从高考到全国数学联赛一试专题讲座丛书

不等式的结构及应用

◎ 叶勇贵 李 盛 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

从高考到全国数学联赛一试专题讲座丛书

不等式的结构及应用

叶勇贵　李　盛　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不等式的结构及应用/叶勇贵,李盛编著.—杭州:浙江大学出版社,2011.4

ISBN 978-7-308-08515-1

Ⅰ.①不… Ⅱ.①叶…②李… Ⅲ.①不等式 Ⅳ.①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第048667号

不等式的结构及应用

叶勇贵 李 盛 编著

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 8.5
字　　数 207千
版 印 次 2011年4月第1版 2011年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-08515-1
定　　价 16.00元

目　录

CONTENTS

第一章　不等式的基本性质

同等量关系一样，不等量关系也是自然界中存在着的基本数学关系，它们不仅在现实世界和日常生活中大量存在，而且在数学研究和数学应用中也起着重要的作用.

用数学的眼光看世界，到处都蕴含着不等关系，如：

问题1　将 a 千克白糖制成 b 千克糖水（$b>a>0$），其浓度为 $\frac{a}{b}$；若再添上 m 千克白糖（$m>0$），则此糖水就变甜了.由此常识我们可归纳出一个不等式 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$（$b>a>0,m>0$）.

问题2　建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但按采光标准，窗户面积与地板面积的比应不小于10%，并且这个比越大，住宅的采光条件越好.请问同时增加相等的窗户面积和地板面积，住宅的采光条件是变好了，还是变坏了？

分析　设原住宅的窗户面积和地板面积分别为 a,b（面积单位），同时增加的面积为 m（面积单位），则问题就转化为在约束条件 $0<a<b\leqslant 10a$ 及 $m>0$ 下，比较 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的大小，由问题1中归纳出的不等式 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$，知采光条件变好了.

可见在世界上所有的事物中，不等是绝对的，相等是相对的，世界因等与不等的交错而美丽着.

知识扫描

1. 有序性.实数与数轴上的点是一一对应的，在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

例如，在图1-1中，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 $a>b$.

图1-1

2. 不等式的基本性质：

① （传递性）$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

② （加法单调性）$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

③ （乘法单调性）$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

④ （相加法则）$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

⑤ （相减法则）如果 $a>b$ 且 $c<d\Rightarrow a-c>b-d$

⑥ （相乘法则）$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

⑦（相除法则）如果 $a>b>0$ 且 $0<c<d\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

⑧（乘方法则）$a>b>0,n\in\mathbf{N},n>1\Rightarrow a^n>b^n$.

应用这些不等式的性质时，要特别注意不等式性质成立的条件.

思考　当 n 是奇数时，$a>b,n\in\mathbf{N},n>1\Rightarrow a^n>b^n$；$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 成立吗？当 n 是偶数呢？

3. 比较两数大小的基本方法为：求差与求商.

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

$a>0,b>0$，且 $\frac{a}{b}>1\Rightarrow a>b$；$a<0,b<0$，且 $\frac{a}{b}>1\Rightarrow a<b$.

这是比较两个实数大小的主要依据.

范例精析

例 1　比较 $(x+1)^3$ 与 $1+3x$ 的大小.

解　作差 $(x+1)^3-(1+3x)$

$=1+3x+3x^2+x^3-(1+3x)$

$=3x^2+x^3=x^2(x+3)$

当 $x<-3$ 时，$x^2(x+3)<0$，$(x+1)^3<1+3x$

当 $x=-3$ 或 $x=0$ 时，$x^2(x+3)=0$，$(x+1)^3=1+3x$

当 $-3<x<0$ 或 $x>0$ 时，$x^2(x+3)>0$，$(x+1)^3>1+3x$

评析：由于 $x^2(x+3)$ 的符号不能直接确定，必须分类讨论.我们令 $x^2(x+3)=0$，得 $x=0,-3$，于是将 $0,-3$ 作为分界点，按照 $x<-3$，$-3<x<0$，$x>0$，$x=0,-3$ 进行分类讨论.

例 2　根据下列 x 的取值范围，求 $\frac{1}{x}$ 的取值范围.

(1) $-3\leqslant x\leqslant -2$；(2) $-3<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$；(3) $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$.

解　(1) 因为 $-3\leqslant x\leqslant -2$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant-\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{x}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]$.

(2) $-3<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$，即 $-3<x<0$ 或 $0<x\leqslant 2$，所以 $\frac{1}{x}<-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{x}$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{3})\cup[\frac{1}{2},+\infty)$.

(3) 因为 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$，即 $-2\leqslant x<0$ 或 $x>0$，所以 $\frac{1}{x}\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{x}>0$，

所以 $\frac{1}{x}$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(0,+\infty)$.

例 3　求函数 $y=\sin x+\frac{2011}{\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值.

分析　猜测：$\sin x=1$ 时，函数取到最小值 $y=2012$，于是问题转化为

当 $0<x<\pi$ 时，不等式 $\sin x+\frac{2011}{\sin x}\geqslant 2012$ 恒成立且等号能取到.

解　由于 $0<\sin x\leqslant 1$，所以 $\sin x+\frac{2011}{\sin x}\geqslant 2012\Leftrightarrow\sin^2x-2012\sin x+2011\geqslant 0$

$\Leftrightarrow(\sin x-1)(\sin x-2011)\geqslant 0$

后一不等式显然成立，且等号在 $\sin x=1$ 时取到．可见 $y_{\min}=2012$．

评析：一般地，函数 $y=\sin x+\dfrac{m}{\sin x}(0<x<\pi)$的最值：当 $m\geqslant 1$ 时，$y_{\min}=1+m$；当 $m\leqslant -1$ 时，$y_{\max}=1+m$．

例 4　设 $a_1\approx\sqrt{2}$，$a_2=1+\dfrac{1}{1+a_1}$，证明$\sqrt{2}$介于 a_1 与 a_2 之间．

分析　当 $x_1<x_2$ 时，$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0$，因此，这里我们只要证明$(\sqrt{2}-a_1)(\sqrt{2}-a_2)<0$ 即可．

证明　$(\sqrt{2}-a_1)(\sqrt{2}-a_2)=(\sqrt{2}-a_1)(\sqrt{2}-1-\dfrac{1}{1+a_1})=\dfrac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-a_1)^2}{1+a_1}<0$

这说明$\sqrt{2}$介于 a_1 与 a_2 之间．

评析：类似地，可证：

(1) 若$\dfrac{1}{2}<x<2$，则 $x+\dfrac{1}{x}<\dfrac{5}{2}$．

证　因为$\dfrac{1}{2}<x<2$，所以 $x-\dfrac{1}{2}>0$，$x-2<0$，于是$(x-\dfrac{1}{2})(x-2)<0$，即 $x^2-\dfrac{5}{2}x+1<0$，两边同除以 x，得 $x-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{x}<0$，变形后即得 $x+\dfrac{1}{x}<\dfrac{5}{2}$

(2) 若 $a>b>0$，$a>b>0$，$a+b\geqslant\dfrac{5}{9}$，$ab\leqslant\dfrac{4}{81}$，则 $a\geqslant\dfrac{4}{9}$．

证明　易知 $\left(a-\dfrac{4}{9}\right)\left(b-\dfrac{4}{9}\right)$

$$=ab-\frac{4}{9}(a+b)+\frac{16}{81}$$

$$\leqslant\frac{4}{81}-\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{16}{81}=0.$$

又因为 $a-\dfrac{4}{9}>b-\dfrac{4}{9}$，所以，$a-\dfrac{4}{9}\geqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{4}{9}$．

例 5　4 枝郁金香与 5 枝丁香花的价格之和小于 22 元，而 6 枝郁金香与 3 枝丁香花的价格之和大于 24 元，则 2 枝郁金香与 3 枝丁香花的价格比较结果是　　(　　)

A．2 枝郁金香贵　　B．3 枝丁香花贵　　C．相同　　D．不能确定

丁香花

郁金香

解　设一枝郁金香与一枝丁香花的价格分别为 x、y 元，则 $4x+5y<22$，$6x+3y>24$，令 $a=4x+5y$，$b=6x+3y$，则 $2x-3y=2(b-a)>0$，所以选 A．

评析：这里令 $a=4x+5y$，$b=6x+3y$，用的是整体处理的思想方法．如果先求出 x、y 的取值范围，再来确定 $2x-3y$ 的值，结果不一定正确．

例 6 （2010 年河南省高一数学竞赛试题）

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图 1－2，试判断 $3|a|+|c|$ 与 $2|b|$ 的大小关系为：$3|a|+|c|$________$2|b|$．(用等号或不等号连接)

解 由图像可知，$a<0$，$b>0$，$c<0$，

又 $a+b+c>0$，$-\dfrac{b}{2a}>1$，即 $2a+b>0$，于是可 $3a+2b+c>0$，

$3|a|-2|b|+|c|=-3a-2b-c<0$，故填$<$号．

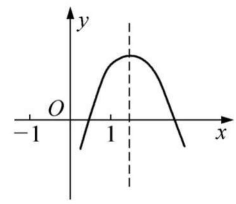

图 1－2

例 7 设正数 a、b、c 满足 $bc>a$，$ca>b$，$ab>c$，

(1) 比较 a、b、c 与 1 的大小关系；

(2) 求证 $|\lg^2 a+\lg^2 b-\lg^2 c|<2\lg a\lg b$．

解 (1) 因为 a、b、c 都是正数，两不等式 $bc>a$，$ca>b$ 相乘得 $bc^2a>ab$，有 $c^2>1$，解得 $c>1$；同理 $a>1$，$b>1$．

(2) 前面已证：$a>1$，$b>1$，$c>1$，所以 $\lg a>0$，$\lg b>0$，$\lg c>0$，且由 $bc>a$，$ca>b$，$ab>c$，得

$$\lg a+\lg b>\lg c,\lg b+\lg c>\lg a,\lg c+\lg a>\lg b$$

因此，以 $\lg a$，$\lg b$，$\lg c$ 为三边能组成一个三角形，记 $\lg c$ 所对的角为 C，则由余弦定理

$$\lg^2 a+\lg^2 b-\lg^2 c=2(\lg a\lg b)\cos C$$

由于 $0\leqslant|\cos C|<1$，所以 $|\lg^2 a+\lg^2 b-\lg^2 c|=|2\lg a\lg b\cos C|<2\lg a\lg b$．

例 8 现有 A、B、C、D 四个长方体容器，它们的底面积和高分别为 a^2，a；a^2，b；b^2，a；b^2，b(其中 $a\neq b$)．规定一种两人参加的游戏，其规则是：每人一次从四个容器中取出两个，盛水多者为胜，问先取者有没有必胜的方案？若有的话有几种？

分析 由题意，易知 A、B、C、D 四个容器的容积分别为 a^3，a^2b，ab^2，b^3．四个容器平均分成两组只有三种情况：A、B 和 C、D；A、C 和 B、D；A、D 和 B、C，因此问题的实质是比较容积两两和的大小．

解 (1) 若先取 A、B，则后取者只能取 C、D，

$$(a^3+a^2b)-(ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)^2$$

显然 $a+b>0$，$(a+b)^2>0$，而 a 与 b 的大小不确定，$(a-b)(a+b)^2$ 的正负不能确定，即 a^3+a^2b 与 ab^2+b^3 的大小不定，这种取法无必胜的把握．

(2) 若先取 A、C，则后取者只能取 B、D，

$$(a^3+ab^2)-(a^2b+b^3)=(a-b)(a^2+b^2)$$

类似于(1) 的分析，知这种取法也无必胜的把握．

(3) 若先取 A、D，则后取者只能取 B、C，

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)$$

已知 $a\neq b$，所以$(a-b)^2(a+b)>0$，即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$

故先取 A、D 是唯一必胜的方案．

例 9　有三个新兴城镇，分别位于 A,B,C 三点处，且 $AB=AC=13\text{km}$，$BC=10\text{km}$．今计划合建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处(建立坐标系如图 1－3)，若希望点 P 到三镇的最远距离为最小，点 P 应位于何处？

解　由题意 A 点坐标为 $(0,12)$．设点 P 的坐标为 $(0,y)$，则 P 至三镇的最远距离为

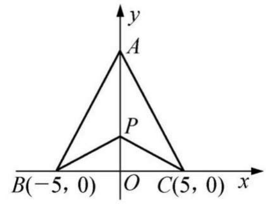

图 1－3

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2}, & \sqrt{25+y^2}\geqslant|12-y|\\ |12-y|, & \sqrt{25+y^2}<|12-y|\end{cases}$$

由 $\sqrt{25+y^2}\geqslant|12-y|$，解得 $y\geqslant\dfrac{119}{24}$，记 $y^*=\dfrac{119}{24}$，于是

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2}, & y\geqslant y^*\\ |12-y|, & y<y^*\end{cases}$$

因为 $\sqrt{25+y^2}$ 在 $[y^*,+\infty)$ 上是增函数，而 $|12-y|$ 在 $(-\infty,y^*]$ 上是减函数．故当 $y=y^*$ 时，函数 $g(y)$ 取得最小值．

答：点 P 的坐标是 $\left(0,\dfrac{119}{24}\right)$．

例 10　(2008 年湖南省高中数学竞赛试题)设实数 $a,b\in[\alpha,\beta]$，求证：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$，其中等号当且仅当 $a=\alpha,b=\beta$ 或 $a=\beta,b=\alpha$ 时成立，这里 α,β 为正实数．

证明　由于正实数 $a,b\in[\alpha,\beta]$，所以 $\alpha\leqslant a\leqslant\beta,\alpha\leqslant b\leqslant\beta$，故 $\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}$，所以 $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqslant0$，即

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{b}{a}+1\leqslant0$$

两边同除 $\dfrac{b}{a}$，得

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$，其中等号仅当 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，或 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ 时成立，即 $a=\alpha,b=\beta$ 或 $a=\beta,b=\alpha$ 成立．

评析：根据不等式的基本性质，这里巧妙地将问题进行了整体处理，避免了繁琐的分类讨论．

例 11　已知二次函数 $f(x)=ax^2+x\ (a\in\mathbf{R},a\neq0)$，求证：当 $a>0$ 时，对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，

解　作差得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$
$$=a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

$=a(\frac{x_1+x_2}{2})^2-\frac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2)=a(\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}-\frac{2x_1^2+2x_2^2}{4})$

$=a\frac{-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2}{4}=-a(\frac{x_1-x_2}{2})^2\leqslant 0$(因为 $a>0$),

即有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

评析:上面我们实际上已证明了函数 $f(x)$为下凸函数.

例 12 比较 $a=\frac{13}{6}$,$b=\log_3 10$,$c=\log_4 20$ 的大小.

解 首先,$a>c\Leftrightarrow\frac{13}{6}>\log_4 20\Leftrightarrow 4^{\frac{13}{6}}>20\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{6}}>\frac{5}{4}\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{3}}>\frac{5}{4}\Leftrightarrow 2>\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}\Leftrightarrow 2\times 64=128>125$,成立!其次,我们来证明:$b<\frac{15}{7}<c$.

$$b<\frac{15}{7}\Leftrightarrow\log_3 10<\frac{15}{7}\Leftrightarrow 3^{\frac{15}{7}}>10\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{7}}>\frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3>\frac{10^7}{9^7}$$

$$=\frac{10000000}{4782969}\Leftrightarrow 3\times 4782969>10^7,\text{成立!}$$

$c>\frac{15}{7}\Leftrightarrow\log_4 20>\frac{15}{7}\Leftrightarrow 4^{\frac{15}{7}}<20\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{7}}<\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4^8<5^7\Leftrightarrow 65536<78125$,成立!

综上,有 $a>c>b$.

评析:在 b 与 c 之间插入一个数$\frac{15}{7}$,是判定 b 与 c 之间的大小关系的关键.

例 13 (2010 年全国高中数学联赛(吉林赛区)预赛试题改编)

(1) 设 $x>0$,$y>0$,比较$\frac{x^2}{x+y}$和$\frac{3x-y}{4}$的大小;

(2) 设 $x>0$,$y>0$,$z>0$,比较$\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{y+z}+\frac{z^3}{z+x}$和$\frac{xy+yz+zx}{2}$的大小.

证明 (1) 因为$\frac{x^2}{x+y}-\frac{3x-y}{4}=\frac{(x-y)^2}{4(x+y)}\geqslant 0$,所以$\frac{x^2}{x+y}\geqslant\frac{3x-y}{4}$.

(2) 由(1)得$\frac{x^3}{x+y}\geqslant\frac{3x^2-xy}{4}$.

类似的$\frac{y^3}{y+z}\geqslant\frac{3y^2-yz}{4}$,$\frac{z^3}{z+x}\geqslant\frac{3z^2-zx}{4}$,

所以$\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{y+z}+\frac{z^3}{z+x}\geqslant\frac{3x^2-xy+3y^2-yz+3z^2-zx}{4}$

$=\frac{3(x^2+y^2+z^2)-xy-yz-zx}{4}$

$\geqslant\frac{3(xy+yz+zx)-xy-yz-zx}{4}$

$=\frac{xy+yz+zx}{2}$.

例 14　解不等式组

$$\begin{cases} a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0, \\ a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0, \\ \cdots \\ a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0, \\ a_1=1. \end{cases}$$

分析　将前 100 个式子相加得 $0\geqslant 0$,这说明前 100 个式子都只能取等号,即

$$\begin{cases} a_1-a_2=2(a_2-a_3) \\ a_2-a_3=2(a_3-a_4) \\ \cdots \\ a_{100}-a_1=2(a_1-a_2) \\ a_1=1 \end{cases} \qquad (1)$$

将(1)中前 100 个式子相乘得:

$$(a_1-a_2)\cdot(a_2-a_3)\cdots(a_{100}-a_1)(1-2^{100})=0,$$

所以 $a_1=a_2$,或 $a_2=a_3$,…,或 $a_{100}=a_1$,

不妨设 $a_1=a_2$,代入(1)得 $a_1=a_2=\cdots=a_{100}=1$.

评析:不等式(方程)组的各式紧密联系着,当孤立地看某一不等式(方程)较难入手时,往往要将其中的一部分或全部相加、减、乘、除等以取得整体认识,进而获得求解的途径.

当题目的结论整体性很强,而从局部并不容易去思考,这时,我们常常把结论的对象看做一个整体,并从整体上去研究结论的特征,从而获得解题的方法,如例 14,下面再举一例:

例 15　今有男女各 $2n$ 人,围成内外两圈跳邀请舞,每圈各 $2n$ 人,有男有女,跳舞规则如下:每当音乐一起,如面对面是一男一女,则男的邀请女的跳舞,如果均是男的,或者均是女的,则鼓掌助兴,曲终时,外圈的人均向前一步,如此继续,试证:在整个跳舞过程中,至少有一次起舞的男女不小于 n.

分析　我们不能局限在哪一次起舞的过程,也没有办法去确定哪一次起舞的男女不小于 n 对,只能对本题的结果整体思考.

我们设内圈的人为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$,外圈的人为 $y_1,y_2,\cdots,y_{2n}$,并设男的为$+1$,女的为-1.有了以上的赋值,可以使问题数学化.

考查 x_iy_i,

若 x_i 和 y_i 都是男的或者都是女的,依题设,则不起舞,此时有 $x_iy_i=+1>0$.

若 x_i 和 y_i 一是男的,一是女的,依题设,则起舞,此时有 $x_iy_i=-1<0$.

考虑结论的整体,假定每次起舞都小于 n 对,即结论不成立,我们可寻求可能发生的矛盾.

由于总对数为 $2n$ 对,若每次起舞者都小于 n 对,则起舞者小于不起舞者,于是有

$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{2n}y_{2n}>0$

$x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_{2n}y_1>0$

……

$x_1 y_{2n-1}+x_2 y_n+\cdots+x_{2n}y_{2n-2}>0$

$x_1 y_{2n}+x_2 y_1+\cdots+x_{2n}y_{2n-1}>0$

将以上 $2n$ 个不等式相加得

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{2n})(y_1+y_2+\cdots+y_{2n})>0 \tag{1}$$

下面针对(1)式,研究 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}$ 和 $y_1+y_2+\cdots+y_{2n}$.

设内圈有 k 个男的,则有 $2n-k$ 个女的,此时外圈有 $2n-k$ 个男的,k 个女的.

于是

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=k\cdot(+1)+(2n-k)\cdot(-1)=2k-2n.$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{2n}=(2n-k)\cdot(+1)+k\cdot(-1)=2n-2k$$

两式相乘得

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+\cdots+x_{2n})(y_1+y_2+\cdots+y_{2n})\\=&-4(n-k)^2\leqslant 0\end{aligned} \tag{2}$$

式(1)与式(2)矛盾.

于是,一定有一次起舞的男女不少于 n 对.

佳题赏析

问题(2010 年江苏省高考试题)

设实数 x,y 满足 $3\leqslant xy^2\leqslant 8$,$4\leqslant\frac{x^2}{y}\leqslant 9$,则$\frac{x^3}{y^4}$的最大值是________.

解法 1 观察条件式与被求式的结构得

$$\frac{x^3}{y^4}=\frac{\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}{x\cdot y^2}.$$

由 $3\leqslant xy^2\leqslant 8$,$4\leqslant\frac{x^2}{y}\leqslant 9$ 得

$$\left(\frac{x^3}{y^4}\right)_{\max}=\frac{\left(\frac{x^2}{y}\right)^2_{\max}}{(x\cdot y^2)_{\min}}=\frac{81}{3}=27,$$

当且仅当$\begin{cases}\frac{x^2}{y}=9\\x\cdot y^2=3\end{cases}$,即$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$时取到最大值.

解法 2 由条件易得 $x>0$,$y>0$,故对条件式和被求式取对数得

$$\lg 3\leqslant\lg x+2\lg y\leqslant 3\lg 2,2\lg 2\leqslant 2\lg x-\lg y\leqslant 2\lg 3;\lg\frac{x^3}{y^4}=3\lg x-4\lg y.$$

令 $m=\lg x$,$n=\lg y$,$t=\lg\frac{x^3}{y^4}=3\lg x-4\lg y$,利用等价转化,原来问题等价于:已知

$$\begin{cases}\lg 3\leqslant m+2n\leqslant 3\lg 2,\\2\lg 2\leqslant 2m-n\leqslant 2\lg 3,\end{cases}$$

求 $t=3m-4n$ 的最大值.

令 $3m-4n=x(m+2n)+y(2m-n)$,化简得 $3m-4n=(x+2y)m+(2x-y)n$,所以

$$\begin{cases}x+2y=3,\\y-2x=4\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$$

即 $$3m-4n=2(2m-n)-(m+2n).$$

所以 $[3m-4n]_{max}=2[2m-n]_{max}-[m+2n]_{min}=4\lg 3-\lg 3=\lg 27$,当且仅当 $\begin{cases}2m-n=2\lg 3,\\m+2n=\lg 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\lg 3,\\n=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$ 时成立.

根据函数 $y=\lg x$ 的单调性,得 $\left(\dfrac{x^3}{y^4}\right)_{max}=27$.

解法 3　同解法 2,题目等价转化为

已知 $\begin{cases}\lg 3\leqslant m+2n\leqslant 3\lg 2\\2\lg 2\leqslant 2m-n\leqslant 2\lg 3\end{cases}$,求 $t=3m-4n$ 的最大值.

利用线性规划的知识可知,满足这些条件的点 (m,n) 的区域为图 1-4 中的阴影部分.可以求得 $A(\lg 3,0)$,当直线 l 过点 A 时,$t_{max}=3\lg 3-4\times 0=\lg 27$,又函数 $y=\lg x$ 单调递增,故 $\left(\dfrac{x^3}{y^4}\right)_{max}=27$.

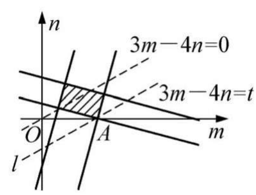

图 1-4

解法 4　由于 $\dfrac{x^3}{y^4}=\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2\div(xy^2)$,

令 $xy^2=u$,$\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2=v$,

则 $3\leqslant u\leqslant 8$,$16\leqslant v\leqslant 81$,

建立直角坐标系 uOv,

利用线性规划知识,作出可行域,将 $\dfrac{u}{v}$ 看作点 (u,v) 与原点 O 连线的斜率,即得 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的最大值为 27.

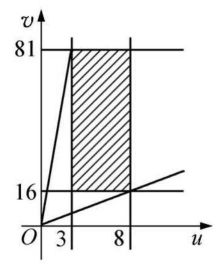

图 1-5

能力训练1

1. 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,$c>d$,则下列结论中正确的是　(　　)

　A. $a+c>b+d$　B. $a-c>b-d$　C. $ac>bd$　D. $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $a-|b|>0$,则下列不等式中正确的是　(　　)

　A. $b-a>0$　　B. $a^3+b^3<0$

　C. $a^2-b^2<0$　　D. $b+a>0$

3. (2009 年高考四川理科卷试题)已知 a,b,c,d 为实数,且 $c>d$.则"$a>b$"是"$a-c>b-d$"的　(　　)

　A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $a>b>0$，则下列不等式中总成立的是 ( )

A. $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$　　B. $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$

C. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　D. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$

5. (2010年浙江省文理科高考试题)设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则"$x\sin^2 x<1$"是"$x\sin x<1$"的( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. (2010年安徽省文科高考试题)设 $a=(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}$，$b=(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}$，$c=(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，则 a,b,c 的大小关系是 ( )

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

7. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $b(a+b+1)<0$，$b(a+b-1)<0$，则 ( )

A. $a>1$　　B. $a<-1$　　C. $-1<a<1$　　D. $|a|>1$

8. (2008年浙江省高中数学竞赛试题)当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\frac{x}{\lg x}$，则下列大小关系正确的是 ( )

A. $f^2(x)<f(x^2)<f(x)$　　B. $f(x^2)<f^2(x)<f(x)$

C. $f(x)<f(x^2)<f^2(x)$　　D. $f(x^2)<f(x)<f^2(x)$

9. (2009年浙江省高考理科试题)对于正实数 α，记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_2>x_1$，有 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$. 下列结论中正确的是 ( )

A. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)g(x)\in M_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$

B. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，且 $g(x)\neq 0$，则 $\frac{f(x)}{g(x)}\in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$

C. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$

D. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，且 $\alpha_1>\alpha_2$，则 $f(x)-g(x)\in M_{\alpha_1-\alpha_2}$

10. 设 $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$，则对任意正整数 $m,n(m>n)$，都成立的是 ( )

A. $|a_n-a_m|<\frac{m\cdot n}{2}$　　B. $|a_n-a_m|>\frac{m-n}{2}$

C. $|a_n-a_m|<\frac{1}{2^n}$　　D. $|a_n-a_m|>\frac{1}{2^n}$

11. 已知 $a=3^{55}$，$b=4^{44}$，$c=5^{33}$，则 a、b、c 的大小关系是________

12. 已知：$-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$，则 $y-x$ 的取值范围为________.

13. (2006年上海春季高考试题)同学们都知道，在一次考试后，如果按顺序去掉一些高分，那么班级的平均分将降低；反之，如果按顺序去掉一些低分，那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为：若有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则________________(结论用数学式子表示).

14. 如果 $30 < x < 48, 16 < y < 24$，则 $\frac{x}{y}$ 的取值范围为________________.

15. (2010年辽宁省理科高考试题)已知 $-1 < x + y < 4$ 且 $2 < x - y < 3$，则 $z = 2x - 3y$ 的取值范围是________(答案用区间表示)

16. 设实数 x, y 满足 $1 \leqslant xy^2 \leqslant 2, 3 \leqslant \frac{x^2}{y} \leqslant 4$，则 x 的最大值是________.

17. (2010年浙江省高中数学竞赛试题)设锐角三角形 ABC 的边 BC 上有一点 D，使得 AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个等腰三角形，试求 $\triangle ABC$ 的最小内角的取值范围为________.

18. (2010福建省高考理科试题)设不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - 2y + 3 \geqslant 0 \\ y \geqslant x \end{cases}$ 所表示的平面区域是 Ω_1，平面区域 Ω_2 与 Ω_1 关于直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 对称，对于 Ω_1 中的任意一点 A 与 Ω_2 中的任意一点 B，$|AB|$ 的最小值等于________.

19. (2008年浙江省高中数学竞赛试题)设实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 2b - 2 = 0$ 有两个相异实根，其中一根在区间 $(0,1)$ 内，另一根在区间 $(1,2)$ 内，则 $\frac{b-4}{a-1}$ 的取值范围是________.

20. 若存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足
$a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant a_1 < 2, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n,$
$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant n^2$
则正整数 n 的所有可能的值为________.

21. 已知 x、y 是不相等的正数，且 $x^3 - y^3 = x^2 - y^2$，求证：$1 < x + y < \frac{4}{3}$.

22. 甲乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点，甲有一半时间以速度 m 行走，另一半时间以速度 n 行走；乙有一半路程以速度 m 行走，另一半路程以速度 n 行走. 如果 $m \neq n$，问：甲乙两人谁先到达指定地点？若 $m = n$，结果又会怎样？

23. (2010年上海市高考文科试题)若实数 x、y、m满足 $|x-m|<|y-m|$,则称 x 比 y 接近 m.

(1) 若 x^2-1 比 3 接近 0,求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a、b,证明:a^2b+ab^2 比 a^3+b^3 接近 $2ab\sqrt{ab}$.

24. (2010年浙江省温州市摇篮杯高一数学竞赛试题)已知正实数 x,y,设 $a=x+y$, $b=\sqrt{x^2+7xy+y^2}$.

(1) 当 $y=1$ 时,求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围;

(2) 若以 a,b 为三角形的两边,第三条边长为 c 构成三角形,求 $\frac{c^2}{xy}$ 的取值范围.

25. (2008年北京大学自主招生数学试题)已知 $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$, $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1$,若 $\min\{a_1,a_2,a_3\}\leqslant\min\{b_1,b_2,b_3\}$,求证:$\max\{a_1,a_2,a_3\}\leqslant\max\{b_1,b_2,b_3\}$.