

武漢大學講義

中外數學史

第一編 下冊

曾昭安編

新學社

經學

PDG

一九五六年

中外數學史第一編下冊目錄

第十一章	算經	面數
一.	算經十書.....	243
二.	周髀算經.....	244
三.	九章算術.....	246
四.	孫子算經.....	252
五.	五曹算經.....	253
六.	夏侯陽算經.....	254
七.	張丘建算經.....	254
八.	五經算術.....	255
九.	數術記遺.....	255
十.	海島算經.....	259
十一.	緝古算經.....	260
第十二章	商高定理	
一.	周代的社會.....	261
二.	商高定理的意義.....	261
三.	商高定理的證法.....	264
四.	商高定理的推廣.....	296
五.	商高數.....	301
第十三章	春秋戰國時代的數學	
一.	春秋戰國的社會.....	383
二.	樂律學的創立.....	384
三.	世界上最古的幾何學.....	391

四.	<u>惠施</u> 歷物十事·····	412
五.	<u>公孫龍</u> 理論五篇·····	414
六.	<u>莊周</u> 辯者二十一事·····	415

第十四章 希臘時代的數學

一.	<u>希臘時代的社會</u> ·····	421
二.	<u>希臘第一個天算家——退利斯</u> ·····	421
三.	解釋宇宙恆動的 <u>亞諾芝曼德</u> ·····	422
四.	<u>希臘數學家——畢達哥拉斯</u> ·····	422
五.	<u>希臘的一元論和多元論諸人</u> ·····	424
六.	首先研究「變圓爲方」問題的 <u>亞拿薩哥拉</u> ·····	425
七.	<u>埃理亞學派</u> ·····	425
八.	<u>希臘的詭論派</u> ·····	426
九.	<u>雅典學校第一個幾何學家——希波革拉第</u> ·····	427
十.	推崇幾何學的哲學家—— <u>柏拉圖</u> ·····	428
十一.	發明「黃金分割」原理的 <u>攸多克薩</u> ·····	429
十二.	支配歐洲學術千多年的 <u>亞里士多德</u> ·····	433
十三.	發明圓錐曲線的 <u>門涅馬斯</u> ·····	434

第十五章 幾何學三大問題

一.	幾何三大問題的意義·····	439
二.	尺規作圖的標準·····	441
三.	二次方程的圖解法·····	442
四.	可約與既約函數·····	443
五.	倍積問題的解法·····	444
六.	三分角問題的解法·····	445
七.	圓的等分法·····	446
八.	五邊形作法·····	453

九. 十七邊形作法	456
十. 圓的七等分及九等分問題	461
十一. e 的超越性	464
十二. π 的超越性	470
十三. 圓積問題的解法	473
十四. 倍積問題的作圖	474
十五. 三分角問題的作圖	492
十六. 圓積問題的作圖	505
十七. 圓周變直的近似作法	508
十八. 圓積問題的簡便作法	511

第十六章 亞歷山大的數學

一. <u>亞歷山大帝國的社會</u>	515
二. 著 <u>幾何原本</u> 的 <u>歐幾里得</u>	517
三. 首先說出地繞太陽的 <u>亞里達古</u>	519
四. 應用數學於機械學的 <u>阿基米得</u>	520
五. <u>亞歷山大</u> 的幾何學家 <u>阿坡羅尼阿</u>	524
六. 發明質數篩法的 <u>埃拉托色尼</u>	527
七. 發明蚌線的 <u>尼科米德</u>	528
八. 發明蔓葉線的 <u>戴克爾</u>	528
九. 研究圓環截線的 <u>佩塞斯</u>	529
十. 研究等周圖形的 <u>齊諾多拉</u>	529
十一. <u>亞歷山大</u> 前期的天算學家 <u>希西克爾</u>	529
十二. 首創歲差的 <u>依巴谷</u>	529
十三. 研究數學史的 <u>哲米那</u>	531
十四. 發明錐線日晷的 <u>帶奈索多刺</u>	531
十五. 創立三角形求積公式的 <u>希綸</u>	531

十六。發表調和列點定理的 <u>塞勒拿</u>	534
十七。發明截線定理的 <u>門涅勞斯</u>	535
十八。發明立方數定理的 <u>尼科馬察</u>	538
十九。 <u>士麥拿</u> 的天算家 <u>狄昂</u>	539
二十。著 <u>天文集</u> 的 <u>托勒密</u>	540
廿一。反對基督教的數學家 <u>坡菲力</u>	546
廿二。代數學鼻祖 <u>帶奧蕃</u>	546
廿三。 <u>亞歷山大</u> 後期的幾何學家 <u>帕普斯</u>	561
廿四。發表三數相加性質的 <u>愛安布力卡</u>	568
廿五。 <u>亞歷山大</u> 的數學家 <u>狄昂</u>	569
廿六。慘死於教會的女數學家 <u>海披薩</u>	569

第十一章 算 經

一、算經十書

我國古代數學書，屬於漢唐以前而遺流到今日的，計有十部。這些書籍，號稱「算經十書」，即周髀算經，九章算術，孫子算經，五曹算經，夏侯陽算經，張丘建算經，五經算術，數術記遺，海島算經，緝古算經。漢唐時代，所著的數學書，原非限於這十書。根據歷代史書的藝文志或經籍志看來，還有若干數學書籍存在，但均失傳。今所存的，祇此十書。我們憑着這十部算經，用來窺探漢唐時代的數學，顯屬不夠。可是為便利計，依據十經的記載，得以知道一些要旨，進而了解古代數學的成果，當也有重要收穫呢！

唐初考試制度，分設六科，設有算學博士。隋書百官志載：『算學博士二人，算助教二人，學生八十人』。唐六典載：『凡舉試之制，每歲仲冬，率與計偕。其科有六：一曰秀才，二曰明經，三曰進士，四曰明法，五曰書（唐書選舉志作「明字」），六曰算（唐書作「明算」）。其學校組織，有博士，有助教，有學生。計：算學博士二人，助教一人，算學生三十人，典學一人』。唐考試制度，規定算經十書為明算科的用書。可見當時是以這些書作為有代表性底著作。明算科所用的書籍，雖非僅這十部，但其它數學書，亦不過添上三等數和綴術兩種。因此明算科的用書，一共也祇十二部罷了。十二部之中祇存留這十部。其它書籍，悉告失傳。這十部算經所以能傳存的，就是因為用作明算科用書的緣故。在唐代如此，在宋代亦如此。所以得以遺傳到於今日。

三等數一書，據云是董泉所作，甄鸞曾加注解。現在這書已經失傳，內容無從詳知。祇由書名看來，可分為幾種解釋。大概書中所論的為整數性質，或為不定解析學。如果是這樣的話，那麼，這書是一部很可珍貴的作品了。

綴術五卷，是祖冲之所著，李淳風曾加以註解。隋書律曆志以這書為推算圓周率的數學書，說道：『宋末南徐州從事史祖冲之更開密法。指要精密，算氏之最者也。所著之書，名為綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理』。可見這書是一部理論高深的著作。可惜他的圓周率證法久已失傳。到宋時沈括夢溪筆談和秦九韶數書九章又都引稱綴術為論曆術的書籍。沈括并說到祖亘也有綴術二卷。祖亘即祖冲之的兒子祖暅之，或有以暅之作暅的。由此知道祖氏父子都各著有綴術。他們都是研究數理並且精通曆法的大家了。

綴術中論數亦論曆，據南史七十二傳稱『綴術造有數十篇』，可見它必是大部的書。又由唐明算科，對於十二部用書各有規定的學習年限來看，亦能推測它是大部的書。唐書選舉志說：「孫子五曹共限一歲，九章海島共三歲，張丘建夏侯陽共一歲，周髀五經算術共一歲，綴術四歲，緝古三歲，記遺三等數皆兼習之」。在這十二部書中，綴術習四歲，年限最長。現在所存十經中，九章算術為最重要，又是最大部，故加以海島

算經，共習三年。至緝古算經，現存本雖為短篇，但甚難讀，宜習三年。獨有綴術須習四年。現存諸書中最大部的九章算術，成為九卷。綴術既說是有數十篇，那麼它是大部而又難讀，可以確定的了。

唐代明算科所用十二書，可分為兩類來看，即記遺和三等數，沒有學習年限的規定，僅說『兼習』已夠。唐書選舉志又載：『試之日，九章三條，海島孫子五曹張丘建夏侯陽周髀五經等七部各一條，十通六；記遺三等數帖讀十得九為第。綴術七條，緝古三條，十通六為第』。由此看來，唐代的考試方法，對於記遺三等數，和其它十書的意味，也不相同。記遺三等數的評分方法，以得百分之九十為及第，其它書則以得百分之六十為及第。又由綴術緝古兩書中所出的題目條數亦較多，綴術七條，緝古三條。緣以這兩書為較高等的緣故。所以綴術是一部最重要的數學書，不難想像得知。且王孝通上緝古算經表亦說道：『祖暅之綴術，時人稱精妙』，更可以證明了。

二、周髀算經

周髀算經是我國現存的最古數學書。書中的作者姓名失傳，時代無考。且屢經後人增益修訂，早非原本。故原書的著作時代，很難確定。書中載有周公（公元前1100年頃）和商高問答的話。這事是在周代初期。書中載有八節二十四氣，所列的次序和淮南子（即淮南王劉安，公元前179—前122年）天文訓所載相同。二月節的驚蟄是作啓蟄。啓蟄後來改為驚蟄，是為了避漢景帝（公元前156年至前141年）諱。由此知道這樣的說法，應該是公元前二世紀的事。書中說：『方屬地，圓屬天』，與淮南子天文訓所說：『天道曰圓，地道曰方』，意思相同。書中使用周髀以測日景，說道：『髀者表也』。故髀就是豎立於地上以量太陽影子的表桿。這樣測日景的法子，與尚書書靈曜（公元紀元年頃）及張衡（78—139）靈憲所載相同。書中說：『凡為日月運行的圓周，七衡周而六間』。即是說日月運行於七圓周。這裏的「衡周」就是圓周，「六間」就是七圓周彼此相距有六個間隔的意思。孝經援神契，洛書甄曜度亦有「七衡六間」的說法，正和這相同。書中說：『日月俱起建星』。建星是在斗牛之間。這種現象，和漢太初元年（公元前104年）行太初曆的時代相合。書中說：『日冬至在牽牛初，夏至在東井，春分在婁，秋分在角』。這和漢綏和二年（公元前7年）劉歆造三統曆，所說：『牽牛初冬至，婁四度春分，井三十度夏至，角十度秋分』的時代相合。

周髀算經是談蓋天說的書。蓋天的名詞，最初見於漢揚雄（公元前53年—後18年）所著法言重黎篇。晉書天文志載：『漢靈帝時（168—189）蔡邕（133—192）於朔方上書言，周髀術數具存』。現傳本周髀本文引呂氏春秋（秦呂不韋撰，呂卒於公元前235年）說道：『呂氏曰，凡四海之內，東西二萬八千里，南北二萬六千里』。如果這話不是後人所屬入，那麼，周髀的成書，至早不能在戰國時代以前。又蓋天說盛行於西漢，書中列舉季節星象多和漢時相合，故周髀的著作，可定為公元前二世紀西漢時代的作品呢！

隋書經籍志載：『周髀一卷，趙嬰註』。唐書藝文志亦載：『趙嬰註』。宋本周髀算經題：『漢趙君卿撰』。宋鮑澣之周髀算經跋稱：『趙君卿名爽，君卿其字也』。由此可見趙爽就是趙嬰。算經十書的周髀算經本，單云趙君卿註，并無漢字。宋李籍周髀算經音義說：『君卿，趙爽字也。不詳何代人』。然考趙君卿序文說：『渾天有靈憲之文，蓋天有周髀之法，累代存之，官司是掌』。據此可知趙注是作於靈憲和周髀累代之後。但靈憲是後漢張衡（78—139）所作，即趙注必是在張衡死後的作品。再玉海及通考載：『周髀算經二卷，趙君卿注，甄鸞重述』。由此又知趙注也決不後於北周甄鸞的時代。細釋趙注，在周髀卷下「十九歲為一章」句下有注說：『乾象曰』。在「月一日行天之度」句下有注說：『與乾象同歸而殊途，義等而法異也』。按乾象曆是漢建安十一年（206）劉洪所造，三國時代吳使用了幾十年（223—280）。或者趙爽拿周髀術和當時實行的曆法相比較，才來作注。因此可推定趙是一個吳國的人呢。

周髀算經中有一個重要定理，是關於句股形的。所謂句股形，就是直角三角形。夾於直角的兩邊，短邊曰「句」（即勾），長邊曰「股」，斜邊曰「弦」。在周髀算經的開始，就說道：『昔者周公（公元前1100年頃）問於商高曰，請問數將安出？商高曰，數之法出於圓方，圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩以為句廣三，股修四，徑隅五。既方之外，半其一矩，環而共盤，得成三四五』。在書中的運算，也用了「句方加股方等於弦方」的定理。這個定理，在西洋稱曰畢達哥拉斯（公元前582—前493年）定理，却後於商高六百年。故正確地應該稱曰「商高定理」。但資產階級的人們，竟信口雌黃，發出濫調，有意毀謗地說，商高祇指出句三股四弦五，沒有把這個定理普遍化。這樣說法，真是有心歪曲事實，任意攻擊。姑無論在周髀書中，復載有榮方和陳子的問答，陳子已將句股定理就推廣方面說明了。祇就商高來說，他距今有三千多年。在那時候要用文字詳載一切，頗非易事。因此他縱然知道句股形的一般性質，如句五，股十二，弦十三，或句七，股二十四，弦二十五之類，也不願意一起都拿出來。特僅選擇其中形式美觀，數值又最簡捷的，作為談話的資料，不是更顯得奇特嗎！再退若干步來講，依着文字，祇承認商高得知句股定理的一部分，就硬說句股定理的發明，不是在商高時代，那也未免太冤枉了。因為如果依照那樣說法，那麼對現在的一切發明，都可說是沒有的了。比方電燈我們也可說至今還未發明，因為現在的電燈，多半的能力是消耗於發熱，不是用於發光。火車也可說至今還未發明，因為現在火車所用的汽力，多半消耗於無用之地，并未完全用於使火車得以轉動行駛。這樣說法，可能算得公平合理嗎！

周髀算經用三角術以量地，亦用三角術以測天。書中說道在成周地方，即現今的洛陽樹立髀表，於夏至及冬至日測量日晷影子，並詳載有影長的尺寸數目。這法是和用土圭以測日影法相同。試將那時所得的結果，拿來計算黃道的傾斜角，居然和十九世紀拉普拉斯（1749—1827）由理論所推算出來的數值完全符合。這更可證我國的數學，早走在西洋人前面幾千年。

周髀算經載，陳子（周公以後不久的人氏）用「句股定理」和「相似形比例」，以推算太陽的距離和它的直徑。雖他所算得的結果跟實際數值有差，可是距今三千年前有這樣的工作，真是難能可貴的呢！西人第一個用相似形比例以測量物體高度的是希臘人退利斯（公元前640—前546年），他比陳子已遲後了幾百年。且他所測量的祇是地面上金字塔的高度罷了，還不敢去推算地球以外的天體哩！

周髀算經也談到「晝圓周」的事。書中說有「七衡」，就是七個圓周的意思。這些圓周都是「同心圓」。諸圓的直徑，要用「等差級數」來算。第一衡即第一圓周的直徑是238000里，以後用277666 $\frac{2}{3}$ 里遞加。又算二十四氣の日晷影子，也用等差級數。冬至日晷長是1丈3尺5寸。由冬至到夏至是用9寸9 $\frac{1}{2}$ 分遞減，由夏至到冬至是用9寸9 $\frac{1}{2}$ 分遞加。

趙君卿注周髀算經，繪有句股圖，以證明句股定理。在外國用君卿的同樣方法，去證明句股定理，最早的要算印度數學家巴斯卡刺（1150年頃），却比趙氏遲後了九百多年。

三、九章算術

算經十書中談論數學各部分最整齊完備的是九章算術。歷代學者大都以這書為成周六藝的遺文，和周髀算經都看做是古代所製作。現傳本九章算術是三國時魏景元四年（263年）劉徽加有注釋并作有序的。他的序文說：「周公制禮而有九數。九數之流，則九章是矣。往者暴秦焚書，經術散漫。自時厥後，漢北平侯張蒼（公元前250—前152年），大司農中丞耿壽昌（公元前50年頃）皆以善算命世。蒼等因舊文的遺殘，各稱刪補。故校其目，則與古或異。而所論者，多近語也」。書中方田章說「畝法二百四十步」是秦漢田制，衰分章有「大夫，不更，簪，皂，上造，公士」諸名詞，是秦漢官爵名，均輸章說「長安」，是漢惠帝以後的帝都，「上林」是漢武帝的苑名。劉徽說「所論者多近語」，當即指此。這書的研究，也以漢代為盛。廣韻卷四算條載：「九章術，漢許商杜忠（公元前30年頃），陳鸞（吳人），魏王粲（177—217）并善之」。前漢書律曆志載劉歆（卒於23年）論備數，說道：「其法在算術，宜於天下，小學是則。職在太史，義和掌之」。由此推知九章算術的著作時代，是約在公元50年頃。

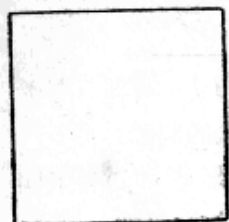
九章的名稱，當起源於九數。各家對九數有不同的解釋：漢鄭玄（127—200）九數說注：「方田，粟米，差分，少廣，商功，均輸，方程，贏不足，旁要；今有重差，夕桀，句股」。宋史律曆志作：「方田，粟米，差分，少廣，均輸，方程，傍要，盈不足，鉤股」。魏劉徽九章注作：「方田，粟米，衰分，少廣，商功，均輸，盈不足，方程，句股」。

算術中的「重差，句股」二術，當導源於周髀。「句股」是直角三角形的簡稱。「重差」是使用相似句股形以測量其差數。如於地平上樹立二竿表，由南北兩地測量日影差，以計算日高及日下的距離。「旁要，夕桀」二術，不見於劉徽所傳的書中。今九章算術句股章，除句股互求算法十六問外，還有應用相似句股形，測算高遠題八則，或即從前的「旁要」術。南宋楊輝著詳解九章算法，以句股容方題為「旁要」術，秦九韶數學九章，以

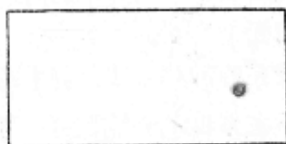
測望圓營題解爲句股「夕桀」術，清代諸儒亦多以「旁要，夕桀」爲句股分術的名稱。

今傳本九章算術，附有劉徽注。全書記載問題二百四十六個。分爲九章：方田，粟米，衰分，少廣，商功，均輸，盈不足，方程，句股。

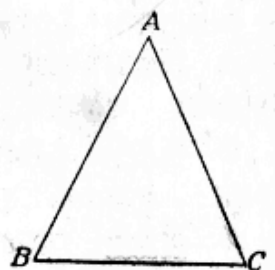
第一方田章，主要是計算田畝面積和分數算法。各種田畝的形狀，有方田，直田，圭田，邪田，箕田，圓田，宛田，弧田，環田等。



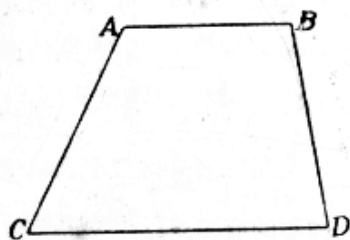
方田 (圖66)



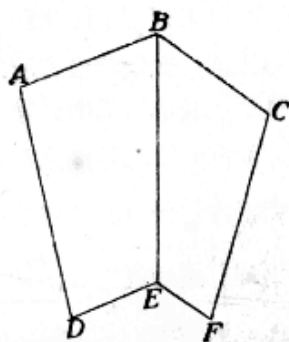
直田 (圖67)



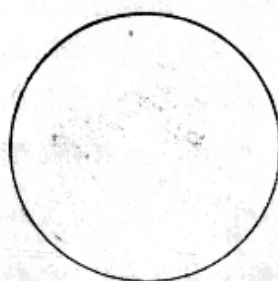
圭田 (圖68)



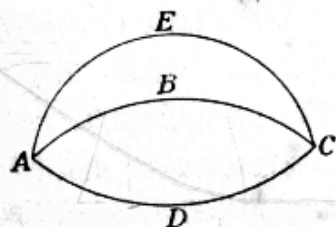
邪田 (圖69)



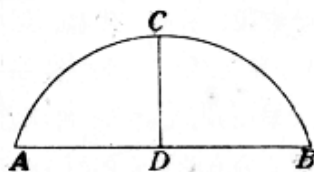
箕田 (圖70)



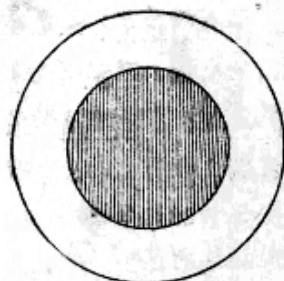
圓田 (圖71)



宛田 (圖72)



弧田 (圖73)



環田 (圖74)

方田爲正方形田，如圖66。直田爲矩形田，如圖67。圭田爲等腰三角形田，如圖68， $AB=AC$ 。邪田爲梯形田，如圖69， $AB \parallel CD$ 。箕田如圖70，有舌有踵， ABC 叫做「舌」， DEF 叫做「踵」。全形可分做兩個斜田。在斜田 $ABED$ 中， $AB \parallel DE$ ；

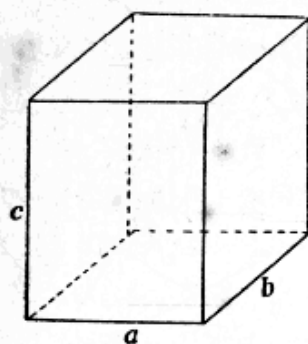
在斜田 $BCFE$ 中, $BC \parallel EF$. 圓田如圖71, 它的面積, 在書中已正確地得出半周乘半徑的結論, 即圓田面積 $= \frac{1}{2}$ 周 $\times$ 徑. 宛田是略像半球的曲面, 如圖72. 宛田的面積, 就是單底球帶的面積. 圖中 $ABCD$ 是宛田的下周, AEC 是宛田的徑. 書中計算宛田面積, 是以周徑相乘取其四分之一, 即宛田面積 $= \frac{1}{4}$ 周 $\times$ 徑. 但這個結果祇是表示近似值, 正確地應該為 $2\pi rh$, 式中 r 表示球的半徑, h 表示球帶的高. 弧田的形狀像弓, 亦稱弓田, 如圖73; AB 為弦, CD 為矢. 書中計算弧田面積, 是以弦乘矢, 加矢的自乘, 取其和之半, 即弧田面積 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 但這個結果祇是表示近似值, 正確地應該從扇形的面積內, 減去圓半徑為兩腰, 弦為底所成等腰三角形的面積, 所餘者即是弧田面積. 環田如圖74, 它的面積等於兩個圓田面積之差.

第二粟米章, 大都為各種糧食交易的計算方法. 書中有「今有術」, 實即「四率比例術」. 本章末的九問題, 屬於不定方程式求整數解, 可看做整數術的起源.

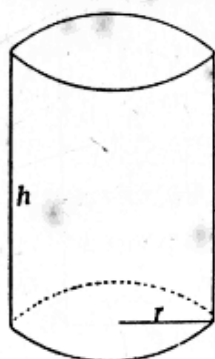
第三衰分章, 亦稱差分, 是配分比例的計算方法, 主要地用於分配歲收. 書中稱「列衰」數, 就是表示「各所求率」. 此外還有「錐行衰」, 是表示「等差級數」, 「自倍衰」是表示「幾何級數」, 「返衰」是表示「調和級數」. 所用算法, 和埃及及印度亞刺伯人所稱「假借法」相同. 本章末列有比例問題, 可和粟米章末的不定解析問題, 互相交換. 這或者因為古本轉相傳述, 文字前後有所錯移, 以致沒有糾正的呢!

第四少廣章, 是從田畝面積求邊長或徑長的計算方法, 并載有開方, 開圓, 開立方, 開立圓四術. 開平方開立方的演算步驟, 都是很正確的. 開圓術是以四乘圓的面積, 用三去除, 將所得的商, 開平方, 得出圓的直徑, 即圓的直徑 $= \sqrt{\frac{4 \text{ 圓的面積}}{3}}$. 這式所表示的是近似值, 正確地應寫為「圓的直徑 $= \sqrt{\frac{4 \text{ 圓的面積}}{\pi}}$ 」. 開立圓術是以十六乘球的體積, 用九去除, 將所得的商, 開立方, 得出球的直徑, 即球的直徑 $= \sqrt[3]{\frac{16 \text{ 球的體積}}{9}}$. 這式所表示的也是近似值, 正確地應寫為「球的直徑 $= \sqrt[3]{\frac{6 \text{ 球的體積}}{\pi}}$ 」.

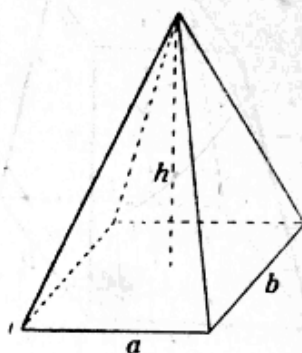
第五商功章, 是求城, 垣, 堤, 溝, 塹, 渠, 堆倉, 存窖等的體積, 亦可看做土木建造的功程. 宋李籍九章算術音義說:「商, 度也. 以度其功庸, 故曰商功」. 前漢書食貨志載:「耿壽昌習於商功, 分銖之事」. 由此見商功可能是漢代的一種算法, 嗣後被彙集於九章算術中. 蓋我國對於築城, 建堤, 挖溝, 修渠等工程, 早已費很大的努力. 如鯀(公元前2240年頃)築城垣, 禹(公元前2180年頃)治洪水, 都已載在史籍. 由於後人總結以往的經驗, 故在九章中專設商功一章. 書中指出了等重的土壤原體積, 碎土體積和建築用堅土體積的比例約為 4:5:3; 又說道冬季施工築堤, 每工可以修 444 立方尺, 春季施工挖溝, 每工可以挖 766 立方尺, 擔土的人工加五分之一; 夏天每工挖 871 立方尺, 如有砂礫地帶人工加倍. 這些都是對工程方面的核算經驗, 到現在看來仍是非常可珍貴的. 書中計算也有柱形, 錐形, 截錐體, 截矩體, 棱臺(亦作稜臺), 楔形等的體積.



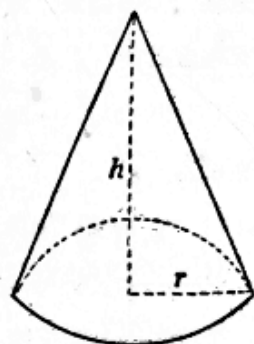
方堡 (圖 75)



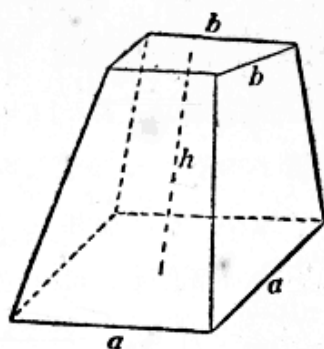
圓堡 (圖 76)



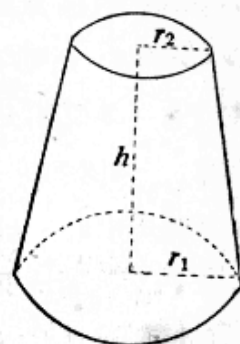
方錐 (圖 77)



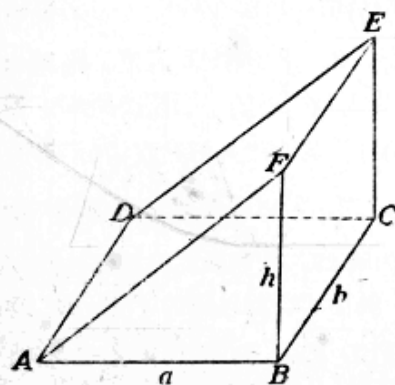
委栗 (圖 78)



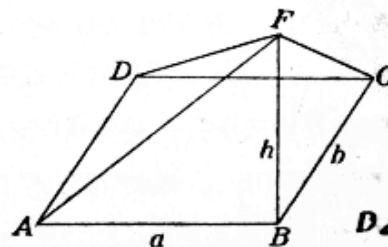
方亭 (圖 79)



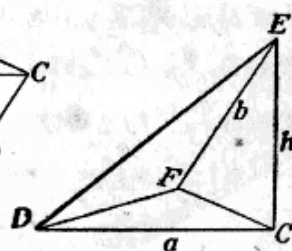
圓亭 (圖 80)



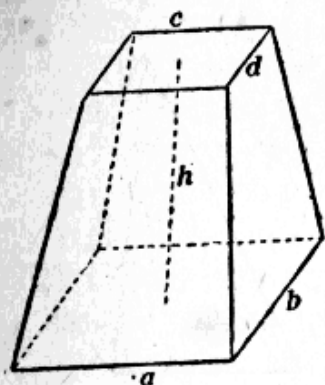
方堡 (圖 81)



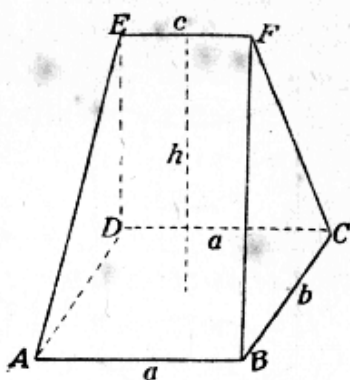
方堡 (圖 82)



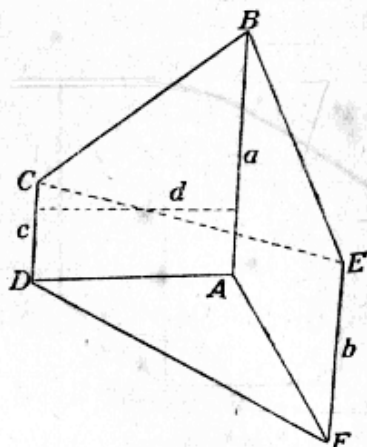
方堡 (圖 83)



舞童 (圖 84)



舞童 (圖 85)



舞童 (圖 86)

柱形分兩種，一曰方堡壩，二曰圓堡壩。方堡壩即矩體，如圖75，它的體積為 abc 。圓堡壩即圓柱，如圖76，它的體積為 $\pi r^2 h$ 。錐形分兩種，一曰方錐，二曰委粟。方錐即四角錐，如圖77，它的體積為 $\frac{abh}{3}$ 。委粟即圓錐，宋李籍九章算術音義說：「委，積也」。本章設問，分「委粟」平地，「委菽」依垣，「委米」依垣內角諸種，即它們的形狀，一為圓錐，一為圓錐的一半，一為圓錐的四分之一。委粟如圖78，它的體積為 $\frac{\pi r^2 h}{3}$ 。

截錐體分兩種，一曰方亭，二曰圓亭。方亭即平截角錐，如圖79，它的體積為 $\frac{(a^2 + b^2 + ab)h}{3}$ 。圓亭即平截圓錐，亦稱圓臺，如圖80，它的體積為 $\frac{\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h}{3}$ 。

截矩體是分截矩體(方堡壩)所成的塹塔，陽馬，甃臚諸形。塹塔，按宋李籍九章算術音義說：「塹塔，塹上疊也」。如圖81，AB為塹塔的長，BC為寬，BF為高。由五個平面圍合所成，各面的角，除 $\widehat{FAB}$ ， $\widehat{AFB}$ ， $\widehat{EDC}$ ， $\widehat{DEC}$ 外，其餘諸角，都是直角。塹塔的體積為矩體之半，即 $\frac{abh}{2}$ 。若以平面過三點FCD分割塹塔，得體FBADC，名曰陽馬；體EFCD，名曰甃臚。陽馬如圖82，AB為陽馬的長，BC為寬，BF為高。陽馬和方錐相像，但陽馬頂偏居於一隅，方錐頂位在於中央。陽馬也由五個平面圍合所成，各面的角，除 $\widehat{FDC}$ ， $\widehat{FDA}$ ， $\widehat{FCB}$ ， $\widehat{FAB}$ ，及聚於點F的四角外，其餘諸角都是直角。陽馬的體積為 $\frac{abh}{3}$ ，即它的體積為矩體三分之一，亦為塹塔三分之二。若以平面過三點FDB分割陽馬，就得兩體FDBC和FDBA，都成甃臚。甃臚如圖83，魏劉徽九章算術注說：「臚者，臂骨也。半陽馬，其形有似臚肘，故以名云」。圖中DC為甃臚的下寬，EF為上長，CE為高。由四個平面圍合所成。各面的角，除 $\widehat{FED}$ ， $\widehat{FEC}$ ， $\widehat{DCE}$ ， $\widehat{DCF}$ 是直角外， $\widehat{DEC}$ ， $\widehat{FCE}$ 及聚於點D點F的六角，都非直角。甃臚的體積為 $\frac{abh}{6}$ ，即它的體積為陽

馬之半。合兩甕腦成一陽馬。也就是說，甕腦的體積為矩體六分之一，亦為塹堵三分之一。

棧臺亦稱角臺。其中有一種，叫做芻童，如圖84，下底和上底都是矩形，四旁都是梯形，兩底互相平行。它的體積為 $\{a(2b+d)+c(2d+b)\} \frac{h}{6}$ 。宋李籍九章算術音義

說：『「芻童」之形，如倒置研石，「冥谷」之形，如正置研石』。細閱本章設問的廣袤數值，芻童與冥谷皆上大下小。清李潢九章算術細草圖說，依着設問的廣袤數值繪圖，兩形全無區別。宋楊輝詳解九章算法纂類改芻童為上小下大，冥谷為上大下小。清顧觀光九數存古亦依楊氏所說。楔形為五個平面所圍合的立體，分為兩種：一曰芻蕘，二曰羨除。芻蕘，據宋李籍九章算術音義說：『芻，刈草也。蕘，屋棟也。芻蕘之

形，似屋蓋上苫也』。如圖85，矩形 ABCD 為楔的底，亦稱背。兩梯形 ABFE 及 CDEF 為楔的面。EF 為楔的刃。刃的底的距離為楔的高。設以 a 表示底長， b 表示寬， c 表示刃長， h 表示高，就得芻蕘的體積為 $\frac{(2a+c)bh}{6}$ 。羨除是三面為梯形的楔形，據

宋李籍九章算術音義說：『羨，延也。除，道也。羨除，乃隧道也』。魏劉徽九章算術

注說：『羨除，隧道也。其所穿地，上平下邪，似兩甕腦夾一塹堵，即羨除之形』。如圖86，ABCD 與 ABFE 為兩梯形， $AB \parallel CD \parallel EF$ 。因而 CDEF 亦為梯形。羨除的上寬為 $AB=a$ ，下寬為 $EF=b$ ，末寬為 $CD=c$ 。羨除的長是 AB 與 CD 的距離 d ，深是 EF

至梯形 ABCD 的距離 h 。它的體積為 $\frac{(a+b+c)dh}{6}$ 。這個數值，和把全形分作句股形為

底的兩個角錐體及一個楔體的體積相同，亦和一個塹堵體積，少去梯形為底的兩個角錐體積相同。

第六均輸章，是管理糧食運輸均勻負擔的計算方法。魏劉徽注說：『按此均輸，猶均運也。令戶率出車，以行道日數為均，發粟為輸』。宋李籍九章算術音義說：『均，平也。輸，委也。以均平其輸委，故曰均輸』。本章內有關於等差級數和應用配分比例，連比例，混合比例諸問題。

第七盈不足章，是求各種二元聯立方程組的解答。盈不足的名詞，在隋書律歷志改稱曰「盈朒」。這類問題原有一定的形式。例如說 m 人共出 n 錢買物，已知每人出 a 錢，盈餘 b 錢；每人出 a' 錢，不足 b' 錢，問人數 m 及錢數 n 各是多少？依法得人數 $m = \frac{b+b'}{a'-a}$ ，錢數 $n = \frac{a'b+a'b'}{a'-a}$ 。這法在中世紀，印度人用「雙假借法」，即和這法相同。

應用這個法則以解方程 $f(x)=0$ ，假定 $x=a$ ，和原式相比較，盈餘 b ；再假定 $x=a'$ ，和原式相比較，不足 b' 。那麼得 x 的真值為 $\frac{ab'+a'b}{b+b'}$ 。用這法以解代數一次式可以完全無誤。若 $f(x)$ 不是一次式，所得的祇是近似值。本書中有二次式題一個，指數函數題二個，俱是用上法解答，故所得的數值都是近似值。

第八方程章，是求各種多元聯立一次方程組的解答。題中所含的元數，有二元三元四

元以至五元各種。計算方法是用籌算。含有二元的列二行，含三元的列三行，因此稱曰「方程」。現在代數中所稱「方程式」，即導源於此，而將意義更加推廣的。書中對於正負名詞，已大膽試用，並列負算於式前。所用解法，竟和十八世紀法國人柏佐所研究的相同，且大告成功。解聯立方程組法，在希臘雖有帶蕃都（275年頃），却比我國遲後了兩百多年，且不及我國的整齊。在印度那時也沒有相當於聯立方程組的解法。故方程的成立，是我國可誇耀於世界的偉大創作呢！

第九句股章，是討論關於句股弦的各種問題。句股術的本來目的是在測量。故它的應用即在測望高遠。書中使用了二次方程，並創立有句股容方術及句股容圓術諸公式。

二、孫子算經

我國算經，除周髀算經九章算術兩部以外，當以孫子算經為最古。隋書經籍志稱孫子算經二卷，甄鸞注。今傳本孫子算經三卷，卷首稱李淳風注釋。現今甄李兩注都已遺失。書中也未詳載著者名字和年代。夏侯陽算經序說：『五曹孫子，述作滋多。甄鸞劉徽為之詳釋』。張丘建算經序說：『夏侯陽之方倉，孫子之蕩杯』。由此可知孫子至遲，也必在夏侯陽張丘建以前。清初朱彝尊（1629—1709）疑本書是春秋時代吳孫子所著。但書中有『長安洛陽相去九百里』及『佛書二十九章，章六十三字』的話。故清戴震（1723—1777）斷言孫子是漢明帝時（58—75）以後的人。因長安是漢惠帝元年（公元前194年）始改的帝都，佛書始入中國是在漢明帝八年（65年）事。又書中載有『戶輸綿二斤八兩』的調法。戶調制是晉初（280年）開始實行的。由此可斷定孫子是在三國及晉代間，即在三世紀的人氏。

孫子算經今傳本，因歷代轉輾傳錄，致有增減，早已失去本來的面目。隋書律曆志引孫子算經載：『十忽為秒，十秒為毫』，『十圭為抄，十抄為撮，十撮為勺』。但今傳本却說：『十忽為一絲，十絲為一毫』，『六粟為一圭，十圭為一撮，十撮為一抄，十抄為一勺』。書中卷上「量之所起」節所談大數進法，和次節「凡大數之法」所談進法，前後互相矛盾，顯係後人所增竄。書中載有『棋局十九道』的題，但在三國時吳鄒淳著藝經，還說圍棋是十七道，想那亦非孫子的原文。宋太平御覽工藝部七引一行算法說：『萬萬積為載，數之極矣。或問之曰，何以數之為載？按孫子算經云，古者積錢。上至於天，天不能容；下至於地，地不能載。天不能蓋，地不能載，故名曰載』。查今傳本中並無這樣的話，想必為傳錄者所遺失。故清阮元（1764—1849）著疇人傳亦說道：『術數之書，類多附益。如卷末推孕婦所生男女，鄙陋荒誕，必非孫子正文，或恐傳習孫子者轉輾加增，失其本真』。

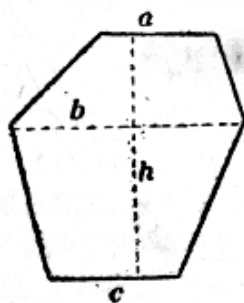
孫子算經為研究籌算最完備的參考書。卷首記載籌位，詳細解釋縱橫布算的意義；卷中說明命分籌算法及開平方術，都是它書沒有詳載的資料。書中有『婦人蕩淫』問題及『雉兔同籠』問題，這是大家所熟悉的遊戲算題。再有值得特別提出的，書中載有

『物不知數』問題，是後世『賸餘定理』的濫觴。這類問題到後來宋秦九韶稱它為大衍求一術，楊輝稱曰剪管術，俗稱曰秦王點兵，周密 (1232—1308) 稱曰鬼谷算，隔牆算。明程大位稱曰韓信點兵。我國人計算這類問題的方法，不但在歷代上有着崇高的地位，就是在今天，和外國數論裏關於一次同餘式的方法相比較，我們的方法也是非常具體，簡捷而優越的。在印度於 510 年頃有阿耶波多，528 年頃有波羅笈多所用的演算法，和我國的方法相仿。在西洋一直到十八世紀歐拉 (1707—1783)，才創立和我國相同的簡捷算法。故現在外國整數論者無不推重我國祖先這樣的偉大貢獻，特光榮地稱這定理曰『中國賸餘定理』。

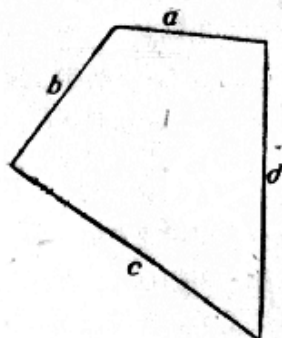
五、五曹算經

五曹算經今傳本五卷，沒有寫出作者的姓氏年代。隋書經籍志有『九章六曹算經一卷』的話。唐書藝文志載：『甄鸞五曹算經五卷，韓延五曹算經五卷，李淳風注五曹孫子等算經二十卷』。因五曹算經既載明甄鸞注，可知那書的著作必在北齊 (551 年) 以前。今書中略附載注言，卷首祇題有『李淳風注釋』字樣，不知這些注言，究竟是甄注，韓注或李注。按「曹制」就是分職理事的官署。在魏 (221—265) 晉 (280—419) 時代，公府職寮，分設有東曹西曹，及戶，金，集，倉，水，賊，法，兵，車，戎，馬等三十多曹。晉代以後，州郡掾屬亦都分曹理事。因此五曹算經可斷定是在魏晉時代，即三四世紀的作品。

五曹算經分五卷。卷一曰田曹，是計算各種形狀的田畝面積。其中有求鼓田，腰鼓田，蛇田，覆月田，牛角田，四不等田等面積的法子。各種田畝的邊界，不一定是直線形。因此比九章算術中所討論的更加推廣。鼓田如圖 87，它的面積為 $(a+b+c) \frac{h}{3}$ ，



鼓田 (圖 87)



四不等田 (圖 88)

這祇是近似值，正確地應為兩個梯形面積之和。四不等田，即四不等邊形的田，如圖 88，它的面積為 $\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$ ，這也是近似值，正確地應作對角線，將全形分成兩個三角形，求其和。卷二曰兵曹，是計算軍隊給養的問題。卷三曰集曹，是計算粟米互換的問題。卷四曰倉曹，是計算米糧的租稅和倉窖的容積。卷五曰金曹，是計算戶調的絲帛和物品的交易問題。

六、夏侯陽算經

隋書經籍志稱：『夏侯陽算經二卷』。舊唐書經籍志：『夏侯陽算經三卷，甄鸞注』。新唐書藝文志稱：『夏侯陽算經一卷，甄鸞注。又韓延夏侯陽算經一卷』。今傳本夏侯陽算經三卷，是韓延所傳。他并參入己說，增有序文。清戴震擬定韓延為隋初（581年）人。書中所說各條，有些是屬於後魏時（386—534）事。例如「定腳價」條說「從納洛州」，在魏書地形志說：『洛州，太宗置。太和十七年（493）改為司州，天平初（534）復』。又「分祿料」條說「太守十分，別駕七分」，在魏書食貨志亦說：『公田太守十頃，治中別駕八頃』。彼此所說的制度約略相同。再者夏侯陽算經序說：『五曹孫子，述作滋多，甄鸞劉微，為之詳釋』。卷上言「斛法不同」說：『宋元嘉二年（425），徐受重鑄，用二尺三寸九分；至大同元年（535）甄鸞校之，用二尺九寸二分。然異時事變，斗斛不同』。這樣看來，可知夏侯陽算經的著作，必在五曹算經和孫子算經之後，亦在劉微和甄鸞之後，至少或者是和甄鸞同時。惟既已說道「大同元年（535）」，那麼這書的著作，必在這年以後，無庸疑義。因此可斷定夏侯陽算經，是在後魏分成東西魏的時代，即六世紀中葉的作品。

夏侯陽算經今傳本三卷，分十二目。卷上談乘除法，辨度量衡。說斛法不同，課租庸調，論步數不等，變換米穀。卷中說求地稅，分祿料，計給糧，定腳價，稱輕重。卷下說諸分。這書在諸算經中最為簡要，且對於古今制度異同，足供參考。

夏侯陽算經中已用到「正負指數」的意義。例如說「十乘加一等，十乘加二等」，是表示 $10=10^1$ ， $100=10^2$ 。說「十除退一等，十除退二等」，是表示 $\frac{1}{10}=10^{-1}$ ， $\frac{1}{100}=10^{-2}$ 。又談到漏刻的數，引用了「十二進位法」，記載十二辰的分數，以「中半」表示 $\frac{1}{2}$ ，「太半」表示 $\frac{2}{3}$ ，「少半」表示 $\frac{1}{3}$ ，「弱半」表示 $\frac{1}{4}$ 。

七、張丘建算經

舊唐書稱：『張丘建算經一卷，甄鸞撰』。通考稱：『張丘建算經三卷，甄鸞注，李淳風注釋，劉孝孫細草』。張丘建算經中有署名清河張丘建的序文說道：『其夏侯陽之方倉，孫子之蕩杯，此等之術，皆未得其妙。故更造新術，推盡其理，附之於此』。由此可見張丘建算經的著作，必在孫子算經和夏侯陽算經之後。假令夏侯陽和甄鸞是在同時代或稍後，那麼張丘建算經必是甄鸞以後的著作。但這書有署稱甄鸞所注的，那麼甄鸞却又應在張丘建之後。這樣說來，夏侯陽張丘建和甄鸞很可能是同時代的人氏。他們的前後怎樣，或者無關於著作的年代呢。故張丘建算經可斷定是六世紀中的作品。

張丘建算經所討論的範圍，和九章算術相同。採集了九章的精華，更進步作研討。書中有關於「等差級數」的問題，所得的公式俱是很正確的。卷末有「百雞術」問題，就是求不定方程的整數解，尤屬膾炙於人口。這類問題，在世界各國中，以我國為最先