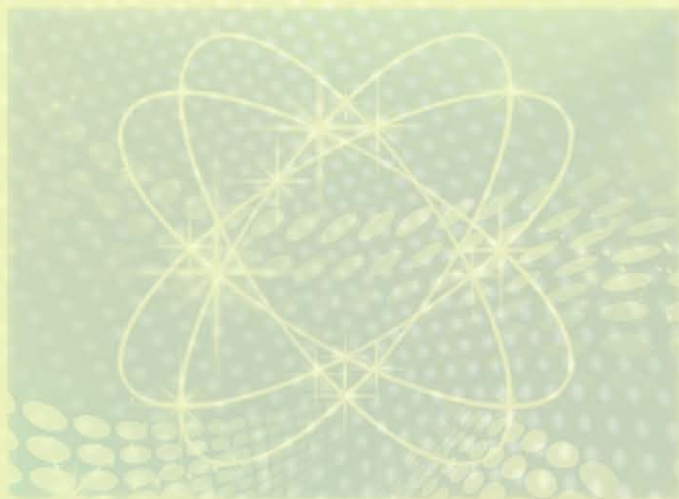


经济数学基础 学习指导

主 编 于伟建

编写者 （以姓氏笔划为序）

于伟建 龙玉华 游亚新



北京理工大学出版社

经济数学基础 学习指导

主 编 于伟建

编写者 (以姓氏笔划为序)

于伟建 龙玉华 游亚新

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学基础学习指导/于伟建主编. —北京: 北京理工大学出版社,
2012. 1

ISBN 978 - 7 - 5640 - 5270 - 6

I. ①经… II. ①于… III. ①经济数学 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. ①F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 229006 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / [http: // www. bitpress. com. cn](http://www.bitpress.com.cn)

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京国马印刷厂

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 7.25

字 数 / 164 千字

版 次 / 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑 / 钟 博

印 数 / 1 ~ 10000 册

责任校对 / 周瑞红

定 价 / 14.00 元

责任印制 / 王美丽

编审委员会

主 任 何建勋

副主任 于伟建

委 员 游亚新 龙玉华 刘 潇

前 言

随着我国经济社会的发展，在管理、决策、经济生活中越来越多地用到数学知识和方法。同时，数学素养也已成为公民基本素养的一部分。经济数学知识和方法就自然而然地成为大学经济管理专业基础课的内容。

高等教育和成人高等教育事业的蓬勃发展，要求教材在内容、知识结构和理论体系上跟上时代的步伐。适合成人教育特点，与成人教育的实际基础相配套的高质量教材的需求尤其迫切。为此，根据教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》，我们编写出版了教材《经济数学基础》。考虑到成人教学的特点和需要，我们又配套编写了《经济数学基础同步学习指导》

全书共六章：第1章 函数，极限与连续（于伟建执笔），第2章 导数与微分（龙玉华执笔），第3章 中值定理与导数的应用（游亚新执笔），第4章 不定积分（龙玉华执笔），第5章 定积分（游亚新执笔），第6章 多元函数微积分（游亚新执笔）。本书编写中，贯彻以学习指导为目的，以必需、够用为度和少而精的原则，在给出每章主要知识点、重点和难点的基础上，把重点放在内容学习指导和典型例题解析方面，教材中的习题仅给出略解，以求使教师易教、学生易学。对工学矛盾突出的成人学生，按此自学也易于掌握。本书与目前已有的经济数学辅导书有很大的不同。

本书的出版获得了广州大学继续教育学院教材出版基金的资助，得到了广州大学领导和北京理工大学出版社的大力支持与帮助，在此一并表示感谢。

由于编者经验和水平所限，书中一定存在缺点和不足，敬请专家和读者不吝指正。

编 者

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
一、本章主要知识点	(1)
二、重点、难点	(1)
三、内容学习指导	(1)
四、典型例题解析	(6)
五、习题略解	(11)
第 2 章 导数与微分	(18)
一、本章主要知识点	(18)
二、重点、难点	(18)
三、内容学习指导	(18)
四、典型例题解析	(20)
五、习题略解	(22)
第 3 章 中值定理与导数的应用	(27)
一、本章主要知识点	(27)
二、重点、难点	(27)
三、内容学习指导	(27)
四、典型例题解析	(33)
五、习题略解	(49)
第 4 章 不定积分	(52)
一、本章主要知识点	(52)
二、重点、难点	(52)
三、内容学习指导	(52)
四、典型例题解析	(55)
五、习题略解	(61)
第 5 章 定积分	(65)
一、本章主要知识点	(65)
二、重点、难点	(65)
三、内容学习指导	(65)
四、典型例题解析	(70)
五、习题略解	(80)
第 6 章 多元函数微积分	(85)
一、本章主要知识点	(85)



二、重点、难点	(85)
三、内容学习指导.....	(85)
四、典型例题解析.....	(93)
五、习题略解	(106)

第1章 函数、极限与连续

一、本章主要知识点

(1) 函数, 分段函数, 复合函数, 基本初等函数, 初等函数, 连续函数, 成本函数, 需求函数, 利润函数, 函数的极限, 无穷小, 无穷大, 无穷小的比较, 间断点及其分类, 初等函数的连续性.

(2) 函数的有界性、单调性, 无穷小的性质, 极限的性质, 有极限函数与无穷小的关系, 无穷小与无穷大的关系, 闭区间上连续函数的性质.

(3) 两个函数相同及判定, 复合函数的分解, 极限的四则运算, 两个重要极限, 复合函数的极限.

二、重点、难点

1. 重点

函数, 分段函数, 函数的有界性, 复合函数的分解, 基本初等函数, 函数的极限, 无穷小, 无穷小的性质, 有极限函数与无穷小的关系, 极限的四则运算, 两个重要极限, 间断点及其分类, 闭区间上连续函数的性质.

2. 难点

复合函数的分解, 无穷小的比较, 两个重要极限, 间断点及其分类.

三、内容学习指导

1.1 函数

1. 函数的概念

学习常量与变量定义, 着重看“注意”中的(1), 理解常量与变量的关系, 熟悉常量与变量的表示.

关于变量的变动区域, 一般常用区间和邻域表示.

区间是指介于某两个实数之间的全体实数, 这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$.

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记做 (a, b) .

$\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记做 $[a, b]$.

$\{x | a \leq x < b\}$ 称为半闭半开区间, 记做 $[a, b)$.

$\{x | a < x \leq b\}$ 称为半开半闭区间, 记做 $(a, b]$.

以上区间都是有限区间. 而 $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ 都是无限区间. 区间两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度. 一般用 I 来泛指区间.

邻域: 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做



该邻域的中心, δ 叫做该邻域的半径. 记做

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 的去心 δ 邻域, 记做 $\overset{0}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{0}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

读教材中例 1、例 2, 了解实际问题中的变量之间存在一个对应关系, 而函数概念正是从这种对应关系中抽象出来的. 读定义 1, 理解构成一个函数的两个要素: 定义域和对应规则, 然后看例 3, 掌握函数值的计算.

函数的表示、函数的定义域及其求法同初等数学, 看懂例 4.

关于两个函数相同见定义 3. 由此而知: 两个函数相同当且仅当它们的定义域相同, 对应规则相同. 仔细看例 5、例 6.

在理解了分段函数及其特点后, 着重来确定分段函数的定义域和分点, 会求函数值.

例如: 设 $f(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ e^x - 1 & , 0 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f(1)$ 及 $f(x)$ 的定义域.

解: $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(1) = e^1 - 1 = e - 1$

$f(x)$ 的定义域: $[-1, 2]$, 分点为 $x = 0$.

看懂例 7.

2. 函数的基本性态

这里着重理解函数的有界性以及两点注意.

函数的单调性、奇偶性和周期性在初等数学里已经学习过, 复习定义 5、定义 6、定义 7. 判断一个函数是奇函数, 还是偶函数, 看例 9、例 10.

3. 复合函数与反函数

重点是理解好复合函数的概念. 看定义 8 后要把握住: 两个函数 $y = f(u)$ 与 $u = \phi(x)$ 能复合成函数 $y = f[\phi(x)]$, 关键是 $u = \phi(x)$ 的值域全部或部分地落在 $y = f(u)$ 的定义域内.

例如: 函数 $u = 1 + x^3$ 和 $y = \sqrt{u}$ 可以复合而成函数 $y = \sqrt{1 + x^3}$, 其定义域为 $x \geq -1$. 而函数 $u = 2 + x^3$ 和 $\arcsin u$ 不能作复合. 看例 11、例 12 和例 13.

难点是复合函数的分解. 在后面求复合函数的导数时, 经常出现的错误是没有将复合函数分解到位.

例如: $y = e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$, 仅分解为 $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \sin \frac{x}{2}$, 就没有分解到位. 最后一个函数

还应进一步分解为 $v = \sin t$, $t = \frac{x}{2}$.

例 14、例 15 是已知复合函数值, 求函数原对应规则的例子, 掌握其方法.

反函数的概念及求解步骤同初等数学, 看定义 9 和例 16.

定理 1.2 是反函数存在定理, 知道即可.

4. 基本初等函数和初等函数

这部分内容是学习的重点, 也是学习后面内容的基础. 读者要用心学懂读透.

对基本初等函数所包括的六类函数,要求读者能熟练掌握其定义形式、定义域、值域、基本性质和图形.

初等函数的概念看定义 10,要求熟练记忆.初等函数是本书主要讨论的对象,而且在其定义区间内具有很好的性质,后面将专门讨论.

1.2 数列与极限

1. 极限思想

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的.极限思想是贯穿于本书的思想方法,要认真体会、理解、掌握.

仔细看例 1、例 2 后,体会下列思想方法.

极限思想方法:

为求实际问题所求量的精确解答,在局部利用“以直代曲”或“以不变代变”的方法,求出所求量的近似值,通过考察近似值的变化趋势得到所求量的精确值.

由此得到极限概念:

设有变量 x 和常数 x_0 ,若变量 x 在其变化过程中无限地趋近于常数 x_0 ,则称 x_0 为 x 的极限,记作 $\lim x = x_0$.

极限的实质是刻画了变量的变化趋势.

2. 数列的极限

数列 $\{x_n\}$ 是一种特殊的变量,大量的实际问题,需要来研究当 n 无限增大时 $\{x_n\}$ 的变化趋势,也就是数列的极限问题.

看定义 12 后,理解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的含义.

利用观察法可确定一些常见的数列的极限,记住常用的数列极限公式.知道数列的极限的性质.

1.3 函数的极限

由极限的概念可知,如果在自变量的某个变化过程中,对应的函数值无限接近于某个确定的常数,那么这个确定的常数称为在自变量这一变化过程中函数的极限.

对函数的极限,主要研究以下两种情形:

- (1) x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 ($x \rightarrow \infty$),对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
- (2) x 任意接近于有限值 x_0 ($x \rightarrow x_0$),对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

1. $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

看定义 13 后,理解 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的含义.

有时还分 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 的情形.看定义 13' 和定义 13'',记住常用极限公式,知道定理 1.5.在这种情形下,还可以给出函数图形的水平渐近线概念.

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$,则直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

2. $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

看定义 14 后,理解 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的含义.

记住常用极限公式:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

有时还要考虑函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的左侧（右侧）有定义，当 x 趋于 x_0 时的变化趋势，这就引出了左（右）极限的概念。

看定义 14' 和例 1，记住定理 1.6，后面经常用到它。

1.4 无穷小量与无穷大量

无穷小量与无穷大量是函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 某个变化过程中， $|f(x)|$ 无限变小和无限增大的两种特殊情形。

1. 无穷小量

无穷小量也称其为是以零为极限的一类函数。看定义 15，理解四点注意事项。

掌握定理 1.7，它刻画了有极限的函数和无穷小量的关系。在后面的学习内容中，许多结论都是以该定理为理论基础的。

2. 无穷大量

看定义 16，并注意：不能把无穷大量与很大很大的数混为一谈；说某个函数是无穷大量，必须指出它的极限过程。

掌握定理 1.8，它刻画了无穷大量和无穷小量的关系，在求特殊的函数极限时要用到。

在这种情形下，还可以给出函数图形的铅直渐近线概念。

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线。

3. 无穷小量的性质

对无穷小量的四个性质要求认真掌握，特别是性质 2 和性质 3 在求特殊的函数极限时要用到。

看例 1，掌握其方法。

4. 无穷小的比较

这部分内容主要讨论的是，在 x 的某个变化过程中，两个无穷小量的商的种种情形。

看定义 17，着重掌握高阶无穷小量和等价无穷小量的概念。

1.5 极限的性质与运算法则

1. 极限的性质

知道极限的唯一性、有界性和保号性，它们构成了极限理论的主要内容。

2. 极限的四则运算法则

在学习了极限的概念和性质后，接下来要学习极限的运算，这是我们学习的重点。

进行极限运算首先要掌握的是极限的四则运算法则。

看定理 1.9 及推论，理解其含义和特点。定理中的（1）、（2）项可以推广到有限个函数的情形。

仔细看例 3～例 12，掌握其中求极限的方法。

1.6 极限存在准则与两个重要极限

知道极限存在的准则 I 和准则 II。着重掌握两个重要极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

及派生出的结果：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

仔细看例1~例5, 掌握其中求极限的方法.

1.7 函数的连续性

1. 连续函数的概念

函数的连续性是现实生活中众多连续变化的现象在函数上的反映. 其共同的特点, 是当自变量有微小改变时, 函数的改变也是很微小的. 于是, 可用函数极限来定义连续函数.

看定义18, 这是函数在一点连续的基本定义. 看懂例1.

在定义18中, 记 $x = x_0 + \Delta x$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有 $x \rightarrow x_0$. 于是, 有定义19. 定义19也反映了函数在一点处极限与连续的关系, 即函数在 x_0 点处连续要求函数在 x_0 点处有定义、有极限且极限值和函数值相等三者同时成立. 由此, 函数在 x_0 点处有极限是函数在 x_0 点处连续的必要条件, 而不是充分条件.

例如, 当 $x=1$ 时, $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ 没有定义, 但

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

即函数在 $x=1$ 点处有极限, 但不连续.

类似于左极限和右极限, 函数在 x_0 点处也有左连续和右连续的概念.

看定义20, 掌握定理1.10. 该定理用函数在 x_0 点处同时左连续和右连续的性质, 来刻画函数在 x_0 点处的连续性.

有关函数在开区间内连续或在闭区间上连续, 看定义21.

看懂例2、例3、例4、例5, 掌握其方法.

2. 连续函数的四则运算及初等函数的连续性

由极限的四则运算及定义19, 即可得到连续函数的四则运算定理, 看定理1.11. 有关复合函数的连续性, 看定理1.12.

利用定义19和定理1.11可以证明: 基本初等函数在其定义域内都是连续的. 再由初等函数的定义、定理1.11和定理1.12, 可得初等函数的一个重要性质, 即初等函数在其定义区间内都是连续的.

利用定义19和定理1.12还可以求复合函数的极限.

对于复合函数 $y = f[\varphi(x)]$, 当函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 点连续时, 有 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$; 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]. \quad (*)$$

(*) 式说明: 在上述条件下求复合函数的极限, 极限符号和函数符号可以交换.

掌握当 $f(u)$ 为指数函数、对数函数和幂函数时的情形. 看懂例6、例7、例8、例9.



3. 函数的间断点

看定义 22, 理解间断点的含义. 看例 10~例 16, 会对间断点分类并能判断其类型.

4. 闭区间上连续函数的性质

看定义 23, 理解函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值和最小值的含义.

掌握最值定理和介值定理及推论(零点定理). 特别是零点定理, 可以用来验证代数方程在某一范围内有实根, 也是求方程近似解的理论基础.

看懂例 17.

1.8 经济中常用的函数

经济中常用的函数主要包括: 成本函数、需求函数、收益函数和利润函数.

掌握这四种函数的含义及常用形式, 重点掌握利润函数. 在后面的章节中还要进行专门的讨论.

看懂例 1、例 2.

四、典型例题解析

例 1 填空题

(1) 设 $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{x+1}$ ($x \neq -1$), 则 $f(x) =$ _____.

答案: $\frac{1}{2-x}$ ($x \neq 2$)

分析: 由 $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} = \frac{x}{2x+1-x} = \frac{1}{2-\frac{x-1}{x}}$, 有 $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

(2) 已知 $f(\tan x) = \sec^2 x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

答案: $x^2 + 2$

分析: 因 $f(\tan x) = \sec^2 x + 1 = (\tan^2 x + 1) + 1 = \tan^2 x + 2$, 有 $f(x) = x^2 + 2$.

(3) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域为_____.

答案: $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

分析: 由 $-1 \leq \ln x \leq 1$, 有 $\ln e^{-1} \leq \ln x \leq \ln e$, 即 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$.

(4) 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 4)$, 则 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为_____.

答案: $(0, 16)$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x} =$ _____.

答案: 2

分析: 令 $\arcsin 2x = t$, 则 $2x = \sin t$, 且 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $t \rightarrow 0$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\arcsin 2x}{2x} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 2.$$



$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: 3

$$\begin{aligned} \text{分析: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + \tan^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x \cos^2 x} \right) \\ &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{2x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{分析: } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{\frac{1}{x}})^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: e^{-2}

$$\text{分析: } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}} \right]^{-2} = e^{-2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: 0

$$\begin{aligned} \text{分析: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0. \end{aligned}$$

$$(10) \text{ 曲线 } y = \frac{1}{x-3} \text{ 的水平渐近线为 } \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 铅直渐近线为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: $y=0$, $x=3$

$$\text{分析: 因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-3} = 0, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty, \text{ 所以由渐近线定义即得.}$$

例2 选择题

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \frac{x-1}{x}, x \neq 0, 1, \text{ 则 } f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = (\quad).$$

(A) $1-x$ (B) $\frac{1}{1-x}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) x

答案: (C)

$$\text{分析: 因为 } f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{\frac{1}{f(x)} - 1}{\frac{1}{f(x)}} = 1 - f(x) = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}, \text{ 所以选 (C).}$$



(2) 下列函数为偶函数的是 ().

- (A) $x \cos x$ (B) $x+1$ (C) x^2+1 (D) $x+\cos x$

答案: (C)

分析: (A) 中 $\cos x$ 是偶函数, x 是奇函数, 故 $x \cos x$ 是奇函数; (B) 和 (D) 都是非奇非偶函数.

(3) 下列极限正确的是 ().

(A) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在 (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

答案: (B)

分析: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$, 因此选 (B). 而 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x}-1$ 是 x^2 的 () 无穷小.

- (A) 高阶 (B) 低阶 (C) 同阶但不等价 (D) 等价

答案: (B)

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \infty$, 因此选 (B).

(5) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限, 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的 ().

- (A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

答案: (A)

分析: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则一定有极限; 反之不真. 即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限, 是在点 x_0 处连续的必要条件, 而不是充分条件, 因此选 (A).

例3 解答题

(1) 设 $f(e^{x-1}) = 3x - 2$, 求 $f(x)$.

解: 令 $u = e^{x-1}$, 则 $x = \ln u + 1$, 于是

$$f(u) = 3(\ln u + 1) - 2 = 3 \ln u + 1,$$

所以

$$f(x) = 3 \ln x + 1 \quad (x > 0).$$

或者, 由 $f(e^{x-1}) = 3x - 2$, 有

$$f(e^{x-1}) = 3(x-1) + 1,$$

即

$$f(e^{x-1}) = 3 \ln e^{x-1} + 1.$$

亦即

$$f(x) = 3 \ln x + 1 \quad (x > 0).$$

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数, $F(x) = f(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$, 其中 a 为不等于 1 的正数, 则 $F(x)$ 是偶函数.



$$\begin{aligned}
 \text{证: } F(-x) &= f(-x) \left(\frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= -f(x) \left(\frac{a^x}{a^x+1} - \frac{1}{2} \right) = -f(x) \frac{2a^x - a^x - 1}{2(a^x+1)} \\
 &= -f(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{a^x+1} \right) = f(x) \left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= F(x).
 \end{aligned}$$

由偶函数的定义, $F(x)$ 是偶函数.

也可以仅证明, 函数 $\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}$ 是奇函数.

(3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$.

分析: 对于这种形式的极限, 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 来求解.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+1+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.
 \end{aligned}$$

(4) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

分析: 对于这种形式的极限, 利用极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 来求解.

解: 令 $e^{\frac{1}{x}} - 1 = u$, 则 $x = \frac{1}{\ln(u+1)}$, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $u \rightarrow 0$, 从而

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \ln(u+1)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.
 \end{aligned}$$

(5) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + 4}{x-1} = -3$, 求 a 的值.

分析: 对于这种形式的极限, 是从已知极限值来求函数中的待定常数. 由于极限值是一确定常数, 且 $x \rightarrow 1$ 时, 分母函数 $x-1 \rightarrow 0$, 因此分子函数也必须趋于零. 不然, 所给函数将趋于无穷大. 从而, 分子函数

$$x^2 - ax + 4 = (x-1)(x+c),$$

这里 c 是待定常数.



解: 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+c)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+c) = 1+c = -3$, 得 $c = -4$. 又 $x^2 - ax + 4 = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$, 得 $a = 5$.

(6) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(\sqrt{1+ax} - 1)$ 与 $\sin 2x$ 是等价无穷小, 求 a 的值.

分析: 这类问题实质是: 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sin 2x} = 1$ 时, 求 a 的值.

$$\begin{aligned} \text{解: 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+ax} - 1)(\sqrt{1+ax} + 1)}{\sin 2x \cdot (\sqrt{1+ax} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin 2x \cdot (\sqrt{1+ax} + 1)} = \frac{a}{4} = 1, \end{aligned}$$

有 $a = 4$.

(7) 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

的连续性.

解: 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 是初等函数, 所以连续.

当 $x=0$ 时, $f(0) = -\frac{1}{2}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} = f(0). \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 从而 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(8) 求函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的间断点, 并说明间断点的类型.

解: 由 $\tan x \neq 0$, 知 $x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是间断点.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$, $x=0$ 是第一类可去间断点.

当 $x \rightarrow k\pi (k \neq 0)$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$, $x = k\pi (k \neq 0)$ 是第二类间断点.

当 $x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是第一类可去间断点.

(9) 设某种商品的总成本为 $C(Q) = 20 + 2Q + 0.5Q^2$, 若每售出一件该商品的收入是 20 万元, 求生产 10 件的总利润.