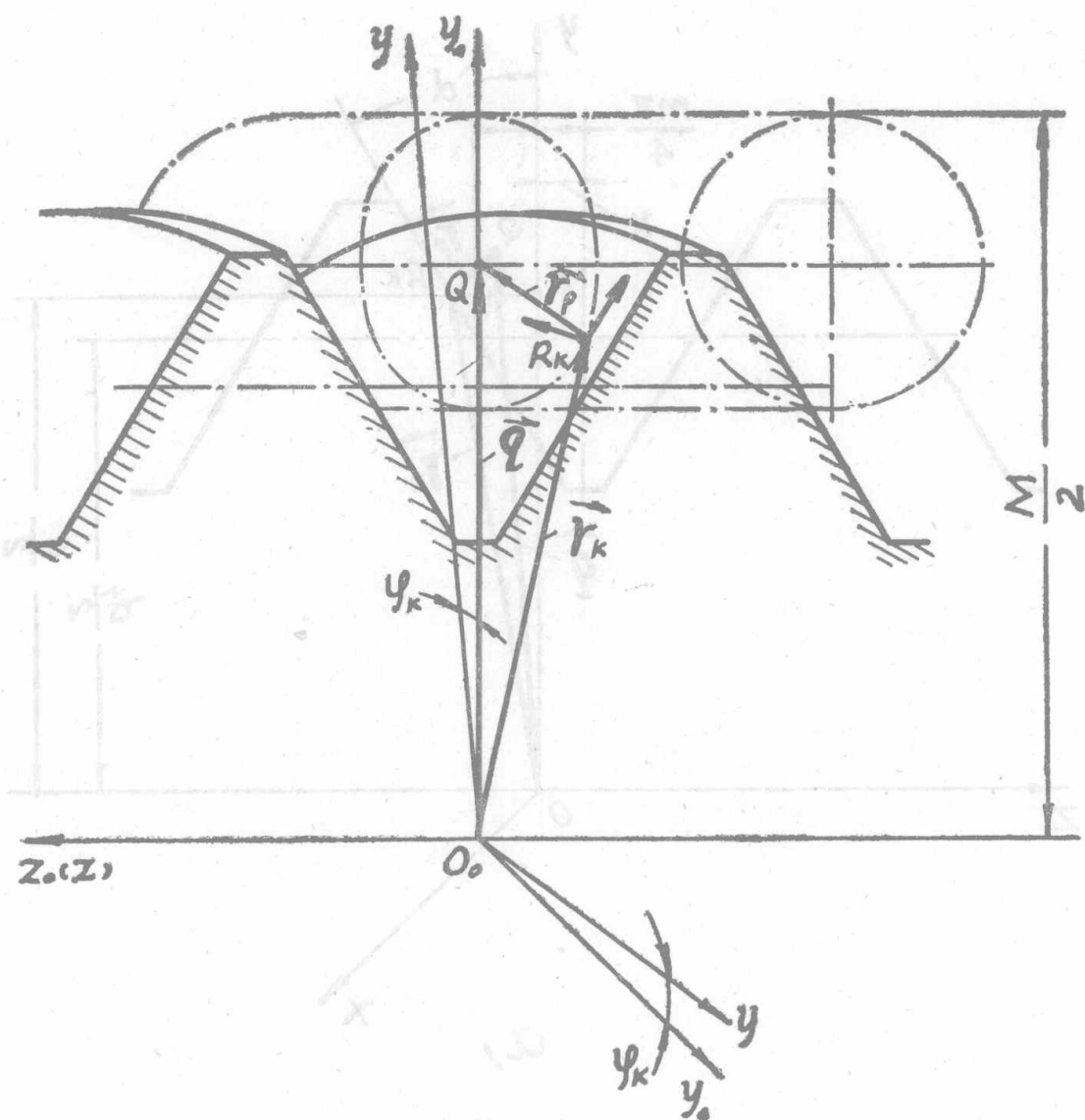


图 1

$$\begin{aligned}\overline{R_K N} &= \frac{1}{4} m\pi - u + \left(\frac{d}{2} - \frac{d_f}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha \\ &= \frac{1}{4} m\pi - \frac{1}{2} mk\varphi_K + \frac{1}{2} (d - d_f) \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

则向量 $\vec{r}_K$ 可表示为:

$$\vec{r}_K = \left[0, \frac{1}{2} d, \frac{1}{2} mk\varphi_K - \frac{1}{2} (d - d_f) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{4} m\pi \right] \quad (3)$$

式中 α 为轴向齿形角, d_f 为分度圆直径, d 为量棒接触点所在圆周的直径。

向量 $\vec{r}_P$ 是过接触点 R_K 的量棒半径, 它必与螺旋面过 R_K 点的法线重合, 设过 R_K 的单位法向量为 $\vec{n}_0$, 而 $\vec{r}_P$ 的模为 $d_P/2$, 则 $\vec{r}_P$ 可写成:

$$\vec{r}_P = \frac{d_P}{2} \vec{n} \quad (4)$$

再过点 R_K 作二个单位向量 $\vec{\alpha}_0$ 与 $\vec{\lambda}_0$ 与螺旋面相切, 其中 $\vec{\alpha}_0$ 与螺旋面的发生线重合, $\vec{\lambda}_0$ 与过 R_K 点的螺旋线的切线重合 (图 1 和图 2b), 则:

$$\vec{\alpha}_0 = [0, \cos \alpha, -\sin \alpha]$$

$$\vec{\lambda}_0 = [-\cos \lambda, 0, \sin \lambda]$$

λ 为 R_K 处的螺旋升角, 且:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{mk}{d}$$

因 $\vec{n}_0$ 同时垂直于 $\vec{\alpha}_0$ 、 $\vec{\lambda}_0$, 所以有:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{\alpha}_0 \times \vec{\lambda}_0}{|\vec{\alpha}_0 \times \vec{\lambda}_0|}$$

而:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_0 \times \vec{\lambda}_0 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \end{vmatrix} \\ &= [\cos \alpha \sin \lambda, \sin \alpha \cos \lambda, \cos \alpha \cos \lambda] \\ &= \cos \lambda \cos \alpha [\operatorname{tg} \lambda, \operatorname{tg} \alpha, 1] \\ |\vec{\alpha}_0 \times \vec{\lambda}_0| &= \cos \lambda \cos \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \\ &= \cos \lambda \cos \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda + \sec^2 \alpha} \end{aligned}$$

所以:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda + \sec^2 \alpha}} [\operatorname{tg} \lambda, \operatorname{tg} \alpha, 1]$$

代入 (4) 变化后得 $\vec{r}_P$ 的投影表达式为:

$$\vec{r}_P = \frac{d_P d}{2 \sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} \left[-\frac{mk}{d}, \operatorname{tg} \alpha, 1 \right] \quad (5)$$

至于向量 $\vec{q}$ 的投影表达式很容易写出:

$$\vec{q} = \vec{q} [\sin \varphi_K, \cos \varphi_K, 0] \quad (6)$$

由式 (2)、(3)、(5)、(6) 可得出如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{mkd_P}{2 \sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} = q \sin \varphi_K & (7) \\ \frac{d}{2} + \frac{d_P d \operatorname{tg} \alpha}{2 \sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} = q \cos \varphi_K & (8) \\ mk \varphi_K - (d - d_P) \operatorname{tg} \alpha - \frac{m\pi}{2} + \frac{d_P d}{\sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} = 0 & (9) \end{cases}$$

由 (7)、(8) 消去 φ_K 得:

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 k^2 d_P^2}{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha} + d^2 \left(1 + \frac{d_P \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} \right)^2}$$

代入式 (1) 得:

$$M = \sqrt{\frac{m^2 k^2 d_P^2}{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha} + d^2 \left(1 + \frac{d_P \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{m^2 k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} \right)^2} + d_P \quad (10)$$

由式(7)、(8)消去 $\vec{q}$,再代入式(9)消去 φ_K ,变化后得:

$$d = \operatorname{ctg} \alpha \left[mk \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{mkd_P}{d(\sqrt{m^2k^2 + d^2 \sec^2 \alpha} + d_P \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{d_P d}{\sqrt{m^2k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} - \frac{m\pi}{2} \right] + d_f \quad (11)$$

式(10)、(11)便是计算阿基米德蜗杆 M 尺寸的基本公式,计算时应先由式(11)求出 d ,但式(11)是超越方程,可使迭代法求近似解。为计算方便,将式(10)、(11)改成如下形式:

$$M = \sqrt{(mkA)^2 + B^2} + d_P \quad (12)$$

$$d = \operatorname{ctg} \alpha \left[mK \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{mkA}{B} \right) + Ad - \frac{m\pi}{2} \right] + d_f \quad (13)$$

其中: $A = \frac{d_P}{\sqrt{m^2k^2 + d^2 \sec^2 \alpha}} \quad (14)$

$$B = d(1 + A \operatorname{tg} \alpha) \quad (15)$$

当 $\alpha = 20^\circ$ 时,

$$d = 2.74748 \times \left[mk \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{mkA}{B} \right) + Ad - 1.5708m \right] + d_f \quad (13a)$$

$$A = \frac{d_P}{\sqrt{(mk)^2 + 1.13247d^2}} \quad (14a)$$

$$B = d(1 + 0.36397A) \quad (15a)$$

计算时先取初值 $d = d_f$ 代入式(14)、(15)、(13)求出 A_0 、 B_0 、 d_1 ;再令 $d = d_1$ 按式(14)、(15)、(13)求出 A_1 、 B_1 、 d_2 ;再令 $d = d_2$ 求出 A_2 、 B_2 、 $d_3 \dots$,直至 $|d_{i+1} - d_i| \leq \Delta$ 时,即认为 d_i 是 d 的真值,将相应的 d_i 、 A_i 、 B_i 代入式(12),即可求出所需的 M 尺寸, Δ 是 M 尺寸要求的精度,可取 $\Delta = 0.0005$,注意公式中的 $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ 应取弧度值。

例:一阿基米德蜗杆, $m = 1\text{mm}$, $\alpha = 20^\circ$, $K = 4$, $d_f = 14.5\text{mm}$,量柱直径 $d_P = 1.732\text{mm}$,试计算其 M 尺寸。

令 $d = d_f = 14.5$,由式(14a)、(15a)和(13a)得:

$$A_0 = \frac{1.732}{\sqrt{(1 \times 4)^2 + 1.13247 \times 14.5^2}} = 0.10865$$

$$B_0 = 14.5 \times (1 + 0.36397 \times 0.10865) = 15.07340$$

$$d_1 = 2.74748 \times \left(1 \times 4 \times \operatorname{arctg} \frac{1 \times 4 \times 0.10865}{15.07340} + 0.10865 \times 14.5 - 1.5708 \times 1 \right) + 14.5 = 14.82948$$

令 $d = 14.82948$ 进行第二次计算得:

$$A_1 = 0.10639, B_1 = 15.40368, d_2 = 14.82252$$

令 $d = 14.82252$ 进行第三次计算得:

$$A_2=0.10643, B_2=15.39670, d_3=14.82237$$

因 $|d_3-d_2|=0.00015<0.0005$, 故可将 d_2 、 A_2 、 B_2 代入式(12) 算出 M 尺寸:

$$M=\sqrt{(1 \times 4 \times 0.10643)^2+(15.39670)^2}+1.732=17.1346 \text{ mm}$$

与文献〔1〕、〔2〕介绍的方法比较可知,上述方法不但计算简便,而且能根据 M 尺寸的精度要求准确的掌握迭代次数。为便于使用,我们按上述方法用电子计算机算出了不同模数、齿数和不同分度圆直径的阿基米德蜗杆的 M 尺寸, 计算时取 $\delta=0.00005$ 。现有文献〔1〕、〔3〕、〔4〕给出 M 尺寸表都是接近似公式计算的,所以出入很大。如:当 $m=[1]$ 时,文献 1 给出的 55 个 M 尺寸与本文附表给出的尺寸比较,误差在 $1\sim5\mu$ 的有 20 个,在 $6\sim10\mu$ 的有 8 个,在 $11\sim20\mu$ 的有 9 个,在 21μ 以上的有 5 个,误差最大的达 31μ ,使用时必须十分注意。

二、法向直廓蜗杆 M 尺寸的计算

法向直廓蜗杆分为齿槽法向直廓蜗杆、齿纹法向直廓蜗杆和齿面法向直廓蜗杆等三种类型,其 M 尺寸的计算较比复杂,而且某些文献给出的结果也很不一致,本文则试图用向量矩阵法〔1〕导出算法向直廓蜗杆 M 尺寸的正确而较为简便的方法。

如图 1,取坐标系 $X_0Y_0Z_0$ 的 Z_0 轴与蜗杆轴线重合,而 Y_0 轴恰好通过齿槽中心。如

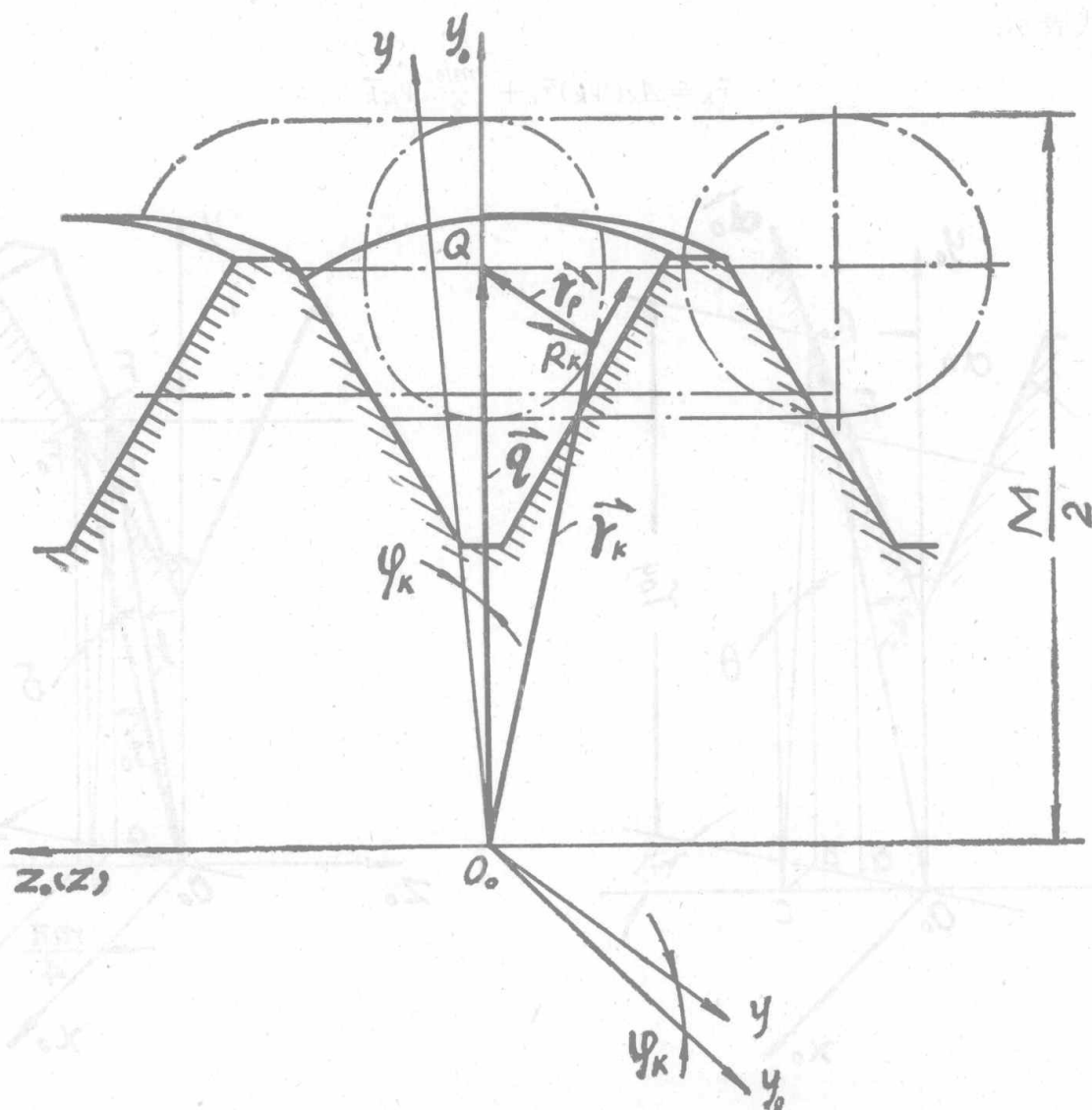


图 1

果我们将一量棒放入齿槽，平行于座标平面 $X_0O_0Z_0$ 并达到平衡位置，则它与左、右齿廓的接触点必在垂直于量棒轴线的同一截面内，且该截面的中心 Q 与 Y_0 轴重合。设 O_0 与 Q 的距离为 q ，而量棒直径为 d_p ，则蜗杆的 M 尺寸显然可写成：

$$M = 2q + d_p \quad (1)$$

将点 O_0 、 R_K 、 Q 联成向量封闭图形，其中 R_K 是量棒与蜗杆右齿面的接触点，可得一向量方程：

$$\vec{r}_K + \vec{r}_P = \vec{q} \quad (2)$$

为分析方便，我们再取一新座标系 XYZ ，其原点与 O_0 重合， Z 轴与 Z_0 重合。而平面 YOZ 与向量 $\vec{r}_K$ 重合，此座标系实际上是座标系 $X_0Y_0Z_0$ 绕 Z_0 轴旋转某一角度而成，我们将把各向量最终表示在此新座标系内。

对于齿槽法向直廓蜗杆，其螺旋面是图 2 所示的直纹法向齿廓绕 Z_0 轴旋转，同时沿 Z_0 轴平移而形成。其旋转角 φ 和轴向位移 u 有如下关系：

$$u = \frac{L}{2\pi} \varphi = \frac{mk}{2} \varphi$$

式中 $L = m\pi k$ 为蜗杆导程， m 、 k 为蜗杆轴向模数和头数。设该轮廓上有一点 R_0 ，其位置用向量 $\vec{r}_0$ 表示，该点绕 Z_0 轴转过 φ_K 角并同时作相应的轴向移动后恰与点 R_K 重合，则向量 $\vec{r}_K$ 就可用下式表示：

$$\vec{r}_K = A_Z(\varphi_K) \vec{r}_0 + \frac{mk}{2} \varphi_K \vec{k} \quad (3)$$

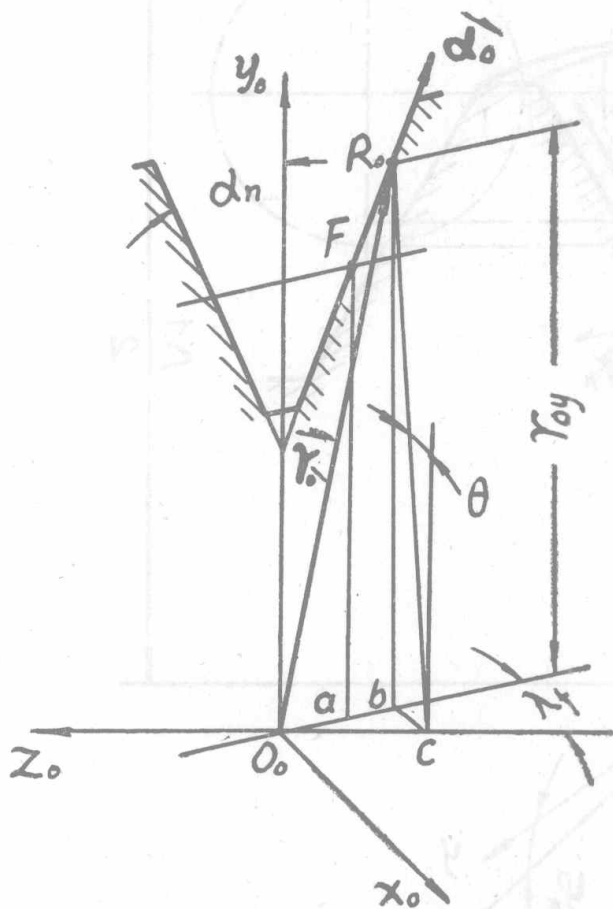


图 2

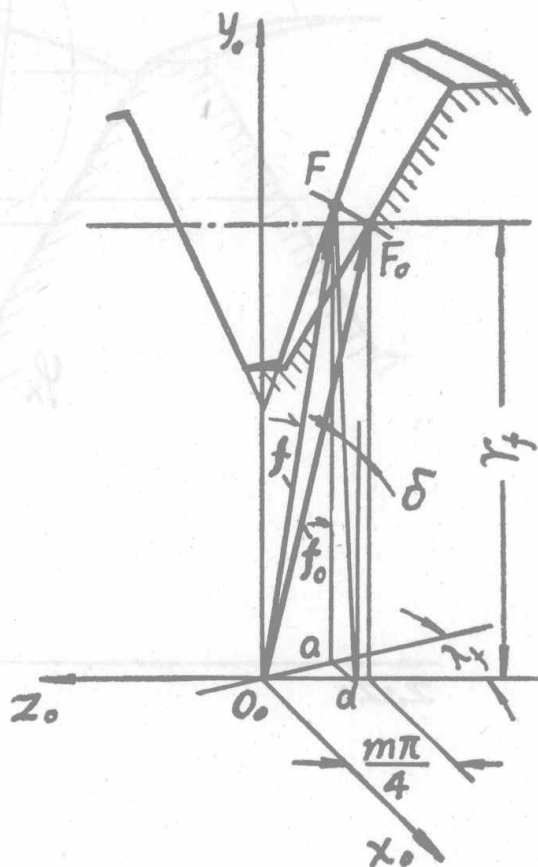


图 3

式中 $\vec{k}$ 为 Z 轴上的单位向量, $A_Z(\varphi_K)$ 表示向量 $\vec{r}_0$ 绕 Z_0 轴旋转 φ_K 角的坐标变换矩阵, 且:

$$A_Z(\varphi_K) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_K & -\sin \varphi_K & 0 \\ \sin \varphi_K & \cos \varphi_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

为求 $\vec{r}_0$, 应先求出点 F 的坐标, 点 F 是该齿廓与分度圆柱的交点, 如图 3。设 F_0 是平面 $Y_0O_0Z_0$ 上的轴向齿廓与分度圆柱的交点, 则 F_0 绕 Z_0 转某一角度 δ 并沿轴向移动 $\frac{mk}{2} \delta$ 即达到 F 点的位置, 因而:

$$\vec{f} = A_Z(\delta) \vec{f}_0 + \frac{mk}{2} \delta \vec{k}$$

因 $\vec{f}_0 = \left[0, r_f, -\frac{m\pi}{4} \right]$, 所以:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_f \\ -\frac{m\pi}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mk}{2} \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r_f \sin \delta \\ r_f \cos \delta \\ -\frac{m\pi}{4} + \frac{mk}{2} \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

或:

$$\vec{f} = \left[-r_f \sin \delta, r_f \cos \delta, -\left(\frac{m\pi}{4} - \frac{mk}{2} \delta \right) \right]$$

亦即:

$$\overline{ad} = r_f \sin \delta$$

$$\overline{Fa} = r_f \cos \delta$$

$$\overline{O_0d} = \frac{m\pi}{4} - \frac{mk}{2} \delta$$

由 $\triangle O_0ad$ 还可求得:

$$\overline{ad} = \overline{O_0d} \tan \lambda_f = \left(\frac{m\pi}{4} - \frac{mk}{2} \delta \right) \tan \lambda_f$$

因有

$$r_f \sin \delta = \left(\frac{m\pi}{4} - \frac{mk}{2} \delta \right) \tan \lambda_f$$

或

$$\sin \delta = \left(\frac{\pi}{2k} - \delta \right) \frac{mk}{2r_f} \tan \lambda_f$$

式中 r_f 是蜗杆分度圆半径, λ_f 是蜗杆分度圆上的螺旋升角, 且 $\tan \lambda_f = \frac{mk}{2r_f}$, 考虑到 δ 的数值很小, 并且其误差对 M 值的计算结果影响不十分显著, 所以可用 δ 代替 $\sin \delta$, 于是上式变化后得:

$$\delta = \frac{\pi \sin^2 \lambda_f}{2k} \quad (4)$$

现在求 $\vec{r}_0$ 在座标系 $X_0Y_0Z_0$ 中的投影。设 $\vec{r}_0$ 与 Z_0 轴构成的平面与座标平面 $Y_0O_0Z_0$ 的夹角为 θ ，则：

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{bc}}{r_{oy}} = \frac{(\overline{Oa} + \overline{ab}) \sin \lambda_f}{r_{oy}}$$

由图 3 知：

$$\overline{Oa} = \frac{\overline{ab}}{\sin \lambda_f} = \frac{r_f \sin \delta}{\sin \lambda_f}$$

由图 2 知：

$$\overline{ab} = (r_{oy} - \overline{Fa}) \operatorname{tg} \alpha_n = (r_{oy} - r_f \cos \delta) \operatorname{tg} \alpha_n$$

代入上式并令 $d = 2r_{oy}$, $d_f = 2r_f$, $\sin \delta = \delta$ ，变化后得：

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(d - d_f \cos \delta) \operatorname{tg} \alpha_n \sin \lambda_f + d_f \delta}{d} \quad (5)$$

式中 d 是与接触点位置有关的参数， d_f 是分度圆直径， α_n 是蜗杆法向齿形角。

藉助参数 d 和 θ ， $\vec{r}_0$ 的投影可写成

$$r_{ox} = -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta$$

$$r_{oy} = \frac{d}{2}$$

$$r_{oz} = -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f$$

或写成：

$$\vec{r}_0 = \left[-\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f \right]$$

代入式 (3) 得：

$$\begin{aligned} \vec{r}_k &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_K & -\sin \varphi_K & 0 \\ \sin \varphi_K & \cos \varphi_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \\ \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mk}{2} \varphi_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \cos \varphi_K - \frac{d}{2} \sin \varphi_K \\ -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \sin \varphi_K + \frac{d}{2} \cos \varphi_K \\ -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上是向量 $\vec{r}_k$ 在座标系 $X_0Y_0Z_0$ 的投影表达式，为避免混淆将其记为 $\vec{r}_k^0$ ，即：

$$\vec{r}_K^0 = \left[-\frac{d}{2}(\operatorname{tg} \theta \cos \varphi_K + \sin \varphi_K), \quad -\frac{d}{2}(\operatorname{tg} \theta \sin \varphi_K - \cos \varphi_K), \right. \\ \left. -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K \right]$$

向量 $\vec{r}_K$ 在坐标系 XYZ 中的投影表达式可由下式计算:

$$\vec{r}_K = A_Z^{-1}(\varphi_K + \theta) \vec{r}_K^0$$

$A_Z^{-1}(\varphi_K + \theta)$ 是座标系统绕 Z 轴旋转 $(\varphi_K + \theta)$ 角的座标系变换矩阵, $(\varphi_K + \theta)$ 是 Y_0 与 Y 的夹角, 于是:

$$\vec{r}_K = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_K + \theta) & \sin(\varphi_K + \theta) & 0 \\ -\sin(\varphi_K + \theta) & \cos(\varphi_K + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}(\operatorname{tg} \theta \cos \varphi_K + \sin \varphi_K) \\ -\frac{d}{2}(\operatorname{tg} \theta \sin \varphi_K - \cos \varphi_K) \\ -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{2} \sec \theta \\ -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K \end{pmatrix}$$

即 $\vec{r}_K$ 在坐标系 XYZ 中的表达式为:

$$\vec{r}_K = \left[0, \quad \frac{d}{2} \sec \theta, \quad -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K \right] \quad (6)$$

下面求向量 $\vec{r}_p$ 和向量 $\vec{q}$ 在坐标系 XYZ 中的表达式。设 $\vec{r}_p$ 与座标平面 XOZ 的夹角为 r , 而 $\vec{r}_p$ 在 XOZ 上的投影与 X 轴的夹角 β (图 4), 则向量 $\vec{r}_p$ 在 XYZ 内的表达式为:

$$\vec{r}_p = [\gamma \cos \gamma \cos \beta, \quad r_p \sin \gamma, \quad r_p \cos \gamma \sin \beta]$$

或:

$$\vec{r}_p = \frac{d_p}{2} \cos \gamma [\cos \beta, \quad \operatorname{tg} \gamma, \quad \sin \beta] \quad (7)$$

而 $\vec{q}$ 的表达式很容易写出, 即:

$$\vec{q} = [q \sin(\varphi_K + \theta), \quad q \cos(\varphi_K + \theta), \quad 0] \quad (8)$$

由式 (2) 和式 (6)、(7)、(8) 可得出如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{d_p}{2} \cos \beta \cos \gamma = q \sin(\varphi_K + \theta) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{2} \sec \theta + \frac{d_p}{2} \sin \gamma = q \cos(\varphi_K + \theta) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \lambda_f + \frac{mk}{2} \varphi_K + \frac{d_p}{2} \sin \beta \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (11)$$

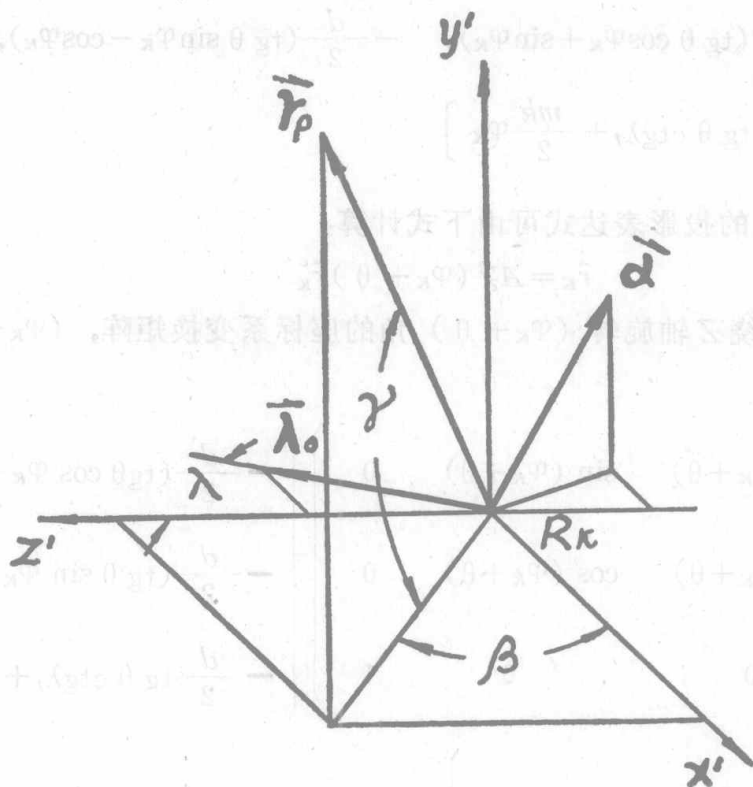


图 4

由图 1 知, 向量 $\vec{r}_P$ 实际上是螺旋面过 R_K 点的法线。现过 R_K 点作螺旋面的二条切线, 其中一条是过 R_K 点的螺旋线的切线, 用单位向量 $\vec{\lambda}_0$ 表示, 另一条与过 R_K 点的发生线重合, 用向量 $\vec{a}$ 表示 (图 4), 则 $\vec{\lambda}_0$ 在 XYZ 内表达式可写成:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_0 &= [-\cos \lambda, 0, \sin \lambda] \\ &= \cos \lambda [-1, 0, \operatorname{tg} \lambda]\end{aligned}$$

λ 是过 R_K 点螺旋线的螺旋升角, 显然有:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{r_f}{r_{Ky}} \operatorname{tg} \lambda_f$$

因: $r_{Ky} = \frac{d}{2} \sec \theta$, $\operatorname{tg} \lambda_f = \frac{mk}{2r_f}$, 所以

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{mk \cos \theta}{d}$$

于是 $\vec{\lambda}_0$ 可改写成:

$$\vec{\lambda}_0 = \cos \lambda \left[-1, 0, \frac{mk \cos \theta}{d} \right] \quad (12)$$

至于向量 $\vec{a}$ 则可由图 2 中的单位向量 $\vec{a}_0$ 绕 Z_0 旋转 φ_K 得到, 再变换到 XYZ 系内, 可写成:

$$\vec{a} = A_Z^{-1}(\varphi_K + \theta) A_Z(\varphi_K) \vec{a}_0$$

由图 2 可知:

$$\vec{a}_0 = [-\sin \alpha_n \sin \lambda_f, \cos \alpha_n, -\sin \alpha_n \cos \lambda_f]$$

所以:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_K + \theta) & \sin(\varphi_K + \theta) & 0 \\ -\sin(\varphi_K + \theta) & \cos(\varphi_K + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_K & -\sin\varphi_K & 0 \\ \sin\varphi_K & \cos\varphi_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha_n \sin\lambda_f \\ \cos\alpha_n \\ -\sin\alpha_n \cos\lambda_f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\alpha_n \sin\lambda_f \cos\theta + \cos\alpha_n \sin\theta \\ \sin\alpha_n \sin\lambda_f \sin\theta + \cos\alpha_n \cos\theta \\ -\sin\alpha_n \cos\lambda_f \end{pmatrix}\end{aligned}$$

或

$$\vec{\alpha} = \sin\alpha_n \cos\theta \left[-\sin\lambda_f + \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha_n}, \quad \sin\lambda_f \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\alpha_n, \quad -\frac{\cos\lambda_f}{\cos\theta} \right] \quad (13)$$

因法线与切线垂直, 所以 $\vec{r}_P \perp \vec{\lambda}_0$, $\vec{r}_P \perp \vec{\alpha}$, 因而有 $\vec{r}_P \cdot \vec{\lambda}_0 = 0$, $\vec{r}_P \cdot \vec{\alpha} = 0$, 于是根据式(7)、(12)、(13)又可写出如下两个方程:

$$-\cos\beta + \frac{mk\cos\theta}{d} \sin\beta = 0 \quad (14)$$

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha_n} - \sin\lambda_f \right) \cos\beta + (\sin\lambda_f \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\alpha_n) \operatorname{tg}\gamma - \frac{\cos\lambda_f}{\cos\theta} \sin\beta = 0 \quad (15)$$

至此, 我们得到(1)、(5)、(9)、(10)、(11)、(14)、(15)等7个方程, 包含 M 、 q 、 d 、 θ 、 β 、 γ 、 φ_K 等7个未知数, 将这些方程联立求解, 最后便可求出所需的 M 尺寸。首先, 由式(5)可得:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(d - d_f \cos\delta) \operatorname{tg}\alpha_n \sin\lambda_f + d_f \delta}{d} \quad (16)$$

由式(14)可得:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{d}{mk\cos\theta} \quad (17)$$

由公(15)可得:

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cos\lambda_f \sec\theta \sin\beta + (\sin\lambda_f - \operatorname{tg}\theta \operatorname{ctg}\alpha_n) \cos\beta}{\sin\lambda_f \operatorname{tg}\alpha_n + \operatorname{tg}\alpha_n} \quad (18)$$

由式(9)、(10)消去 q 得:

$$\operatorname{tg}(\varphi_K + \theta) = \frac{d_P \cos\beta \cos\gamma}{d \sec\theta + d_P \sin\gamma}$$

或

$$\varphi_K = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cos\theta \cos\beta \cos\gamma}{\frac{d}{d_P} + \sin\gamma \cos\theta} - \theta \quad (19)$$

由式(5)和式(11)消去 θ 变化后得:

$$d = \frac{\operatorname{tg}\lambda_f (d_P \sin\beta \cos\gamma + mk\varphi_K) - d_f \delta}{\operatorname{tg}\alpha_n \sin\lambda_f} + d_f \cos\delta \quad (20)$$

最后, 由式(9)、(10)消去 $(\varphi_K + \theta)$ 得:

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{(d \sec\theta + d_P \sin\gamma)^2 + (d_P \cos\beta \cos\gamma)^2}$$

代入式(1)得: