湖北省数学学会

8 8 年度函数论年会（咸宁）

# 武漢大學

## 交流論文

☆ · ☆ · ☆

武汉大学数学系

一九八八·十一·

# 湖北省数学学会
# 88年度函数论年会（咸宁）

武 汉 大 学 交 流 论 文

一 九 八 八 年 十 一 月

# 目　　录

# 有关带平移的奇异积分方程介绍

路见可　　杜金元

（武汉大学数学系）

## §1　问题提出

我们打算讲的问题源于路见可在平面弹性理论研究中的一个实际问题。本文拟把问题的数学理论作一简介。对实际问题进行提炼，路见可得到下面的一类奇异积分方程。

$$(1)\quad a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{c_{k,j}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-\alpha_j)^k}$$

$$-\sum_{k,j=1}^{n}\frac{d_{k,j}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t-\beta_j)^k}d\tau=f(t),$$

$$-\infty<t<+\infty$$

当然，原始实际问题派生的数学模型远比(1)复杂，其中还应该包括未知函数的相应共轭函数项。但我们选择了从(1)开始研究，以便从中找出最为基本的东西。

方程(1)中，$a$，$b$，$c_{k,j}$，$d_{k,j}$ 为一些给定的常数，并且满足正则条件

$$a^2-b^2\neq 0;$$

$\alpha_j, \beta_j$ 也是给定的常数，且

$$\operatorname{Im}\alpha_j>0,\ \operatorname{Im}\beta_j<0,$$

分别称为上、下平移；函数 $f\in\hat{H}$；我们要在 $\hat{H}$ 类〔1〕中求解 $\varphi$。此时称方程(1)为 $\hat{H}$ 上的带平移（$\alpha_j, \beta_j$）的奇异积分方程。

## §2　简化处理

为方便计，以下我们用符号 $\int$ 缩写 $\int_{-\infty}^{+\infty}$。

引入函数类 $\hat{H}$ 的子类 $\hat{H}_0$，即

$$\hat{H}_0=\{f \mid f\in\hat{H},\ 且 f(\infty)=0\}.$$

如果(1)中 $f\in\hat{H}_0$，而要求在 $\hat{H}_0$ 中求解 $\varphi$，那么我们就称(1)是 $\hat{H}_0$ 上的带平移的奇异积分方程。

记数　$r=a+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}(c_{k,j}-d_{k,j})$

现在我们有下面结果

（i）　$r\neq 0$，那么 $\hat{H}$ 上的方程(1)与 $\hat{H}_0$ 上的方程

$$(2)\quad a\varphi_0(t)+\frac{b}{\pi i}\int\frac{\varphi_0(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{c_{k,j}}{2\pi i}\int\frac{\varphi_0(\tau)}{(\tau-t-\alpha_j)^k}d\tau$$

$$-\sum_{k,j=1}^{n}\frac{d_{k,j}}{2\pi i}\int\frac{\varphi_0(\tau)}{(\tau-t-\beta_j)^k}d\tau=f(t)-f(\infty),$$

$$-\infty<t<+\infty$$

同时可解或否，且可解时，它们的解（集）之间有下面关系

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\frac{1}{r}f(\infty)$$

(ii) 若 $r=0$，那么 $\hat{H}$ 上的方程(1)可解的必要条件为 $f(\infty)=0$，当此条件满足时，$\hat{H}$ 上的方程(1)与 $\hat{H}_0$ 上的方程(2)同时可解或否，且可解时，它们的解之间有关系

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+C$$

C为任意常数。

所以，方程(1)在 $\hat{H}_0$ 上考虑才是本质的。以下我们就始终认为方程(1)是 $\hat{H}_0$ 上的带平移的奇异积分方程，将会看到，这个简化能为我们的研究带来关键性的作用，这种简化是路见可提出来的。

## §3 方法大意

在这个方向上处理这一问题的第一次尝试是路见可的论文[2]，他的思想相当简捷。

记算子

$$(A\varphi)(t)=a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)}d\tau$$

这是(1)的特征部分。显然，其逆算子为

$$(Bf)(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{a^2-b^2}\frac{1}{\pi i}\int\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

用算子B作用(1)两边便得

$$(3)\quad \left[I-\sum_{k,j=1}^{n}\left(\lambda_{k,j}K_{k,j}^{\alpha}-\mu_{k,j}K_{k,j}^{\beta}\right)\right]\varphi=Bf$$

其中算子

$$(K_{k,j}^{\alpha}\varphi)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t-\alpha_j)^k}d\tau,$$

$$(K_{k,j}^{\beta}\varphi)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t-\beta_j)^k}d\tau.$$

I为恒等算子，而

$$\lambda_{k,j}=-\frac{c_{k,j}}{a+b},\quad \mu_{k,j}=-\frac{d_{k,j}}{a-b}.$$

这是一个Fredholm方程。略见可利用解析函数的边值理论实际计算了这个方程的叠核，从而求解这个方程。我们用带一个上平移的方程来示范一下这种叠核计算方法。

方程

$$(4)\quad a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{c}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t-\alpha}d\tau=f(t),$$

$$-\infty<t<+\infty$$

经算子B作用得

$$(5)\quad \varphi(t)-\lambda\int K(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau=Bf$$

其中$\lambda=-\dfrac{c}{a+b}$，$k(\tau,t)=\dfrac{1}{2\pi i(\tau-t-\alpha)}$。

利用归纳法经简单计算得叠核

$$K_n(\tau,t)=\frac{1}{2\pi i(\tau-t-n\alpha)},\quad (n=1,2,\cdots),$$

于是

$$\int k_n(\tau,t)(Bf)(\tau)d\tau=\frac{1}{a+b}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\tau)}{\tau-t-n\alpha}d\tau.$$

因此，当$|\lambda|<1$时，(4)或(5)的解是

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{a^2-b^2}\frac{1}{\pi i}\int\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{a+b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2\pi i}\int\frac{f(\tau)}{\tau-t-n\alpha}d\tau \tag{6}$$

很清楚，上述方法依赖于Neumann级数的一致收敛性。但须注意，要彻底弄清Neumann级数的（一致）收敛范围并不是一件易事，多个平移时将面临多重级数，更为困难。另外应注意，Neumann级数一致收敛（严格讲还要在$H_0$中）决定方程可解，但发散并不意味方程无解。因此，在$|\lambda|\geqslant 1$时，我们目前难于获知什么。尽管如此，但上面却给了一种明确的启示，就是设法把问题转成考虑某些类型级数的收敛性，借以给出方程的解来。在路见可的简短演讲之后，随后

的工作正是遵循这一思想有了进展。

杜金元提出了一种基于正交投影的方法〔3〕。

按照边值理论中惯用的方法，引入奇异积分算子和正交投影算子如下：

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad -\infty<t<+\infty,$$

$$(s\varphi)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad \operatorname{Im}z\neq 0,$$

$$(S^{+}\varphi)(z)=\begin{cases}(s\varphi)(z), & \operatorname{Im}z>0,\\ \frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2}(S\varphi)(t), & z=t,\ \operatorname{Im}t=0,\end{cases}$$

$$(S^{-}\varphi)(z)=\begin{cases}(s\varphi)(z), & \operatorname{Im}z<0,\\ -\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2}(S\varphi)(t), & z=t,\ \operatorname{Im}t=0.\end{cases}$$

另外引入平移算子和微分算子

$$(T_{\alpha_j}f)(t)=f(t+\alpha_j),$$

$$(T_{\beta_j}f)(t)=f(t+\beta_j),$$

$$Df=\frac{df}{dt}$$

现在方程(1)改写成

$$(7)\quad (a+b)(S^{+}\varphi)(t)-(a-b)(S^{-}\varphi)(t)+\sum_{k,j=1}^{n}c_{k,j}$$

$$(D^kT_{\alpha_j}S^+\varphi)(t)-\sum_{k,j=1}^{n} d_{k,j}(D^kT_{\beta_j}S^-\varphi)(t)$$

$$=f(t)\ ,\ -\infty<t<+\infty$$

再引入空间

$A^+\hat{H}_0=\{f\mid f$在$\mathrm{Im}z>0$解析，在$\mathrm{Im}z\geqslant 0$上$\in\hat{H}_0\}$，

$A^-\hat{H}_0=\{f\mid f$在$\mathrm{Im}z<0$解析，在$\mathrm{Im}z\leqslant 0$上$\in\hat{H}_0\}$。

那么(7)投影到$A^+\hat{H}_0$和$A^-\hat{H}_0$上立即成为两个独立的方程

$$(8)\quad (S^+\varphi)(z)=\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\lambda_{k,j}}{(k-1)}(D^kT_{\alpha_j}S^+\varphi)(z)+\frac{1}{a+b}$$

$$(S^+f)(z)\ ,\ \mathrm{Im}z\geqslant 0,$$

$$(9)\quad (S^-\varphi)(z)=\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\mu_{k,j}}{(k-1)}(D^kT_{\beta_j}S^-\varphi)(z)+\frac{1}{a-b}$$

$$(S^-f)(z)\ ,\ \mathrm{Im}z\leqslant 0,$$

显然求解(1)成为分别求解$A^+\hat{H}_0$和$A^-\hat{H}_0$上的问题(8)和(9)。这两者具有类似的形式，因而只须对(8)进行研究。

为了明晰陈述下面的思想，我们把上面的过程还是装配到方程(4)上。那么(8)和(9)成为

$$(10)\quad \Phi^+(z)=\lambda(T_\alpha\Phi^+)(z)+\frac{1}{a+b}(S^+f)(z)\ ,\ \mathrm{Im}z\geqslant 0$$

(11) $\Phi^-(z)=\frac{1}{a-b}S^- f(z)$ ， $I_m z\leqslant 0$，

其中 $\Phi^\pm(z)=S^\pm\varphi(z)$。

(11)无须求解，而(10)利用逐次代入便是

(12) $\Phi^+(z)=\frac{1}{a+b}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j(T_\alpha^j S^+ f)(z)+\lambda^{n+1}(T_\alpha^{n+1}\Phi^+)(z)$

从(12)显然可知出 $|\lambda|<1$ 时，(10)只有唯一解

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{a+b}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j(T_\alpha^j S^+ f)(z)$$

以上与叠核计算方法异曲同工。

当 $\lambda=e^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$，(10)如可解，也只能有唯一解

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{a+b}\sum_{j=0}^{\infty}e^{ij\theta}(T_\alpha^j S^+ f)(z)$$

可解条件应是上面级数在 $I_m z\geqslant 0$ 上一致收敛且 $\in A+\hat{H}_0$。使用一点技巧便可证得 $\theta\neq 0$ 时，上面可解条件确实满足。而当 $\lambda=1$ 时，上面可解条件是本质的，因为易于举出例子：$f(t)=\frac{1}{t+i}$，便知可解条件不满足。

$|\lambda|>1$ 时，需要引入下面奇异算子和投影算子：

$$(Lf)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-it_0\tau}f(\tau)}{\tau-z}d\tau \quad , \quad I_m z\neq 0 \quad ,$$

$$(Lf)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{e^{-it_0\tau}f(t)}{\tau-t}\,d\tau\ ,\quad I_m t=0\ ,$$

$$(L^+f)(z)=\begin{cases}(Lf)(z), & I_m z>0,\\ \frac{1}{2}e^{-it_0t}f(t)-\frac{1}{2}(Lf)(t)\ , & z=t\ ,\\ & I_m t=0\end{cases}$$

$$(L^-f)(z)=\begin{cases}(Lf)(z)\ , & I_m z<0,\\ -\frac{1}{2}e^{-it_0t}f(t)+\frac{1}{2}(Lf)(t)\ , & z=t\ ,\\ & I_m t=0\ .\end{cases}$$

以上算子具有丰富而漂亮的性质。利用这些性质，取 $t_0=\lambda_0=\frac{\ln|\lambda|}{I_m\alpha}$（可证 $\lambda=e^{-i\lambda_0\alpha}e^{i\theta}$ ，$0\leqslant\theta<2\pi$），用算子 $L^+$，$T_{-\alpha}L^-$ 作用(9)两边得

$$W^+(z)=e^{i\theta}(T_\alpha W^+)(z)+\frac{1}{a+b}(L^+S^+f)(z),\ I_m z\geqslant 0 \tag{13}$$

$$W^-(z)=e^{-i\theta}(T_{-\alpha}W^-)(z)-\frac{e^{-i\theta}}{a+b}(T_{-\alpha}L^-S^+f)(z), \tag{14}$$

$$I_m z\leqslant 0\ .$$

求解问题(10)等价于求解(13)和(14)，确切地说，若(11)有解 $\Phi^+$，那么(13)和(14)分别有解 $L^+\Phi^+$，$L^-\Phi^+$，反之 $W^+(z)$，$W^-(z)$ 分为(13)和(15)的解，

那么$\Phi^{+}(t)=W^{+}(t)-W^{-}(t)$是$A+H_0$类函数（记为$\Phi^{+}(z)$）的边值，且$\Phi^{+}(z)$是(10)的解。

显然(13)和(14)又是平行的，而(13)就是一个新的(10)，且此时相当于(10)中$\lambda=e^{i\theta}$，这已解决。

现在我们可以看出，可解条件的λ集是

$$S=\{\lambda \mid \lambda=e^{-i\lambda_0\alpha},\lambda_0\geqslant 0\},$$

这个集我们称为方程(4)的奇异集，它是从$\lambda=1$出发的一条螺旋线。除此之外，称为正规集，方程(4)永远唯一可解。

以上关于$|\lambda|>1$的讨论曾受到我们的一位研究生许永甲的工作所启发。这位研究生同时也借鉴了前面两种方法的核心思想，提出了一种基于Fourier变换的解决方法〔4〕。

用F，$F^{-1}$分别表示Fourier变换及其逆，符号*代表卷积，他引入下面记号

$$f^{*}g=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-}(f)*g$$

那么方程(5)是

$$(15)\qquad [I-\lambda(e_{+}^{i\alpha t})^{*}]\varphi=Bf$$

而算子

$$I-\lambda(e_{+}^{i\alpha t})^{*}=(1-\lambda e_{+}^{i\alpha t})^{*},$$

于是立即当 $\lambda\in S$ 时，便知

$$[I-\lambda(e_{+}^{i\alpha t})^{*}]^{-1}=\left(1+\frac{\lambda e_{+}^{-i\alpha t}}{1-\lambda e_{+}^{-i\alpha t}}\right)^{*}$$

从而当 $\lambda\in S$ 时方程(4)有唯一解

$$\varphi=Bf+\lambda\left(\frac{e_{+}^{-i\alpha t}}{1-\lambda e^{-i\alpha t}}\right)^{*}Bf \tag{16}$$

对于S中的λ，许永甲的方法也给出了并非永远有解的实例。但是该法有缺陷，就是在λ＝1时只是给出可解的必要条件，而不是给出可解条件（充要条件），对于奇异集中的其余λ，虽然给出了可解条件（在多个平移时亦未给出），但条件的检验不胜其繁，难于应用。此外，(16)可以表示成级数的形式，但对于一般情形，即多个平移的情形，则由Fourier变换表示的类似函数则没有找到级数展开方式，这对于实用亦有不便。

Fourier变换的方法有着一个很大的优点，它给出了正规集中的一种统一处理。因而启示我们用正交投影的方法去寻求|λ|＞1情况下的解法，实际上沿同样的路子也可把叠核计算法扩展到|λ|＞1的情况。此外，如果解仅用积分表示（当然涉及Fourier变换），那么Fourier变换的方法在一个平移和多个平移各种情况，其解的表示是统一的，而正交投影在此就显出有缺点，因为在多个位移时，级数表示（多重级数或项很复杂的级数）及讨论相当费力。

## §4 主要结果

用$\lambda$表示矩阵$\{\lambda_{k,j}\}$，用$\mu$表示矩阵$\{\mu_{k,j}\}$，引入函数

$$D_{\alpha,\lambda}(t)=1-\sum_{k,j=1}^{n}\lambda_{k,j}\frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!}e^{i\alpha_j t},$$

$$D_{\beta,\mu}(t)=1-\sum_{k,j=1}^{n}\mu_{k,j}\frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!}e^{i\beta_j t}.$$

记集合

$$M=\{(\lambda,\mu)\mid D_{\alpha,\lambda}(t)\neq 0,\ \forall t\geqslant 0;\ D_{\beta,\mu}(t)\neq 0,\ \forall t\leqslant 0\},$$

称为方程(1)的正规集。

记集合

$S=\{(\lambda,\mu)\mid \exists t_0\geqslant 0$使$D_{\alpha\lambda}(t_0)=0$，或$\exists t_0\leqslant 0$使$D_{\beta\mu}(t_0)=0\}$称为方程(1)的奇点集。

我们的主要结果是：

(i) 若$(\lambda,\mu)\in M$，那么方程(1)有唯一解，

(ii) 若$(\lambda,\mu)\in S$，那么存在函数$f$使(1)无解。

关于(i)，我们实际可以写出解的级数形式来。比方对于问题(8)，记$P=\sum_{k,j}^{n}\lambda_{k,j}D^{k}T_{\alpha_j}$，那么显然若$\exists n$，使$\|P^n\|<1$时，便知

$$S^{+}\varphi(z)=\frac{1}{a+b}\sum_{n=0}^{\infty}(P^{n}S^{+}f)(z)$$

关于结果（ii），我们实际上也可以给出可解条件，可解时（唯一的）解的级数形式，以及不满足可解条件的各种实例。

本问题在Lp空间上也可以有相似结果。

最近，路见可还讨论了类似的方程组问题，并把它应用于求解未知函数带共轭的方程〔5〕。

## §5 若干问题

我们所介绍的问题就其发展而言具有广阔的前景。最为直接的推广是把(1)中 $a$、$b$、$c_{k,j}$、$d_{k,j}$一般化为 $\hat{H}$ 类似函数。

在这种情况下，若对 $a$、$b$、$c_{k,j}$、$d_{k,j}$ 加以适当限制，那么正交投影方法仍然有效。

例如对方程(4)，当 $a$、$b$、$C\in A^{+}\hat{H}$，那么可以改写成

$$\frac{a+b}{a-b}(S^{+}\varphi)(t)-(S^{-}\varphi)(\tau)-\lambda(S^{-}\varphi)(t+\alpha)$$

$$=S^{+}\left(\frac{f}{a-b}\right)(t)-S^{-}\left(\frac{f}{a-b}\right)(t),$$

以下当 $a(t)-b(t)$ 无零点时，可以完全平行于前面我们已经介绍的方法去作。当 $a-b$ 有零点时，将会出现许多不同的特点。我们在这方面也获得了一些初步结果，但有待于进一步精确化。

最后提及，若 $a$、$b$、$c_{k,j}$、$d_{k,j}$ 仅是 $H$ 类函数，那么利用正

交投影方法求解平移的奇异积分方程将导致非线性的边值问题，这也应该是一个十分有兴趣的研究方向。另外，放弃直接求解，在一般情形下对方程的Noether理论进行讨论等等，这些同样是值得探讨的课题。

## 参 考 文 献

〔1〕 路见可，解析函数边值问题，上海科技出版社，1987。

〔2〕 路见可，某些带平移的奇异积分方程（待发表）。

〔3〕 杜金元，一类带平移的奇异积分方程（待发表）。

〔4〕 许永甲，直线上一类带平移的奇异积分方程的解，武汉大学八四届硕士生毕业论文。

〔5〕 路见可，带复平移的奇异积分方程组（待发表）。