高等教育基础数学教材系列

工程数学

GONG CHENG SHU XUE

柴惠文 姚永芳 邓 燕 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等教育基础数学教材系列

工程数学

柴惠文　姚永芳　邓　燕　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/柴惠文,姚永芳,邓燕主编. —上海:华东理工大学出版社,2017.7

高等教育基础数学教材系列

ISBN 978-7-5628-5107-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①柴… ②姚… ③邓… Ⅲ.①工程数学—高等学校—教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 154161 号

内容提要

本书采用一般本科院校的学生易于接受的方式,科学、系统地介绍了线性代数课程及概率论与数理统计部分课程的基本内容,具有结构清晰、概念准确、深入浅出、可读性强、便于学生自学等特点.

全书共分 7 章,包括行列式、矩阵、线性方程组与向量组的线性相关性、特征值和特征向量及矩阵的相似对角化、二次型、随机事件与概率、随机变量及其分布,附录为标准正态分布表、参考答案及提示.

本书可作为部分工科类(如生物、化学等)专业的教材或参考用书,同时也可作为一般本科院校的各专业相关课程的教材和教学参考书.

策划编辑 / 周 颖
责任编辑 / 徐知今
装帧设计 / 肖 车 靳天宇
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:021-64250306
网址:www.ecustpress.cn
邮箱:zongbianban@ecustpress.cn
印 刷 / 常熟市大宏印刷厂
开 本 / 787mm×1092mm 1/16
印 张 / 12.5
字 数 / 380 千字
版 次 / 2017 年 7 月第 1 版
印 次 / 2017 年 7 月第 1 次
定 价 / 38.00 元

前　言

本书参照国家教育部高等院校经管类专业数学教学指导委员会拟订的线性代数及概率论与数理统计课程教学基本要求,及全国硕士研究生入学统一考试线性代数部分考试大纲编写而成.

本书包括:行列式,矩阵,线性方程组与向量组的线性相关性,特征值和特征向量、矩阵的相似对角化,二次型,随机事件与概率,随机变量及其分布等内容.教材涵盖了线性代数课程的教学基本要求及概率论与数理统计课程的部分教学基本要求,适合部分工科类专业(如生物、化学等)相关课程学习;同时也可作为一般本科院校各专业相关课程的教材和教学参考书.

本教材在保留传统的知识体系的前提下,以降低难度、理论够用为尺度,淡化数学抽象的理论和证明,注重具体做法和实用性、可操作性.全书编排以激发学生的学习兴趣、提高学生的学习热情、培养学生的学习方法为突破点,训练学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、运算能力以及利用本课程知识去解决实际问题的能力.教材从概念的引入到具体的例子,从定理的证明到定理的应用,力求从实际背景进行介绍和论述,并给出详尽的计算方法和丰富的例题,力求体现内容的可读性,做到由浅入深、深入浅出,便于教学和学生自学.

本书由柴惠文、姚永芳、邓燕担任主编,其中第1,2章由邓燕编写;第3,6,7章由柴惠文编写;第4,5章由姚永芳编写.全书由柴惠文统稿,三位作者相互进行认真仔细的校对.

本教材在编写过程中得到许多专家、同行的指导和帮助,并提出了许多宝贵的建议,编者在编写过程中也采纳了这些建议.马柏林教授对本书的编写给予极大的关心和支持,在此一并表示衷心的感谢.

本教材的书稿虽经过认真的修改及校对，但仍会存在一些错误或不足之处，我们衷心地希望能得到各位专家、同行和读者的批评与指正，使本书在使用过程中不断完善.

编者

2017 年 3 月 8 日

目　　录

1 行列式

行列式是为求解线性方程组的需要而建立起来的，是一个重要的数学工具，在物理、工程、经济等多个领域都有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、行列式的基本性质和计算方法，以及行列式解线性方程组的方法.

1.1 2阶与3阶行列式

本节的主要目的是叙述行列式的来源. 行列式是从二元和三元线性方程组的求解中引出来的.

1.1.1 2阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此方程组，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=(b_1a_{22}-b_2a_{12}) \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=(a_{11}b_2-a_{21}b_1) \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可求得式(1.1)方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.2)给出了二元线性方程组式(1.1)解的一般公式，但它难以记忆，因而有必要引入一个符号来更方便地表示，这就有了行列式.

定义 1.1 称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为**2阶行列式**，用它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

式(1.3)称为2阶行列式的**展开式**，其中 a_{ij} 称为2阶行列式的**元素**，第一个下标 i 称为**行标**，第二个下标 j 称为**列标**，它们表示 a_{ij} 位于行列式中的第 i 行第 j 列(横排叫行，纵排叫列).

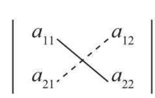

图 1.1

式(1.3)可以用图1.1所示的画线方法帮助记忆. 将左上角与右下角的连线(实线)称为行列式的**主对角线**，将右上角与左下角的连线(虚线)称为**副对角线**(或**次对角线**). 那么式

(1.3)就可以被方便地表述为:2 阶行列式等于主对角线上元素的乘积与副对角线上元素的乘积之差,这个方法称为 2 阶行列式的**对角线法则**.

引入了 2 阶行列式后,式(1.2)中的分子和分母可以分别记为

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

那么当 $D\neq0$ 时,方程组式(1.1)的解式(1.2)就可以很方便、简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

特别,还可以注意到其中 $D_j(j=1,2)$ 分别是用线性方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2 取代了 D 中第 j 列元素得到的 2 阶行列式.

[例 1.1] 利用行列式求解 2 元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}.$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-1\times4=2\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

1.1.2 3 阶行列式

设三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0$ 时,仍然利用消元法,可以得到方程组式(1.5)解的一般公式为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \tag{1.6}$$

上述表达式记起来非常困难，为此引入 3 阶行列式.

定义 1.2 称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为**3 阶行列式**，用它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.7}$$

式(1.7)称为 3 阶行列式的**展开式**.

在展开式(1.7)中，可以看到 3 阶行列式的值是 3! 项乘积的代数和，其中 3 项是正号，3 项是负号，且每项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

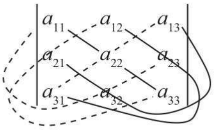

图 1.2

式(1.7)可以用图 1.2 所示的画线方法帮助记忆，即 3 阶行列式的值等于其中三条实线联结的 3 个元素乘积之和与三条虚线连接的 3 个元素乘积之和的差，这个法则也称为 3 阶行列式的**对角线法则**.

类似二元线性方程组，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)解的公式(1.6)就可以方便地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.8}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用线性方程组(1.5)的常数项 b_1,b_2,b_3 替代 D 中第 j 列相应的元素所得到的 3 阶行列式.

[例 1.2] 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解 由 3 阶行列式的对角线法则，得

$D=1\times2\times2+(-2)\times1\times3+3\times2\times0-3\times2\times3-(-2)\times2\times2-1\times0\times1=-12.$

[例 1.3] 利用行列式求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=16\\ x_1+4x_2+2x_3=13\\ 3x_1+x_2+x_3=7\end{cases}.$$

解　由 3 阶行列式的对角线法则,得 $D=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&4&2\\3&1&1\end{vmatrix}=-25\neq0$,

$$D_1=\begin{vmatrix}16&3&4\\13&4&2\\7&1&1\end{vmatrix}=-25,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&16&4\\1&13&2\\3&7&1\end{vmatrix}=-50,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&3&16\\1&4&13\\3&1&7\end{vmatrix}=-50.$$

由式(1.8)得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-25}{-25}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-50}{-25}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-50}{-25}=2.$$

从以上叙述可以看出,引入 2、3 阶行列式的概念后,为表示和记忆二、三元线性方程组的解的公式带来了极大的便利. 但是在实际问题中遇到的线性方程组,未知量往往不止三个,为把上述结果推广到 n 个方程、n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

需要引入 n 阶行列式的定义.

习题 1.1

1. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}5&-4\\4&-3\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}\sin x&-\cos x\\ \cos x&\sin x\end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}1&0&-5\\-2&3&2\\1&-2&0\end{vmatrix}$　　(5) $\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\1000&1&8\end{vmatrix}$

2. 解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix}k&3&4\\-1&k&0\\0&k&1\end{vmatrix}=0$　　(2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$

1.2　n 阶行列式

在引入 n 阶行列式定义的过程中,很自然地希望将 2 阶和 3 阶行列式的对角线法则推广. 但是检验发现只有 2 阶和 3 阶行列式才具有对角线法则,4 阶及以上的行列式并不存在对角线法则. 为了解决这一问题,必须用新的规则来定义 n 阶行列式,这就需要先介绍排列及逆序数等准备知识.

1.2.1 排列及逆序数

在排列组合中，常讨论 n 个不同元素排序的种数，我们这里只研究由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个不同自然数排序的相关知识.

定义 1.3 由数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n **级排列**(简称**排列**).

例如，1234 及 2341 都是 4 级排列. n 级排列的一般形式可记为 $p_1p_2\cdots p_n$，其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中的某个自然数，且 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 互不相同. 由排列组合的知识可知，n 级排列的总数为 $n!$. 在所有的 n 级排列中，排列 $12\cdots n$ 是唯一从左向右看元素按从小到大顺序形成的排列，称其为**标准排列**；其余的 n 级排列都会有较大的元素在左，而较小的元素在右的现象.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果较大的元素 p_s 排在较小的元素 p_t 的左侧，则称 p_s 和 p_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 或 $N(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在排列 23154 中，共有 2 和 1，3 和 1，5 和 4 三个逆序，因此排列 23154 的逆序数为 3，即 $\tau(23154)=3$.

对于一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$，可以用以下两种方法计算它的逆序数：

方法一：将 $p_t(t=1,2,\cdots,n)$ 左侧比 p_t 大的元素的个数称为 p_t **的逆序数**，并记作 τ_t，则该排列的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_t\cdots p_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_t+\cdots+\tau_n. \tag{1.9}$$

方法二：观察排在 1 左侧元素的个数，设为 m_1(1 的逆序数)，然后把 1 划去，再观察 2 左侧元素的个数(划去的元素不再计算在内)，设为 m_2(2 的逆序数)，再把 2 划去，如此继续下去，最后设在 n 左侧有 m_n 个元素(实为 0)，则该排列的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_t\cdots p_n)=m_1+m_2+\cdots+m_t+\cdots+m_n. \tag{1.10}$$

[例 1.4] 求下列各排列的逆序数.

(1) 53412　　(2) 35412　　(3) $123\cdots(n-1)n$

(4) $n(n-1)\cdots 21$　　(5) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

解 (1) 由式(1.9)，$\tau(53412)=0+1+1+3+3=8$.

(2) 由式(1.10)，$\tau(35412)=3+3+0+1+0=7$.

(3) 由式(1.10)，$\tau(123\cdots(n-1)n)=0+0+\cdots+0=0$.

(4) 由式(1.10)，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(5) 由式(1.9)，

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=0+0+\cdots+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.5 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

定义 1.6 在一个 n 级排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中，如果仅将它的两个元素 p_s 与 p_t 对调，其余元素保持不变，得到另一个排列 $p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$，这种做出新排列的过程叫做**对换**，记为对换$(p_s,p_t)$. 特别地，将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**.

在例 1.4 中，可以看到标准排列是一个偶排列，并且注意到偶排列 53412 经过对换(3,

5)后,得到的排列 35412 是一个奇排列.事实上,我们有以下结论.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证* (1) 首先讨论相邻对换的特殊情况,设原排列为

$$\cdots ij \cdots,$$

则经过对换(i,j)后,变为新排列

$$\cdots ji \cdots.$$

由于仅改变了 i 和 j 的次序,其余元素的位置并没有改变,因此新排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1(当 $i<j$ 时),或减少 1(当 $i>j$ 时).无论哪种情况,经过一次相邻对换之后排列的奇偶性发生改变.

(2) 下面讨论一般情况,设原排列为

$$\cdots i p_1 p_2 \cdots p_s j \cdots, \tag{1.11}$$

则先经过 s 次相邻对换,将排列(1.11)变为

$$\cdots p_1 p_2 \cdots p_s i j \cdots, \tag{1.12}$$

然后,再经过 $s+1$ 次相邻对换,将排列(1.12)变为

$$\cdots j p_1 p_2 \cdots p_s i \cdots. \tag{1.13}$$

由上面的对换过程可以知道,对排列式(1.11)施以对换(i,j)得到排列式(1.13)的过程,可以分解为施以 $2s+1$ 次相邻对换实现.而每施行一次相邻对换都改变排列的奇偶性,故排列式(1.11)与排列式(1.13)的奇偶性不同.可见,任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

下面研究在一个 n 级排列中,偶排列和奇排列各占多少.

定理 1.2 当 $n>1$ 时,n 级排列中,奇排列和偶排列各占一半,均有$\frac{n!}{2}$个.

证 n 级排列的总数共有 $n!$ 个,设其中偶排列有 p 个,奇排列有 q 个,则 $p+q=n!$.如果对这 p 个偶排列施以同一个对换[例如对换(1,2)],则由定理 1.1 知 p 个偶排列全部变为不同的奇排列,且都包含在那 q 个奇排列中,因此 $p\leqslant q$.同理,可得 $q\leqslant p$.所以

$$p=q=\frac{n!}{2}.$$

1.2.2 *n* 阶行列式的定义

在引入逆序数的定义后,下面进一步观察 2 阶和 3 阶行列式的展开规律,以寻求定义 n 阶行列式的新规律.

2 阶行列式的展开式(1.3)为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

3 阶行列式的展开式(1.7)为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

通过研究,可以发现以下规律:

(1) 2 阶行列式的展开式是 2！项的代数和. 3 阶行列式的展开式是 3！项的代数和.

(2) 2 阶行列式的展开式每项都是取自不同行不同列的 2 个元素的乘积. 3 阶行列式的展开式的每项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积.

(3) 因为代数和中每个乘积项中的元素次序是可以改变的，所以每项的符号是由该项中元素的行标的排列和列标的排列共同决定的.

事实上，如果记 2 阶行列式的一般项为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}$，那么它的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2)+\tau(j_1j_2)}$. 例如：式(1.3)中的第二项，当写成 $a_{12}a_{21}$ 时，它的符号为 $(-1)^{\tau(12)+\tau(21)}$，是负号. 若写成 $a_{21}a_{12}$，它的符号为 $(-1)^{\tau(21)+\tau(12)}$，也还是负号.

如果记 3 阶行列式的一般项为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}$，那么它的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)+\tau(j_1j_2j_3)}$. 例如，式(1.7)中的第六项，当写成 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 时，它的符号为 $(-1)^{\tau(123)+\tau(321)}$，是负号. 写成 $a_{22}a_{31}a_{13}$，它的符号为 $(-1)^{\tau(231)+\tau(213)}$，也是负号；或写成 $a_{31}a_{22}a_{13}$，它的符号为 $(-1)^{\tau(321)+\tau(123)}$，还是负号. 不难验证，该项其他的换序方式也有同样的结果.

因此，可以注意到每项的符号是由该项中元素的行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和的奇偶性决定的.

根据以上规律，展开式(1.3)和式(1.7)可以分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2} (-1)^{\tau(i_1i_2)+\tau(j_1j_2)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2},$$

其中 i_1i_2，j_1j_2 是两个 2 级排列，$\sum\limits_{i_1i_2}$ 表示对所有的 2 级排列求和；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2i_3} (-1)^{\tau(i_1i_2i_3)+\tau(j_1j_2j_3)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3},$$

其中 $i_1i_2i_3$，$j_1j_2j_3$ 是两个 3 级排列，$\sum\limits_{i_1i_2i_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和.

综合 2 阶和 3 阶行列式的最本质的特征，定义 n 阶行列式如下：

定义 1.7 称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

为 **n 阶行列式**，它等于所有取自式(1.14)中属于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.15}$$

的代数和，其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 当 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶数时，乘积项式(1.15)前取正号；当 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数时，乘积项式(1.15)前取负号.

因此，n 阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.16}$$

其中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和，故此代数和共有 $n!$ 项.

为了方便，常用记号 D 或 D_n 来表示 n 阶行列式，也可简记为 $|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 是 n 阶行列式的第 i 行第 j 列的元素. 当 $n=1$ 时，规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

特别地，

(1) 若将式(1.16)中行标排列调整为标准排列 $12\cdots n$，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}. \tag{1.17}$$

(2) 若将式(1.16)中列标排列调整为标准排列 $12\cdots n$，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{t_1 t_2 \cdots t_n} (-1)^{\tau(t_1 t_2 \cdots t_n)} a_{t_1 1} a_{t_2 2} \cdots a_{t_n n}. \tag{1.18}$$

[例 1.5] 确定 4 阶行列式的项 $a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 的符号.

解 方法一：因为 $\tau(3214)=3$，$\tau(2143)=2$，利用式(1.16)中确定符号的方法可知，$a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 所带的符号为负号.

方法二：先交换项 $a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 中元素的次序，使其行标按自然数的顺序排列，成为 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$. 因为 $\tau(4123)=3$，由式(1.17)可知，$a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 所带的符号为负号.

[例 1.6] 证明 n 阶**下三角行列式**(当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由行列式定义知，行列式的值为

$$\sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}.$$

根据此行列式的特点，我们只需考虑和式中来自不同行不同列的 n 个元素的乘积可能不为零的项. 第一行中，只有取 a_{11}，才可能得到非零的项；第二行中，由于每个乘积项里的元素必须取自不同行不同列，故只有取 a_{22}，才可能得到非零的项……如此继续，第 n 行中只能取 a_{nn}，才可能得到非零的项. 因此在 $n!$ 项的代数和中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能非零，其余 $n!-1$ 项均为零. 又由 $\tau(12\cdots n)=0$，可知这一项取正号. 综上可得，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，利用式(1.18)可得 n 阶**上三角行列式**(当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以下元素全为 0).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上、下三角行列式统称为**三角行列式**.特别地,n 阶**主对角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

[例 1.7] 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 由行列式定义知,行列式的值为

$$\sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}.$$

我们只需考虑行列式中可能不为零的项.第一行中,只有取 a_{1n},才可能得到非零的项;第二行中,由于每个乘积项里的元素必须取自不同行不同列,故只有取 $a_{2,n-1}$,才可能得到非零的项……如此继续,第 n 行中只能取 a_{n1},才可能得到非零的项.因此在 $n!$ 项的代数和中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 可能非零,其余 $n!-1$ 项均为零.因为 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$,故

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理,可得 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,n 阶**副对角行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

上述这些特殊行列式的结果,在行列式的计算中都可以直接使用,这将使行列式的计算更为简便.