高等学校试用教材

高等数学新讲

中册

郑州粮食学院
工科数学教学(教材)改革试验组

北京科学技术出版社

目　录

中　册

第五章　积分方法

在上册中，我们讨论了函数的微分方法及其应用．本章我们将讨论与它相反的一个问题，即函数的积分法．从形式上看，积分是微分的逆运算，实质上，它们同是运用无穷小量对问题进行数学分析．

第一节　积分的概念与性质

在微分学中，我们把自变量 x 获得增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 产生增量 Δy 的主要部分 dy 称为函数的微分．当 $f'(x)$ 存在时，$dy=f'(x)\cdot dx$．这里，导数 $f'(x)$ 也称为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的变化率．要求 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的变化率，可先将 (a,b) 分割成若干个小区间 $(x,x+\Delta x)$，求出 $f(x)$ 在该小区间上的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，然后取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，可求得 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点的变化率 $f'(x)$．求 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内变化率的过程，可看作无穷多个求"微分之商"的过程．上面的过程可用一句话"分割 —— 近似 —— 取极限"来概括．

现在，我们来讨论其逆问题：若已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任一点的微分 dy，求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的增量．我们将区间 $[a,b]$ 分成若干个小区间 $[x_{i-1}\ x_i]$，在每一个小区间上用函数的微分 dy 近似代替函数的增量 Δy，即

$$\Delta y\approx dy.$$

那末，所有小区间上 dy 之和 $\sum dy$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上增量 $f(b)-f(a)$ 的一个近似表达式，即

$$f(b)-f(a)\approx\sum dy.$$

当分割进行无限细微 $(\Delta x\to 0)$ 时，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum dy$ 存在，该极限即是函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的增量，即

$$f(b)-f(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum dy.$$

显然，这个逆过程也可用"分割 —— 近似 ——（求和）—— 取极限"来概括．

一、引　例

例 1　已知物体的运动速度为 $v(t)$，求物体在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上经过的路程．

设物体的路程函数为 $S(t)$，那末物体在 $[T_1,T_2]$ 上经过的路程为

$$S(T_2)-S(T_1).$$

由微分学知道，速度 $v(t)=S'(t)$．把 $[T_1,T_2]$ 分成 n 个小时间段 $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,\cdots,n,t_0=T_1,t_n=T_2)$，在每个小时间段上，物体经过路程的近似表达式为 $dS_i=S'(t)dt_i$ $(dt_i=t_i-t_{i-1})$，它是该小段上实际路程 ΔS_i 的一个近似值，即

$$\Delta S_i\approx dS_i.$$

对 n 个小段求和，得到 $[T_1,T_2]$ 上路程的近似表达式，即

$$S(T_2) - S(T_1) \approx \sum_{i=1}^{n} dS_i.$$

如果和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} dS_i$ 的极限 $\lim\limits_{dt\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} dS_i$ 存在（$max\{dt_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$)），那么该极限值即是物体在〔$T_1,T_2$〕上经过的路程，即

$$S(T_2) - S(T_1) = \lim_{dt\to 0}\sum_{i=1}^{n} dS_i.$$

求曲边梯形 $A\,a\,b\,B$ 的面积问题（图 5-1），同样可用"分割 —— 近似 ——（求和）—— 取极限"的方法解决.

例 2　求图 5-1 所示曲边梯形的面积.

分割 $y = f(x)$ 所在的区间〔a,b〕，对任一小区间〔$x, x+dx$〕上的小曲边梯形面积 $\Delta S_i (i = 1,\cdots,n)$，可用对应的小矩形面积 dS_i 近似代替，即

$$\Delta S_i \approx dS_i.$$

求得的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} dS_i$ 是曲边梯形 $A\,a\,b\,B$ 面积 S 的近似值，即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} dS_i.$$

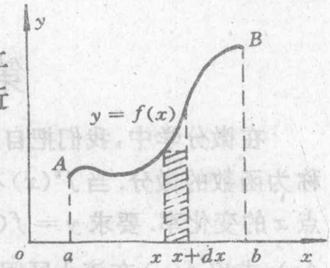


图 5-1

当和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} dS_i$ 的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} dS_i$ 存在（$\Delta x = max\{dx_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$），曲边梯形 $A\,a\,b\,B$ 的面积即可求出：

$$S = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} dS_i.$$

上面两个例子的实际意义不同，但它们都可以用"分割 —— 近似 —— 求和 —— 取极限"的方法予以解决. 事实上，类似的问题还有很多. 抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质加以概括，我们有下面定积分的定义.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在〔a,b〕上有界，在〔a,b〕上任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把〔a,b〕分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间〔x_{i-1},x_i〕上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1,2,\cdots,n)$，并作和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对〔$a,b$〕怎样分法，也不论在小区间〔$x_{i-1},x_i$〕上点 ξ_i 怎样取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，这时称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间〔a,b〕上的定积分，简称为积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间，“$\int$”称为积分记号.

积分代表着一类内容十分广泛的运算.但定义规定的求和式极限的方法，却很不方便，有时甚至非常困难.这就提出了寻找实用积分方法的问题.

二、原函数与不定积分

定义 2　如果在开区间 I 内，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x \in$ I，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为函数 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 内的原函数.

定义 2 表明，由导函数 $f(x)$（或微分 $f(x)dx$）推求原来函数 $F(x)$（或 $dF(x)$）的过程，称为求原函数，它是求导（微分）的逆运算.例如，由

$$(\sin x)' = \cos x$$

可知，$\cos x$ 有一个原函数 $\sin x$.这里之所以说“有一个”，是因为

$$\cos x = (\sin x + C)'.$$

这意味着：对于任意的常数 $C(-\infty < C < +\infty)$，函数族 $\sin x + C$ 中的任一个都是 $\cos x$ 的原函数.

一般地，我们给出以下定义：

定义 3　在区间 I 内，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数（族）$F(x) + C$，称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 内的不定积分，记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

其中，记号“$\int$”称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

例 3　求 $\int x^n dx\ (n \neq -1)$.

解　由于 $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$，所以 $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 是 x^n 的一个原函数，因此

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

例 4　求 $\int a^x\, dx$.

解　由于 $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$，所以 $\dfrac{a^x}{\ln a}$ 是 a^x 的一个原函数，因此

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

从不定积分的定义，即可知下述关系：

由于 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x),$$

或

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

或记作

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见，微分运算（以记号“d”表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号“$\int$”表示）是互逆的. 当记号$\int$与 d 连在一起时，或者抵消，或者抵消后相差一个常数.

既然积分运算是微分运算的逆运算，故从基本导数公式可以推得基本积分公式. 下面，我们把一些基本的积分公式列成一个表，叫做基本积分表：

1. $\int kdx = kx + C$ (k 是常数)；

2. $\int x^{\mu}dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$；

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$，(有时简记为 $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$)；

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}x + C$；

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}x + C$；

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$；

7. $\int \sin dx = -\cos x + C$；

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \text{tg}x + C$；

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\text{ctg}x + C$；

10. $\int \sec x \, \text{tg}x dx = \sec x + C$；

11. $\int \csc x \, \text{ctg}x dx = -\csc x + C$；

12. $\int e^x dx = e^x + C$；

13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$；

14. $\int \text{sh}x \, dx = \text{ch}x + C$；

15. $\int \text{ch}x \, dx = \text{sh}x + C$.

例 5　求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

解　$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$

例 6　求 $\int 2^{\frac{x}{2}}\pi^x dx$.

解 $\int 2^{\frac{x}{2}}\pi^x dx = \int(\sqrt{2}\pi)^x dx = \dfrac{1}{\ln(\sqrt{2}\pi)}(\sqrt{2}\pi)^x + C.$

比较定义 1 和定义 3 可以看出，定积分与不定积分从形式上看有相同的地方，理论上可以证明它们之间也存在着内在的联系. 关于这一问题的讨论，我们将在下一节中展开.

从几何直观上看，定积分表示介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间各部分面积的代数和(图 5-2)；运用定积分可以求任意曲边形的面积(图 5-3). 不定积分表示在 x 处以 $f(x)$ 为切线斜率的曲线族 $F(x)+C$，它由无穷多条曲线组成(图 5-4).

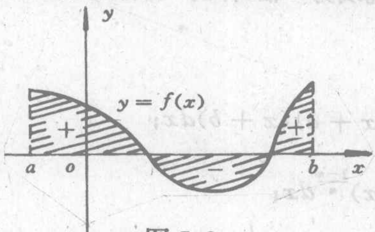


图 5-2

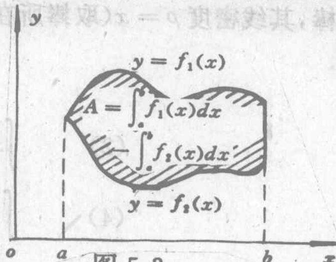


图 5-3

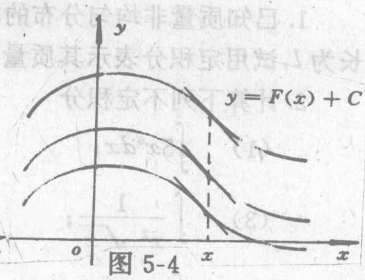


图 5-4

三、积分的基本性质

按照积分的定义，容易得到如下基本性质：

性质 1

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

性质 2

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ 为常数});$$

性质 3 （对积分区域的可加性）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

性质 4

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a;$$

性质 5 （积分值对被积函数的保号性）

若 $x \in [a,b]$，$f(x) \geqslant 0$ 时(或 $f(x) \leqslant 0$)，则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \ (\text{或} \int_a^b f(x)dx \leqslant 0);$$

性质 6 （估值不等式）

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$ （M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值）；

性质 7 （积分中值定理）

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \ (f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续}, a \leqslant \xi \leqslant b).$$

其中，性质 3——7 在以下两种规定下成立：

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

习题 5-1

1. 已知质量非均匀分布的棒，其线密度 $\rho = x$（取棒所在直线为 x 轴，棒的一端为原点），棒长为 l，试用定积分表示其质量.

2. 计算下列不定积分

(1) $\int 5x^6 dx$；　(2) $\int x(x+a)(x+b)dx$；

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$；　(4) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$；

(5) $\int x^2 \sqrt[3]{x}\, dx$；　(6) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$；

(7) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx$；　(8) $\int (2e^x + \frac{3}{x}) dx$；

(9) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$；　(10) $\int 3^x e^x dx$；

(11) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$；　(12) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$；

(13) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$；　(14) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x} dx$；

(15) $\int \sec x(\sec x - \mathrm{tg} x)dx$；　(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$；

(17) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$；　(18) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

3. 利用定积分的几何意义说明下列等式成立：

(1) $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$；　(2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4}\pi a^2$；

(3) $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时，} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时.} \end{cases}$

4. 估计下列各积分的值：

(1) $\int_1^4 (x^2+1)dx$；　(2) $\int_2^0 e^{x^2-x} dx$.

5. 不算出定积分的值，确定下列积分中哪一个大，并说明理由：

(1) $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 x^2 dx$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$

(3) $\int_1^2 x dx$ 与 $\int_1^2 x^2 dx$；　(4) $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

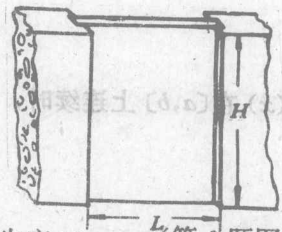
6. 水利工程中要计算栏水闸所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p（单位面积上的压力大小）是水深 h 的函数，且有 $p = 9.8h$（千牛 / 米²）. 若闸门高 $H = 3$ 米，宽 $L = 2$ 米，求水面与闸

门顶相齐时闸门所受的水压力 P(如右下图).

7. 如果人口的瞬时变化率是 $50t^2 - 100t^{\frac{3}{2}}$,单位是人/年,初始人口数是 25000. 试问

(1) 七年后人口为多少?

(2) 25 年后人口为多少?



(第 6 题图)

8. 某工厂生产某产品的边际成本 $MC = 25q - 0.02q^2 + 20$,生产 10 件的成本是 2000 元. 试问生产 100 件和 500 件成本各是多少?

第二节 微积分基本公式

一、可积函数类

如果把积分存在称为可积,那么以下两个定理给出了可积函数的类型:

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续或者在 $[a,b]$ 上有界且有有限个间断点,则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续,那么在区间 I 内存在原函数 $F(x)$ 与不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$,使对一切 $x \in$ I 都有

$$[F(x) + C]' = [F(x)]' = f(x).$$

下面,我们讨论可积函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与不定积分 $\int f(x)dx$ 之间的关系.

二、积分上限的函数 $\int_a^x f(x)dx$

为了沟通定积分与不定积分的关系,我们定义一个函数(积分上限的函数)

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

下面,将证明它是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数. 积分上限的函数以积分上限 x 为自变量,其图形如图 5-5 所示. 为了避免积分上限 x 与积分变量 x 发生混淆,我们把积分变量改写成 t(由于积分值不受积分变量记号的影响,不妨这样作),得

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

当上限 x 获得增量 Δx 时,有

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

相应地,函数 $\Phi(x)$ 产生增量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)\\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.\end{aligned}$$

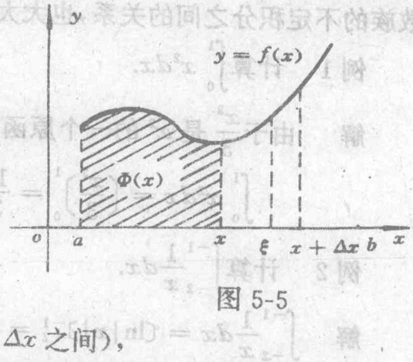


图 5-5

按照积分中值定理

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x + \Delta x \text{ 之间}),$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi).$$

当 $f(x)$ 在〔a,b〕上连续时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x),$$

即

$$\Phi'(x)=f(x).$$

从而有以下定理：

定理 3 如果函数 $f(x)$ 在〔a,b〕上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

在〔a,b〕上具有导数

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad(a<x<b).$$

换言之，$\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在〔a,b〕上的一个原函数.

如此看来，函数族 $\Phi(x)+C$ 可以代表被积函数 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$，或者说 $\Phi(x)+C$ 即是 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)dx$. 由此可推出微积分基本公式.

三、牛顿 —— 莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 是〔a,b〕上的连续函数，则变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那末 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 满足

$$F(x)-\Phi(x)=C\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

即有

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-C.$$

当 $x=a$ 时，$C=F(a)$；当 $x=b$ 时，有

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b.$$

上式就是被称为“微积分基本定理”的牛顿（*Newton*）—— 莱布尼兹（*Lebniz*）公式. 它揭示了（定）积分值等于被积函数 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 在区间〔a,b〕上增量的关系. 从而，使（定）积分的求值可以用求原函数增量的办法实现. 这不仅沟通了求和式极限的（定）积分与求原函数族的不定积分之间的关系，也大大简化了（定）积分的计算手续.

例 1 计算 $\int_0^1 x^2dx$.

解 由于 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数，故有

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

例 2 计算 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$.

解 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$

例 3 求图 5-6 所示阴影部分的面积.

解　根据定积分的几何意义,它的面积

$$A=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx$$

$$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=1-0-(-1-1)=3.$$

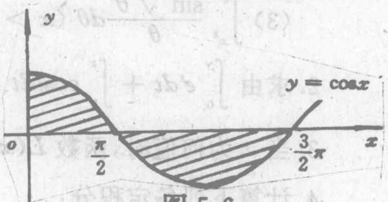


图 5-6

例 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且

$$f(x)>0, F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)},\text{试证:}$$

(1) $F'(x)\geqslant 2$;

(2) $F(x)$ 在 (a,b) 内仅有一个实根.

证　(1) 因为 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=2+\frac{[f(x)-1]^2}{f(x)}$,所以当 $f(x)>0$ 时必有 $F'(x)\geqslant 2$.

(2) 由 $F'(x)>0$ 知 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加,

且
$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}\left[\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}\right]=-\int_a^b\frac{dx}{f(x)}<0,$$

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}\left[\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}\right]=\int_a^b f(x)dx>0.$$

所以,在 (a,b) 内有且仅有一个 ξ,使

$$F(\xi)=0,$$

即 $F(x)$ 在 (a,b) 内有且仅有一实根.

例 5　火箭在空中飞行时以常速 v_0 喷出气体,火箭质量 m 在不断减少.若开始时火箭质量为 m_0,求飞行过程中质量与速度的关系.

解　飞行过程中质量对时间的变化率为 $v_0\frac{dm}{dt}$,由于飞行加速度为 $\frac{dv}{dt}$,所以有

$$-v_0\frac{dm}{dt}=m\frac{dv}{dt},$$

(因为质量在减少,$\frac{dm}{dt}<0$;喷射方向与飞行方向相反,故取 $-v_0$).从而有

$$\frac{dm}{m}=-\frac{dv}{v_0}.$$

在 $m=m_0$ 时 $v=0$ 的假设下,有

$$\int_{m_0}^m\frac{dm}{m}=-\int_0^v\frac{dv}{v_0}.$$

解之,得

$$\frac{m_0}{m}=e^{-\frac{v}{v_0}}.$$

这是火箭飞行理论中的一个基本公式.

习题 5-2

1. 求下列函数的导数:

(1) $f(x)=\int_a^{e^x}\frac{\ln t}{t}dt\quad(a>0)$,求 $f'(x),f'(1)$;

(2) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$. 求 $f'(x)$;

(3) $\int_{x^2}^{e}\frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta}d\theta\ (x>0)$，求 $f'(x),f'(\frac{\pi}{2})$.

2. 求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数.

3. 当 x 为何值时，函数 $L(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值？

4. 计算下列各定积分：

(1) $\int_1^2(x^2+\frac{1}{x^4})dx$；　　(2) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$；

(3) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$；　　(4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2\theta d\theta$；　　(6) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$；

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1+x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$ 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f(x)dx$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\pi \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 或 } x>\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

7. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\mathrm{arc\ tg}t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_0^{2x}t^2\ln(1+t)dt}{\int_0^x\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\,dt}$

8. 一个运动质点 t 秒时的速度 $v(t)=t^{\frac{3}{2}}+16t+1$，(米/秒)，试问该质点从 $t=4$ 秒到 $t=9$ 秒这段时间内走了多远？

9. 某工厂卖出某产品的边际收入 $MR=2-0.02q+0.003q^2$（元/件）. 如果该工厂卖出的产品以 50 件增加到 100 件，试问它的收入增加多少元？

10. 某种昆虫增加的速度是 $\frac{3000}{\sqrt{t}}$（只/周）. 试问以第 9 周到第 25 周这段时间内这种昆虫总共增加多少只？

第三节　换元积分法

运用和式极限求(定)积分值非常不便,而使用基本积分表与积分性质能直接求出原函数(增量)的也十分有限.因此,有必要讨论求积分的一般方法.

一、换元积分公式

设

(1) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续;

(2) 函数 $x=\varphi(t)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上是单值的且有连续导数;

(3) 当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时,$x\in[a,b]$,且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.

$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ 是由 $F(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 复合而成的函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

那末,由复合函数求导法得

$$\Phi'(t)=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

上式表明,$\Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.按照假设条件与牛顿——莱布尼兹公式,有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

又因为 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ 及 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,
可知

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

(1) 式与其对称形式(2)式:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

就是换元积分法公式.

换元时,积分变量改变(坐标系改变)了,积分区间的表达也相应发生了变化.故对求积分来说,必须注意在换元的同时相应地改变积分上下限.另一方面,由于函数 $\Phi(t)$ 与复合函数 $F(x)=F[\varphi(t)]$ 的对应增量相等,所以,无论算出哪一个都是(定)积分的值.

二、第一类换元法

让我们把目光先集中在如何求出原函数问题上,暂不考虑积分上、下限的变化.从形式上看,换元公式(2)是一种"由繁变简"的变换.通俗的说法是:从被积表达式 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 中,"凑出"某个新变量 $x(x=\varphi(t))$ 的函数 $F(x)$ 的微分 $dF(x)=f(x)dx$.通常,将这种换元法称为第一换元法,也叫"凑微分"换元法.

例 1　求$\int 2e^{2x}dx$.

解　被积函数中 e^{2x} 是一个复合函数,即 $e^{2x}=e^u,u=2x$,常数因子 2 正好是中间变量 $u=$

$2x$ 的导数.因此,我们作变换 $u=2x$ 则

$$\int 2e^{2x}dx=\int e^{2x}(2x)'dx=\int e^{u}du=e^{u}+C.$$

最后再以 $u=2x$ 代入,即得

$$\int 2\,e^{2x}dx=e^{2x}+C.$$

例 2　求 $\int\frac{dx}{a+bx}$　(a,b 为常数且 $b\neq 0$).

解　令 $u=a+bx$,被积表达式 $\frac{1}{a+bx}dx$ 中缺少 $\frac{du}{dx}=b$ 这一项,但由于 b 为常数,故可改变系数凑出这一项:

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{1}{b}\,\frac{b}{a+bx}=\frac{1}{b}\,\frac{1}{a+bx}(a+bx)',$$

从而

$$\int\frac{1}{a+bx}dx=\int\frac{1}{b}\,\frac{b}{a+bx}dx=\frac{1}{b}\int\frac{1}{a+bx}(a+bx)'dx=\frac{1}{b}\int\frac{1}{u}du$$

$$=\frac{1}{b}\ln|u|+C=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C.$$

一般地,对于积分 $\int f(a+bx)dx$,总可以作变换 $u=a+bx$,将其化为

$$\int f(a+bx)dx=\int\frac{1}{b}f(a+bx)d(a+bx)$$

$$=\frac{1}{b}\Big[\int f(u)du\Big]_{u=a+bx}.$$

例 3　求 $\int 2x\cos x^{2}dx$.

解　$\int 2x\cos x^{2}dx\xlongequal[2xdx=du]{x^{2}=u}\int\cos u\,du=\sin u+c=\sin x^{2}+C.$

例 4　求 $\int x\sqrt{1-x^{2}}dx$.

解　$\int x\sqrt{1-x^{2}}dx\xlongequal[-2xdx=du]{1-x^{2}=u}\int\frac{-1}{2}u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^{2})^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 5　求 $\int\mathrm{tg}\,x\,dx$.

解　$\int\mathrm{tg}\,x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx\xlongequal[du=-\sin xdx]{u=\cos x}\int-\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$

在我们对变量代换比较熟练以后,就不一定要写出中间变量 u 了.

例 6　求 $\int\frac{dx}{a^{2}+x^{2}}$　($a\neq 0$).

解　$\int\frac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a^{2}}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$

例 7　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}$　($a>0$).

解　$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}}=\mathrm{arc\,sin}\frac{x}{a}+C.$

例 8　求$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx \quad (a\neq 0)$.

解　由于$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$，所以

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}d(x+a)\right]=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 9　求$\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

解　$$\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d2\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

例 10　求$\int\frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}}{\sqrt{x}}dx$.

解　由于$d\sqrt{x}=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$，因此

$$\int\frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}}{\sqrt{x}}=2\int e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}d\sqrt{x}=6\int e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}d\frac{\sqrt{x}}{3}=6e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}+C.$$

例 11　求$\int\cos 3x\cos 2x\,dx$.

解　$$\int\cos 3x\cos 2x\,dx=\int\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$$

例 12　求$\int\cos^2 x dx$.

解　$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int 1dx+\int\cos 2xdx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C.$$

例 13　求$\int\csc x dx$.

解　$$\int\csc x\,dx=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

因为　$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\operatorname{ctg}x,$$

所以，上述不定积分又可表为

$$\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\operatorname{ctg}x|+C.$$

类似地，可以求出$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg}x| + C$.

例 14　求$\int \sec^6 x\, dx$.

解　$\int \sec^6 x\, dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x\, dx = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)^2 d\mathrm{tg}x$

$$= \int (1 + 2\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x) d\mathrm{tg}x$$

$$= \mathrm{tg}x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + C.$$

对于(定)积分来说，可以直接对变换后的变量求原函数增量. 如果并没有明显地写出新变量，则不必改变原积分的上、下限.

例 15　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\, dx$.

解　设 $t = \cos x$，则 $dt = -\sin x\, dx$，且

当 $x = 0$ 时，$t = 1$；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$t = 0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \sin x\, dx = -\int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

解此题时，也可以不明显地写出新变量 t，这时定积分的上、下限不要变更.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, d(\cos x) = -\left[\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(0 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

例 16　计算$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}dx$.

解　$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}dx = \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{3}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

例 17　设函数

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{1 + \cos x}, & \text{当 } -1 \leqslant x < 0 \text{ 时}; \end{cases}$$

计算$\int_1^4 f(x - 2)dx$.

解　$\int_1^4 f(x-2)dx \xlongequal[\substack{x=1\text{时},t=-1 \\ x=4\text{时},t=2}]{\text{令 } x-2=t} \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1 + \cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt$

$$= \left[\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^2$$

$$= \mathrm{tg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}.$$