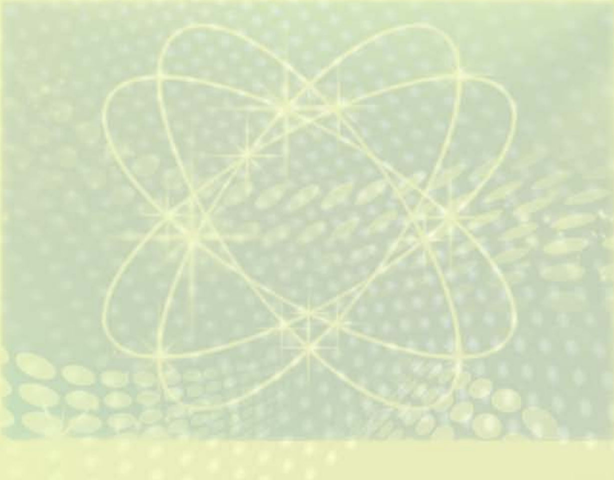
概率论与数理统计简明教程



西北工业大学出版社

概率论与数理统计简明教程

西北工业大学出版社

内容提要

本书是一本高等院校工科、经济管理等专业概率论与数理统计课程教材。根据教育部高等学校数学与统计教学指导委员会制定的“概率论与数理统计教学基本要求”,参考全国硕士研究生入学数学考试大纲编写。本书内容主要包括:随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验等。本书内容选取合理、难易适度、概念清晰、叙述简练、便于教学,例题、习题精练新颖,题目形式多样,可供不同层次要求学生选用。

本书可作为高等院校工科、经济管理等专业的概率统计课程教材或教学参考书,也可供工程技术人员、科技工作者参考。

前　　言

概率论与数理统计是高等院校一门重要的工程数学基础课。为适应当前大学教育大众化趋势，结合数学教学改革实际需要，针对一般院校工科、经济管理等专业学生的特点，根据教育部高等学校数学与统计教学指导委员会制定的"概率论与数理统计教学基本要求"，参考全国硕士研究生入学数学考试大纲，在西安石油大学多年教学讲义的基础上，我们编写了这本《概率论与数理统计简明教程》教材。

本书突出的特点是实用简明，方便教学。本书内容包括八章：随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验等。本书章节内容选取合理、难易适中、语言准确、条理清晰，易于学生阅读，略去非重点内容的定理证明和个别繁复数学推导，避免内容偏多偏深，侧重培养学生掌握处理随机现象的基本思想与方法，提高学生的数学素质和应用能力。本书选题精炼，例题、习题配置合理，形式多样，选题新颖，难易适度，可供不同层次要求学生选用。

本书讲授约需54学时（含习题课），每周安排4学时，每学期14周可完成教学内容，符合教学实际。对于学时较少的专业，可选择前5章讲授。

本书由长期从事工程数学教学的老师编写，由党林立和文杰担任主编，并负责统稿、修改、定稿，参加编写的还有高楠、翟亮亮、杜建丽、付瑞琴、郝上京、李毅君、李美丽、魏朝颖、安刚、贺晓丽，最后由宋巨龙教授对全书进行了审定。

本书为西安石油大学教材建设资金的资助项目教材。由于水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎广大读者对本书提出宝贵意见，以便进一步修改完善。

编　者

2010年12月

目　　录

第一章　随机事件与概率
第一节　随机事件与样本空间
第二节　随机事件的关系与运算
第三节　随机事件的概率
第四节　概率的公理与性质
第五节　条件概率与乘法公式
第六节　全概率公式与逆概率公式
第七节　随机事件的独立性
习题一
第二章　随机变量及其分布
第一节　离散型随机变量及其分布律
第二节　随机变量的分布函数
第三节　连续型随机变量及其概率密度
第四节　几种常见的连续型随机变量
第五节　随机变量函数的分布
习题二
第三章　随机向量及其分布
第一节　二维随机向量
第二节　二维离散型随机向量
第三节　二维连续型随机向量
第四节　随机变量的独立性
第五节　随机向量函数的分布
习题三

第四章　随机变量的数字特征
第一节　随机变量的数学期望
第二节　随机变量的方差
第三节　协方差与相关系数
第四节　随机变量的矩与协方差矩阵
习题四
第五章　大数定律和中心极限定理
第一节　大数定律
第二节　中心极限定理
习题五
第六章　抽样分布
第一节　数理统计的基本概念
第二节　抽样分布
习题六
第七章　参数估计
第一节　点估计
第二节　估计量的评价标准
第三节　单个正态总体的区间估计
第四节　两个正态总体的区间估计
习题七
第八章　假设检验
第一节　假设检验的基本思想
第二节　单个正态总体均值的假设检验
第三节　两个正态总体均值差的假设检验
第四节　单个正态总体方差的假设检验
第五节　两个正态总体方差比的假设检验
习题八
附录
习题答案
参考文献

第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件与样本空间

一、随机现象

在人们的实践活动中，所遇到的现象大体可分为两类：确定性现象和随机现象.

在一定的条件下，必然发生的现象称为确定性现象. 例如，一枚硬币向上抛后必然下降；导线通电后，必定会发热；在一个标准大气压下，水加热到100℃会沸腾等.

在一定的条件下，可能发生，也可能不发生的现象称为随机现象. 例如，抛出的硬币，着地后可能正面向上，也可能反面向上；射击比赛命中的环数；明天股票指数的涨落等这些现象都具有不确定性，事先无法准确预言，似乎无规律可循，但在相同条件下，经过大量重复观测，其结果总是呈现某种规律性.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，在自然科学、工程技术、社会经济等领域有着广泛的应用.

二、随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，我们进行试验观测，若该试验具有以下特点：

(1)试验可以在相同条件下重复进行.

(2)每次试验的所有可能结果都是明确可知的,且不止一个.

(3)每次试验前不能准确预知哪个结果出现.

则称这种试验为随机试验,简称试验,通常用字母 $E,E_1,E_2,\cdots$,表示.

例 1 E_1:抛一枚硬币,观察正面向上或反面向上.

例 2 E_2:掷一颗骰子,观察正面出现的点数.

例 3 E_3:观察某地区夏季暴雨次数.

例 4 E_4:观察某油井无故障工作时间.

三、随机事件

将随机试验的每一个可能结果称为随机事件,简称事件,记作 A,B,C;特别地,不可再分、最基本的结果称为基本事件,记作 ω. 显然,每次试验中必有一个且只有一个基本事件发生.

由若干基本事件复合而成的事件称为复合事件,复合事件发生意味着其包含的某一基本事件发生.

随机事件中有两个特殊情况:

(1)每次试验中都一定会出现的事件称为必然事件,记作 Ω.

(2)每次试验中都一定不会出现的事件称为不可能事件,记作 ϕ.

例 5 掷一颗骰子的可能结果为:$A_i=$"掷出 i 点"$(i=1,2,\cdots,6)$.

这 6 个事件都是基本事件,而事件 $B=$"掷出的点数为偶数"为复合事件.

$C=$"掷出的点数小于等于 6 点"为必然事件,$D=$"掷出的点数大于 6 点"为不可能事件.

四、样本空间

试验的所有基本事件所组成的集合称为样本空间,其中每一个基本事件用 ω 表示,ω 称为样本空间中的样本点,样本空间记作 $\Omega=\{\omega\}$.

在集合论的观点下,基本事件(样本点)可视为集合的元素,任意一事件可视为由基本事件(样本点)组成的集合,样本空间视为全集,因此,便可用集合的关系与运算来研究事件.

例 6 抛一枚硬币观察出现正反面情况,样本空间为

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$$

其中 $\omega_1 =$“正面朝上”，$\omega_2 =$“反面朝上”.

例 7　掷一枚骰子观察出现的点数,样本空间为

$$\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$$

其中 $\omega_i =$“出现 i 点”($i = 1,2,\cdots,6$).

例 8　观察一天内进入某商场的人数,样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots,30,\cdots,n,\cdots\}$$

例 9　考查电视机的寿命,样本空间为

$$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$$

【注】　①样本空间中的元素可以是数也可以不是数;②从样本空间含有样本点的个数来划分,样本空间可以分为有限与无限两类.

第二节　随机事件的关系与运算

一、事件的包含与相等

(1)包含:若事件 A 发生,必导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B(或事件 B 包含事件 A),记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$).

(2)相等:若两事件 A 与 B 相互包含,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

【注】　从集合论的观点看,两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合.

二、事件的运算

(1)和事件:“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件称为 A 与 B 的和事件,记作 $A \cup B$(或 $A + B$).

“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$,简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(2)积事件:“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为 A 与 B 的积事

件,记作 $A \cap B$,简记为 AB .

“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件,记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$,简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3)差事件:若事件 A 发生且 B 不发生,则称为事件 A 与 B 的差事件,记作 $A - B$(或 $A\overline{B}$).

(4)不相容事件:若事件 A 和 B 不能同时发生,即 $AB = \phi$,则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

(5)对立事件:若事件 A 和 B 有且仅有一个发生,即 $AB = \phi$ 且 $A \cup B = \Omega$,则称事件 A 与 B 是对立的.事件 B 为事件 A 的对立事件(或逆事件),记作 $\overline{A}$.

(6)完备事件组:若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足① $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,即 $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$;② $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$ 为必然事件,则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组(或 Ω 的划分).

如图 1.1 所示为几种事件运算的维恩图.

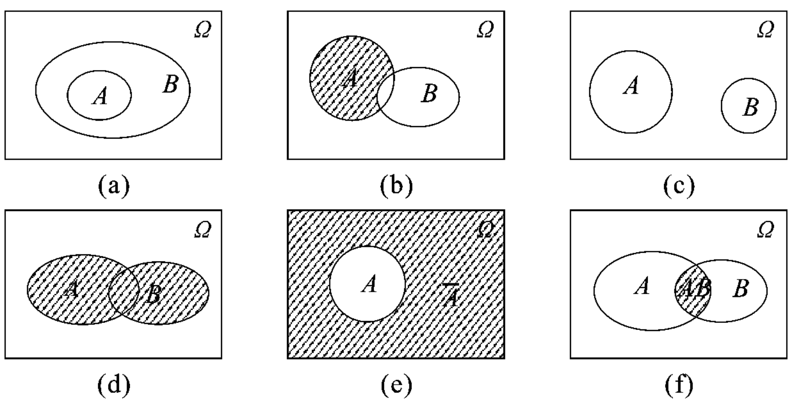


图 1.1 维恩图

(a) $A \subset B$;(b) $A-B$;(c) A与B互不相容;(d) $A \cup B$;(e) $\overline{A}$;(f) $A \cap B$

三、事件的运算规律

事件间的运算满足以下运算规律:

(1)交换律:对任意两个事件 A 和 B ,有

$$A + B = B + A, \qquad AB = BA$$

(2)结合律:对任意事件 A, B, C,有

$$A+(B+C)=(A+B)+C\,,\qquad (AB)C=A(BC)$$

(3)分配律：对任意事件 A,B,C，有

$$A(B+C)=AB+AC$$

(4)德·摩根(De Morgan)律(对偶律)：对任意事件 A 和 B，有

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}\,,\qquad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

以上规律都可推广到任意多个事件的情形.

例 1　设 A,B,C 为任意 3 个事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1)3 个事件中至少一个发生.

(2)没有一个事件发生.

(3)恰有一个事件发生.

(4)至多有两个事件发生(考虑其对立事件).

(5)至少有两个事件发生.

解　(1) $A+B+C$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A+B+C}$

(3) $A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

(4) $(\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C})+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

(5) $(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)+ABC=AB+BC+AC$

第三节　随机事件的概率

一、古典概率

1. 古典概型与古典概率

计算各种随机事件发生的概率是概率论的基本任务之一，我们先讨论一类最简单的随机试验及其事件的概率.

定义 1　若一个试验 E 具有下列两个特征：①试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；②每个基本事件出现的可能性相等，则该试验模型称为古典概型.

定义 2 设古典概型试验 E 的样本空间 Ω 有 n 个样本点，若事件 A 包含其中 m 个样本点，则事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{样本空间}\,\Omega\,\text{所包含的基本事件数}}=\frac{m}{n}$$

并称由上式确定的概率为古典概率.

2．古典概率的计算步骤

(1)确定试验是否为古典概型；

(2)确定试验的样本空间所包含的基本事件数 n ；

(3)确定事件 A 所包含的基本事件数 m.

下面介绍几个经典的古典概率问题.

例 1 (随机抽样问题)一批同型产品共有 N 个，其中有 M 个次品，求：

(1) 从中无放回抽取 n 个，求事件 A_m =“取出的 n 个产品中有 m 个次品”的概率；

(2) 从中有放回抽取 n 个，求事件 B_m =“取出的 n 个产品中有 m 个次品”的概率.

解 (1)对于无放回抽取，设事件 A_m =“取出的 n 个产品中有 m 个次品”，样本空间的基本事件数为 C_N^n，n个产品中m 个次品取自 M 个次品中，则 $n-m$ 个正品取自 $N-M$ 个正品中，A_m 包含的基本事件数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$，于是

$$P(A_m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\quad (m\leqslant \min(n,M))$$

(2)对于有放回抽取，设事件 B_m =“取出的 n 个产品中有 m 个次品”，类似地，有

$$P(B_m)=\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}.$$

【注】 本题结果为常用的随机抽样公式，其概率与抽样方式(有放回或无放回)有关. 在实际问题中，若产品批量很大，而抽取产品数量又很小，通常将无放回抽取当做有放回抽取处理，使问题简化.

例 2 (抽签问题) 袋中有 a 支红签，b 支白签，它们除颜色外无差别，现有 $a+b$ 个人无放回地去抽取，求第 k 个人抽到红签的概率($k\leqslant a+b$).

解 设 A =“第 k 个人抽到红签”，假设这 $a+b$ 支签都不相同(设它们分

别为 $R_1,R_2,\cdots,R_a,W_1,W_2,\cdots,W_b$，让这些人抽完签以后排成一排，相当于把这 $a+b$ 支签排成一排，共有 $(a+b)!$ 种排法. 第 k 个人抽到红签相当于第 k 个位置放的是红签，先在第 k 个位置放一支红签，有 C_a^1 种方法，其余各签随意放，有 $(a+b-1)!$ 种方法，故事件 A 包含 $C_a^1(a+b-1)!$ 个基本事件，而总的抽签方法数有 $(a+b)!$ 种. 于是

$$P(A)=\frac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}\qquad(1\leqslant k\leqslant a+b)$$

【注】 本题结果告诉我们，每个人抽到红签的概率与抽签的先后次序无关，只与红签所占的比率 $\dfrac{a}{a+b}$ 有关，这就说明日常抽签或抓阄的方法是公平的.

例 3 （盒子问题）将 n 个球随机放到 N 个不同的盒子中，每个盒子所放球数不限，试求：

(1)指定的 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的概率 $P(A)$；

(2)恰好有 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的概率 $P(B)$.

解 把每个球分配到 N 个盒子的任意一个中有 N 种可能，所以基本事件的总数为 N^n.

(1)指定的 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的分配方法相当于把 n 个球进行全排列，所以事件 A 包含的基本事件数为 $n!$，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2)恰好有 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的分配法相当于从 N 个盒子中选出 n 个的一个全排列，共有 P_N^n 种方法，即事件 B 包含的基本事件数为 P_N^n，故

$$P(B)=\frac{P_N^n}{N^n}$$

【注】 本题结果可应用于一些典型的古典概率问题，如分房问题，生日问题等.

二、几何概率

1. 几何概型与几何概率

定义 3 若一个试验 E 具有下列两个特征：①每次试验的结果是无限多

个，且样本空间可以用一个有度量的几何区域 Ω 来表示；②每个基本事件出现的可能性相等，则该试验模型称为几何概型.

定义 4 设几何概型的样本空间可以表示成有度量的区域 Ω，事件 A 所对应的几何区域仍记为 A，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}$$

由上式确定的概率称为几何概率.

2. 几何概率的计算

求几何概率的关键是对样本空间 Ω 和事件 A 用图形描述(一般用线段、平面压域或空间图形)，然后计算出相关图形的度量(一般为长度、面积或体积).

例 4 (等车问题)某路公共汽车每隔 5min 发一辆汽车，乘客到达汽车站的时间是随机的，求乘客等车不超过 3min 的概率.

解 设乘客等车的时间为 $xmin$，$A=$“乘客等候不超过 3min”.

则 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

图形描述如图 1.2 所示.

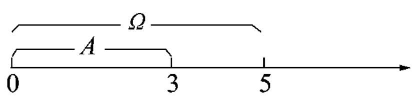


图 1.2 等车问题

所以，$P(A)=\dfrac{3}{5}$.

例 5 (约会问题)两个学生约定周六 8 点到 9 点之间在某公园门口见面，先到者等待 20min 后即可离去，假定他俩在 8 点到 9 点之间到达的时刻是任意的，求他们能会面的概率.

解 设两人到达公园门口的时刻分别为 8 点后 x,y 小时，$A=$“两人能会面”，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x,y<1\}$$

$$A=\{(x,y)\mid 0<x,y<1,\ |x-y|<\frac{1}{3}\}$$

如图 1.3 所示，样本空间 Ω 的度量是正方形的面积，事件 A 的度量是阴影部分的面积，故

$$P(A)=\frac{1-(\frac{2}{3})^2}{1}=\frac{5}{9}$$

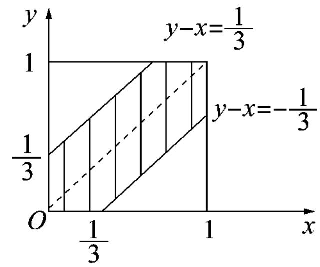


图 1.3　约会问题

例 6　(三角形构成问题)在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解　令被截成的三段线段长度分别为 $x,y,a-x-y$,如图 1.4 所示.

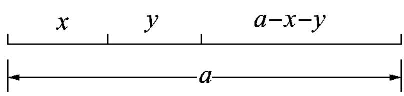


图 1.4　三角形构成问题

设 $A=$"截成的三线段能构成三角形",则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<a-x-y<a\}=$$
$$\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a\}$$
$$A=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a$$
$$x+y>a-x-y,a-x>x,a-y>y\}=$$
$$\{(x,y)\mid x<\frac{a}{2},y<\frac{a}{2},x+y>\frac{a}{2}\}$$

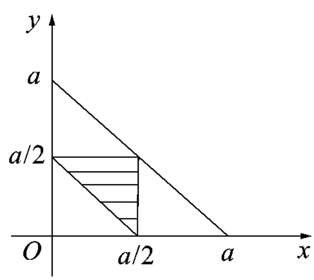


图 1.5　三角形构成问题

故 $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

三、统计概率

1. 随机现象的统计规律性

随机现象有其偶然性的一面,也有其必然性的一面,这种必然性表现在

大量重复试验或观察中呈现出的固有规律性，称为随机现象的统计规律性.

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量重复试验中，事件的发生具有统计规律性，所以应从大量试验出发来进行研究.

2. 频率及其稳定性

定义 5 在 n 次重复试验中，如果事件 A 发生了 m 次，则 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率.

重新来观察掷硬币的试验，观察事件“正面朝上”的频率，当投掷次数 n 比较小时，频率 $\frac{m}{n}$ 是不稳定的，看不出什么规律. 当投掷次数越来越多时，频率 $\frac{m}{n}$ 将呈现出在某个常数附近摆动的明显趋势. 历史上掷硬币试验的一些结果见表 1.1.

表 1.1

试验者	投掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
德·摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

由上表看出，出现正面的频率接近 0.5，并且抛掷次数越多，频率越接近 0.5. 可见，在大量重复试验的情况下，某个事件 A 出现的频率是稳定的，它的数值在某个确定的常数附近摆动. 一般来说，试验的次数越多，事件 A 的频率就越接近该确定的常数.

3. 统计概率

定义 6 在试验条件不变的情况下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一个常数 $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ 附近摆动，则称常数 p 为事件 A

的统计概率，记作 $P(A)$.

【注】 ①数值 p（即事件 A 的概率 $P(A)$）就是在一次试验中对事件 A 发生的可能性大小的数量描述；②事件 A 发生的概率为 p，说明在 n 次试验中，事件 A 发生的次数大约为 np 次.

第四节 概率的公理与性质

一、概率的数学定义

概率是度量一个随机事件发生可能性大小的数值. 苏联数学家柯尔莫哥洛夫 1933 年在他的《概率论基础》一书中第一次给出了概率的定义和一套严密的公理体系. 他的公理化方法成为现代概率论的基础，使概率论成为严谨的数学分支，对概率论的迅速发展起了积极的作用.

定义 1 设某试验的样本空间为 Ω，对其中每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$，如果它满足下列公理：

(1)（非负性）$P(A)\geqslant 0$；

(2)（规范性）$P(\Omega)=1$；

(3)（可列可加性）若 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 两两互不相容，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

【注】 概率 $P(A)$ 可视为定义在样本空间 Ω 上的函数.

二、概率的性质

性质 1 （不可能事件的概率）$P(\phi)=0$.

性质 2 （对立事件的概率）对任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 3 （减法公式）对任意事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$. 特别地，若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

性质 4 （概率的单调性）若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 5 （有界性）对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 6 （加法公式）对任意事件 A,B，有