高等學校教學用書

有限差計算

上卷

А. О. ГЕЛЬФОНД 著
劉 紹 祖 譯

高等教育出版社

高等学校教学用書

有限差計算

下卷

A. O. 蓋尔芬德著

高等教育出版社

一九五六年 五月廿 售

定價 ¥0.83

高等學校教學用書

有限差計算

上卷

A. O. 蓋爾芬德著
劉紹祖譯

高等教育出版社

高等学校教学用書

有限差計算

下卷

A. O. 蓋尔芬德著
刘紹祖譯
胡欽訓校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）在1952年出版的蓋爾芬德(А. О. Гельфонд)著“有限差計算”(Исчисление конечных разностей)一書譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學物理數學系和物理工程系的教學參考書。

中譯本分上下兩卷出版，此爲上卷，包括插補問題及牛頓級數兩章。

有 限 差 計 算

上 卷

書號248(課226)

蓋 爾 芬 德 著

劉 紹 祖 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號〕

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通菴路一九〇號

開本850×1168 1/32　印張6 6/16　字數 158,000

一九五五年二月上海第一版　印數 1—4,000

一九五五年二月上海第一次印刷　定價 ¥12,000

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）在1952年出版的蓋爾芬德（А. О. Гельфонд）著“有限差計算（Исчисление конечных разностей）”一書譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學物理數學系和物理工程系的教學參考書。

中譯本分上下兩卷出版，此爲下卷，內容包括“整函數的構成”、“函數的求和問題”、“有限差方程式”各章，由劉紹祖譯，胡欽訓校。

有　限　差　計　算

下　卷

A. O. 蓋尔芬德著

刘　紹　祖　譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號549（課483）　開本850×1168 1/32　印張6 6/16　字數160,000

一九五六年三月上海第一版

一九五六年三月上海第一次印刷

印數1—3,000　　定價（7）¥0.83

序　言

有限差理論對於包括數值積分法和微分方程近似解法在內的近似計算，以及對於實變數和複變數函數結構論、概率論和數論具有巨大的價值。有限差理論就其現代的問題來說，最接近於函數結構論，在很大程度上，它並且和函數結構論合流了。在歷史上，實變數域內的有限差理論發展的根本路線是由勒·歐拉，蒲·勒·契伯雪夫，阿·阿·馬爾柯夫等人的著作所確立的，而在我們時代，則是由斯·恩·伯恩斯坦及其學派的著作確立的。過去二十年內，這一門學問在我國獲得了巨大的發展，並在複變數域內也有了研究。

提供給讀者的這本書，是在一九三六年版"有限差"一書第一部份的基礎上，經過修訂並補充分了許多章後寫成的。在新增各章內，主要對於複變數有限差的問題及其在函數論和數論兩方面的應用問題加以闡述。就實變數域內函數結構論來說，有大量的祖國學者的文獻可供我們很好地掌握它，例如，伊·勃·那湯松的"函數結構論"，但在複變數域內的著作卻分散於各種文章和書籍中，並且出現在我國文獻中的還很少。寫本書時，曾參考過下列有限差方面的教科書：阿·馬爾柯夫"有限差計算"，德·謝利瓦諾夫"有限差計算教程"和聶爾路特"有限差計算"(德文)，從它們之中曾採用了一系列的問題和例題。本書新的各章主要闡述當代雜誌上的文章。對於大學的有限差教程，可以採用第一章，或是除§6及§7內某些目以外的部份，經過選擇而得的第二章個別部份，第四章和去掉末後一節的第五章。本書其餘部份可以用來選擇寫畢業論文及學位論文時的題材。

最後，因為本書正文並未說明，我們想要指出：第一章§6及§7第四目的結果，第二章§3內的定理四、五、六、八和九，第三章除定理一以外的全部定理，以及第五章§7的全部定理都是屬於本書著者的。

上卷目錄

下 卷 目 錄

有限差計算

引論　有限差理論的問題提法

1. 插補問題　爲了要更明顯地提出有限差理論的一個基本問題，我們來研究下面的例子。

假定在不知道依憑關係 $y=f(x)$ 的解析表示式時，對於自變數 x 在區間 (a, b) 內的某些特定値，我們有確定函數 $f(x)$ 値的可能性。設有點 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，在這些點處的函數値，我們知道是 $y_0=f(x_0), \cdots\cdots, y_n=f(x_n)$。用幾何語言來說，就是我們有位於曲線 $y=f(x)$ 上的分立點列 $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$。

問題在於要求解析表示式 $y=F(x)$，使它能準確地或近似地表示函數 $y=f(x)$ 並且適合條件

$$F(x_0)=y_0, \quad F(x_1)=y_1, \cdots, \quad F(x_n)=y_n。$$

這樣的問題當然沒有唯一的解，因爲通過 $n+1$ 個點 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 可以引出無限多條曲線，縱使假定這些曲線從解析意義上講是作得足夠完善的，它們也一樣有無限多條。

但是常有必要引出通過已知點的任意一條曲線，足夠光滑而且沒有很多的極大和極小。在這種情形下，充分簡單的解析表示式就起着巨大作用。例如，我們有時希望得到多項式的或多項式同指數函數組合而成的解析表示式。

解析表示式的構成問題是有限差理論的基本問題之一——插補問題。我們可以把它表述爲：如果關於一個函數，僅祇知道自變數數値和函數數値分立點列處的對應關係，求構成函數依憑關係的近似解析表示式。

在某些情形下，當關於所求函數依憑關係的特點知道得較多時，我們就能構成 $f(x)$ 的解析表示式。

例如，若我們知道 $f(x)$ 是次數不高於 n 的多項式，即

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n。$$

那麼，祇要知道 $f(x)$ 在 $n+1$ 個不同點 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 處的值，便可以永遠而且唯一地確定函數的係數，因爲方程組

$$\begin{aligned}
&a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=y_0,\\
&a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\cdots+a_n=y_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_0x_n^n+a_1x_n^{n-1}+\cdots+a_n=y_n,
\end{aligned}$$

的線性行列式（對於係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的）是凡傑爾蒙德（Вандермонд）行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & 1\\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}=\prod_{i>j}(x_i-x_j),$$

它對於彼此不同的 x_i 不等於零。a_k 的表示式是

$$a_k=\frac{\begin{vmatrix} x_0^n & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & x_0^{k-1} & \cdots & 1\\ x_1^n & \cdots & x_1^{k+1} & y_1 & x_1^{k-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n^n & \cdots & x_n^{k+1} & y_n & x_n^{k-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}}{D}。$$

在我們的例子中，對於 $f(x)$ 的準確解析表示式的構成是可能的，因爲我們對 $f(x)$ 已經要求很多；次數不高於 n 的多項式事實上是很窄的一類函數。對於插補問題的解決，通常是在關於 $f(x)$ 的更一般的特性的假設下來進行的。

這樣的假設通常是 $f(x)$ 的解析性或 $f(x)$ 任意高階導數的存在。

在給所求函數以如此的限制下，插補問題的解一般是所求函數的近似解析表示式。在這種情形下，就產生了關於近似式特性及其準確

度的重要問題。

2. 函數求和問題及有限差方程式　我們來看有限差理論的另外一些問題。以如下方式敍述出來的函數求和問題是很重要的問題：對於變數 x 的整值，函數 $f(x)$ 由某一解析表示式給定，求有限形式

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

的準確和或近似和。

這問題的很多特殊情形在分析學內是衆所週知的。事實上，公式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

$$\ln n!=\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n\approx\ln\sqrt{2\pi n}+n(\ln n-1)$$

不是別的，而是對於函數

$$f(x)=x,\quad f(x)=x^2,\quad f(x)=a^x,\quad f(x)=\ln x$$

求和問題的解。

求和問題和另一個問題——有限差方程式解的問題，緊密地連繫着。

在談及有限差方程式解以前，我們當然必須引出有限差概念。

設函數 $y=f(x)$ 對於形狀爲 $x_n=a+nh$(a, h 是某兩個定數，n 是任意整數)的一切 x 值是確定的。我們能夠作成類似於 $f(x)$ 的導數的一個算式

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f[a+(n+1)h]-f(a+nh)}{h}。$$

這個表示式等於通過點(x_n, y_n)和(x_{n+1}, y_{n+1})之直線的傾角的正切。

表示式 $f[a+h(n+1)]-f(a+nh)$ 我們用 $\Delta_h f(x_n)$ 表示，並稱爲函

數 $f(x)$在點 x_n 處的第一階有限差。一階有限差能用來構成二階有限差等等：

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x),$$
$$\Delta_h^{(2)} f(x)=\Delta_h f(x+h)-\Delta_h f(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_h^{(k)} f(x)=\Delta_h^{(k-1)} f(x+h)-\Delta_h^{(k-1)} f(x)。$$

可用如下方程提出有限差方程式解的問題。

給了關係式

$$F[x, f(x), \Delta_h f(x), \Delta_h^{(2)} f(x), \cdots, \Delta_h^{(k)} f(x)]=0,$$

求使此方程式變爲恆等式的函數 $f(x)$。

方程式

$$\Delta f(x)=\varphi(x) \quad [\Delta f(x)=\Delta_1 f(x)=f(x+1)-f(x)],$$

可以作爲有限差方程式最簡單的例子,其中 x 可以取值 $0, 1, 2, \cdots$。

從形式上看,函數 $f(x)=\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(x-1)$ 是這個方程式的解,就是說,我們看出,這方程式的解和函數 $\varphi(x)$ 求和問題的解是等價的。

3. 複變數解析函數的有限差理論的問題提法 作爲古典分析學一部分的有限差理論在分析學的近似方法發展中——在近似積分法,在微分方程近似解法及其他問題中——起着巨大作用。它同函數近似值的一般理論密切地連繫着,後者在現代被稱爲函數結構論。在過去幾十年內,有限差理論的另一思潮得到了有力的發展。這種思潮同解析函數論緊密地連繫着,並且在解析函數論和數論兩方面有了應用。在本書內,除有關有限差理論及與其有密切關係的函數結構論的主要的古典結果外,也包含有一系列新的方法和結果的應用,這些方法和結果是屬於前述有限差理論第二種思潮的。這第二種思潮基本上提出並解決前面談到的對於解析函數而言有限差問題。在這裏,與古典問題比較起來是新產生的那些問題,同所論函數的解析性有關。例如,假定

我們考慮這樣的一類整函數,它們的增減性是以確定的方式限制着,那麽,我們自然會提出問題:如何按照函數在複變平面內點敍列處的值,來尋找這類中的函數,而複變平面假定僅有一個極限點在無窮遠處。這時,如同我們將在後來所見到的那樣,必然要加限制在所論整函數的增減性上面去;這種限制同插補基點敍列的稠密度有關。

當考察任一類解析函數的有限差問題的解時,與古典問題比較作爲產生於有限差理論內的新問題的另一個例子,可以考慮方程式$f(x+1)=f(x)$解的問題。這方程式有彼此線性無關的可數無限多個整解析解。是否能利用這方程式的特解表出它的任一解析解,以及如何使這個表示法得以實現的問題自然就產生了。

最後,利用解析函數論內的插補法,可以處理許多數值問題的解,主要是,對於變元的代數值,解析函數值的算術性質。這些方法在證明數e和π爲超越數的例子中將被指出。

因爲本書基本上祇闡述複變數域內有限差的問題,所以通常跟實變數域內有限差理論關聯着的許多問題,例如,實變數域內的矩量問題,積分論等等,不再提到。