高中数学选修课程

HIGH SCHOOL MATHEMATICS

高中数学必修知识
拓展与引申

□ 张金良 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学必修知识拓展与引申

主　编　张金良
编　委　景　芳　徐陈旭　黄宗巧　李惟峰
朱成万　李刚豪　毛美生　沈　亚
沈军波　周海军　张晓东

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学必修知识拓展与引申 / 张金良主编. —杭州：浙江大学出版社，2014. 9

ISBN 978-7-308-13750-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 198665 号

高中数学必修知识拓展与引申

张金良　主编

责任编辑　沈国明
文字编辑　吴　慧
封面设计　杭州林智广告有限公司
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州林智广告有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　23
字　　数　589 千
版 印 次　2014 年 9 月第 1 版　2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-13750-8
定　　价　40. 00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：（0571）88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

前　言

随着课程改革的深入推进，让不同的人学习不同的数学为越来越多的人所认同，选修性学习为当今世界的大势所趋。然而，目前我国的课程资源不足，介于自主招生与全国数学竞赛一试的资源十分缺乏。为了满足一大批优秀学生的学习需要，我们请了长期在一线任教的名优教师编写本册《高中数学必修知识拓展与引申》，旨在提升未来打算在理工类领域发展的学生的数学素养。本书编写时，立足知识拓展的高度，以先进的教学思想为指导，梳理了高中数学中最核心的知识，将数学中精典的内容作一拓展，选编力求解题方法具有一定代表性，做到内容新颖，解法简捷，分析到位，能起到画龙点睛的作用，知识深度不超自主招生水平，但接近全国联赛一试水平。本书作者按章节目录依次为景芳(第 1 章)、徐陈旭(第 2 章)、黄宗巧(第 3 章)、李惟峰(第 4 章)、朱成万(第 5 章)、李刚豪(第 6 章)、毛美生(第 7 章)、沈亚(第 8—11 章)、沈军波(第 9—14 章)、周海军(第 15—18 章)、张晓东(第 19—22 章)。全书由张金良策划、组稿、统稿。由于时间仓促，难免有疏漏之处，敬请广大读者指正。

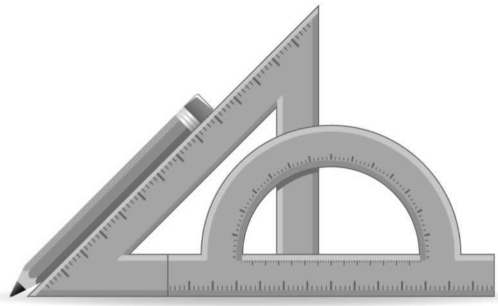
目　录

CONTENTS

一　代数篇

二　立体几何篇

三　圆锥曲线篇



一 代数篇

第1章　集　合

集合是康托尔在1874年提出的.20世纪初,由于集合悖论的出现,不同的公理集合论如雨后春笋般迅速产生,Sklem和A. P. Morse的公理体系的变形把整个集合理论建立在8个公理和一个公理图之上,不用公理描述的集合论称为朴素集合论.朴素集合论不能定义,只能描述,否则会产生悖论.课标教材对集合概念与运算作了粗略的介绍.

本章试图作一适度的拓展,使有兴趣的学生能更全面地了解集合.本章的主要内容是集合基本运算的拓展、集合的差集与积集、集合的分划、简单的容斥原理、奇妙的无限集等.在必修课程中学过的一些记号、术语、概念和公式,本书不再叙述.

1.1　集合基本运算的拓展

集合语言是现代数学的基本语言,只有将集合作为一种语言来学习,能使用最基本的集合语言表示有关的数学对象,才能夯实运用数学语言进行交流的基础.集合的基本运算有交集、并集、补集,韦恩图也可以表示集合的运算,它提供了图形语言与集合语言相互转换的机会.集合的交、并、补运算与简易逻辑中的且、或、非之间存在着联系.集合运算与两个集合之间的关系也存在联系,如

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

设A、B是集合U的子集,则$A\cap \complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq \complement_U A\cup B=U\Leftrightarrow A\subseteq B$.

下面,我们对集合交、并、补的综合应用作一拓展.

【例1】 $A=\{x\mid x^2-5x+4=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$,$C=\{x\mid x^2-mx+4=0\}$,已知$A\cup B=A$,$A\cap C=C$,求$a$,$m$的值.

【解】 化简集合A、B得:$A=\{1,4\}$,$B=\{1,a-1\}$.

由$A\cup B=A$,得$B\subseteq A$.因为$B\neq\varnothing$,所以$B=\{1\}$或$B=\{4\}$或$B=\{1,4\}$,

所以$a-1=1$或$a-1=4$,所以$a=2$或$a=5$.

又由$A\cap C=C$得$C\subseteq A$,

当$\Delta=m^2-16<0$时,即$-4<m<4$时,$C=\varnothing\subseteq A$;

当$\Delta=m^2-16\geqslant 0$时,$C\neq\varnothing$,由$C\subseteq A$得$C=\{1\}$或$C=\{4\}$或$C=\{1,4\}$,此时$m=5$.

综上得:$a=2$或$a=5$;$-4<m<4$或$m=5$.

【例2】 已知集合$A=\{x\mid x^2-4x+3\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2<0,a\in\mathbf{R}\}$,且满足$A\cup B=A$,求实数$a$的取值范围.

【解】 $A=[1,3]$.令$f(x)=x^2-2ax+a+2$,它的图象是一条开口向上的抛物线.

(1) 若$B=\varnothing$,则$B\subseteq A$,此时,$\Delta=4a^2-4(a+2)<0$,所以,$-1<a<2$.

(2) 若$B\neq\varnothing$,设抛物线与x轴交点横坐标为x_1、x_2,且$x_1\leqslant x_2$,要使$B\subseteq A$,则必须$[x_1$,

$x_2]\subset[1,3]$，则 $f(1)\geqslant 0,f(3)\geqslant 0,1\leqslant -\frac{-2a}{2}\leqslant 3$，解得 $1\leqslant a\leqslant \frac{11}{5}$.

【评注】 解集合综合题时容易忽略空集，应加以注意.

【例 3】 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=a,a>0\}$，$B=\{(x,y)\,|\,|xy|+1=|x|+|y|\}$，若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 a 的值为________.

【解】 点集 A 是顶点为 $(a,0),(0,a),(-a,0),(0,-a)$ 的正方形的四条边构成(如图 1 所示).

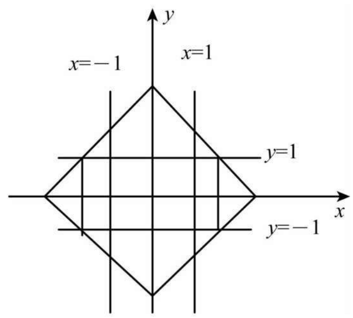


图 1

将 $|xy|+1=|x|+|y|$ 变形为 $(|x|-1)(|y|-1)=0$，

所以，集合 B 由四条直线 $x=\pm 1,y=\pm 1$ 构成.

欲使 $A\cap B$ 为正八边形的顶点，

只有 $a>2$ 或 $1<a<2$ 这两种情况.

(1) 当 $a>2$ 时，由于正八边形的边长只能为 2.

显然有 $\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$，故 $a=2+\sqrt{2}$.

(2) 当 $1<a<2$ 时，设正八边形边长为 l，则

$l\cos 45^\circ=\frac{2-l}{2}$，$l=2\sqrt{2}-2$，这时，$a=1+\frac{l}{2}=\sqrt{2}$.

综上所述，a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

【评注】 数形结合的思想方法贯穿于集合知识之中，学习中要注意提炼与掌握集合知识中所蕴含的思想方法.

【例 4】 已知 $A=\{(x,y)\,|\,x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 144\}$. 问：是否存在实数 a,b，使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$；(2) $(a,b)\in C$ 同时成立?

【解】 假设存在实数 a,b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，知方程组 $\begin{cases}y=ax+b,\\y=3x^2+15\end{cases}$ 有解，消去 y 得方程 $3x^2-ax+15-b=0$，因此 $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0$. 又因为 $a^2+b^2\leqslant 144$，所以 $b^2\leqslant 12b-36$，即 $(b-6)^2\leqslant 0$，所以 $b=6$. 代入 $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0$ 得 $a^2\geqslant 108$，代入 $a^2+b^2\leqslant 144$ 得 $a^2\leqslant 108$，所以 $a=\pm 6\sqrt{3}$. 将 $b=6,a=\pm 6\sqrt{3}$ 代入 $3x^2-ax+15-b=0$，解得 $x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，这与 $x\in\mathbf{Z}$ 矛盾，所以不存在实数 a,b 使得(1)(2)同时成立.

【例 5】 求由正整数组成的集合 S，使 S 中元素之和等于元素之积.

【解】 不妨设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $x_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$，且 $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n$. 由条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$ 得 $nx_1<x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n<nx_n$，于是 $1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)<x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}<n$，从而 $n=2$ 或 3.

当 $n=2$ 时，$1\leqslant x_1<2$，所以 $x_1=1$，从而 $1+x_2=1\cdot x_2$，无解.

当 $n=3$ 时，有 $x_1\cdot x_2<3$. 又 $1\leqslant x_1<x_2$，故只有 $x_1=1,x_2=2$，代入得 $1+2+x_3=1\times 2\times x_3$，$x_3=3$，所以 $S=\{1,2,3\}$.

【例 6】 已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant 2)$ 具有性质 P：对任意的 i,j $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_ia_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.

(1) 分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

(2) 证明：$a_1=1$，且$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$；

(3) 证明：当 $n=5$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4}$.

【分析】 这是一个极具思辨、推理的问题，只要恰当运用集合概念与放缩推理，就能解题.

(1)**【解】** $\because$ 3×4 与$\dfrac{4}{3}$均不属于数集$\{1,3,4\}$，$\therefore$ 该数集不具有性质 P.

$\therefore$ $1\times2,1\times3,1\times6,2\times3,\dfrac{6}{2},\dfrac{6}{3},\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{3},\dfrac{6}{6}$都属于数集$\{1,2,3,6\}$，

$\therefore$ 该数集具有性质 P.

(2)**【证明】** $\because$ $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$具有性质 P，$\therefore$ a_na_n 与$\dfrac{a_n}{a_n}$中至少有一个属于A.

由于 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$，$\therefore$ $a_na_n>a_n$，$\therefore$ $a_na_n\notin A$.

从而 $1=\dfrac{a_n}{a_n}\in A$，$\therefore$ $a_1=1$.

$\because$ $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$，$\therefore$ $a_ka_n>a_n$，$\therefore$ $a_ka_n\notin A(k=2,3,\cdots,n)$，

由 A 具有性质 P 可知$\dfrac{a_n}{a_k}\in A(k=1,2,3,\cdots,n)$.

又$\because$ $\dfrac{a_n}{a_n}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\cdots<\dfrac{a_n}{a_2}<\dfrac{a_n}{a_1}$，$\therefore$ $\dfrac{a_n}{a_n}=1,\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_n}{a_2}=a_{n-1},\dfrac{a_n}{a_1}=a_n$，

从而$\dfrac{a_n}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_2}+\dfrac{a_n}{a_1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$，

$\therefore$ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$.

(3)**【证明】** 由(2)知，当 $n=5$ 时，有$\dfrac{a_5}{a_4}=a_2,\dfrac{a_5}{a_3}=a_3$，即 $a_5=a_2a_4=a_3^2$.

$\because$ $1=a_1<a_2<\cdots<a_5$，$\therefore$ $a_3a_4>a_2a_4=a_5$，$\therefore$ $a_3a_4\notin A$.

由 A 具有性质 P 可知$\dfrac{a_4}{a_3}\in A$.

由 $a_2a_4=a_3^2$，得$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}\in A$，且 $1<\dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，$\therefore$ $\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，

$\therefore$ $\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=a_2$.

【例 7】 已知集合 M 满足$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，则这样的集合 M 有多少个？并求所有 M 的元素之和.

【解】 由已知，集合 M 中一定含有 1,2 两个元素，至多含有 1,2,3,4,5 五个元素. 故满足条件的集合 M 的个数是$\{3,4,5\}$的真子集个数，而$\{3,4,5\}$的真子集有$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{4,5\}$，$\{3,4,5\}$共 7 个，即 2^3-1 个. 由于所有的 M 中 3,4,5 分别出现了 4 次，所以元素之和为$(3+4+5)\times4+(1+2)\times7=69$.

【探究】 (1) 若集合 P 中有 m 个元素，则满足 $Z\subseteq P$ 的集合 Z 共有 2^m 个.

(2) 若集合 P 中有 m 个元素、集合 Q 中有 n 个元素，且 $P\subsetneqq Q$，则满足 $P\subseteq Z\subseteq Q$ 的集合

Z 共有 2^{n-m} 个.

(3) 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，则集合 A 的所有非空子集中元素和的和等于$(1+2+3+\cdots+n)\times 2^{n-1}=n(n+1)\cdot 2^{n-2}$ 个.

练习 1.1

1. 若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是 （　　）

A. $\{a|1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$　　C. $\{a|a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

2. 设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{8},k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=\frac{k}{8}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，则下面的结论中正确的是 （　　）

A. $M\cup N=P$　　B. $M\cap N=P$　　C. $M\cap P=M$　　D. $M\cap N=N$

3. 设 $A=\{x|x^2+px+q=x\}$，$B=\{x|(x-1)^2+p(x-1)+q=x+3\}$，若 $A=\{3\}$，求集合 B.

4. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

5. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=3-x,0\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{(x,y)|y=-x^2-mx+1\}$，$M\cap N$ 只有一个元素，则实数 m 的取值范围是________.

6. 设集合 $A=\{x|\frac{1}{2012}|<8^x<2012\}$ 和 $B=\{x|\log_2(x^2-[x])=2\}$，其中符号$[x]$表示不大于 x 的最大整数，则 $A\cap B=$________.

7. 已知集合 $A=\{x|(x-2)[x-(3a+1)]<0\}$，$B=\{x|(x-2a)[x-(a^2+1)]<0\}$，求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

8. 对于点集 $A=\{(x,y)|x=m,y=-3x+2,m\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(x^2-x+1),n\in\mathbf{N}^*\}$，是否存在非零整数 a，使得 $A\cap B\neq\varnothing$.

9. 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$________.

1.2 集合的差集

设任意两个集合 A 和 B，所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合 S，称作 B 对于 A 的补集(或相对补)，记作 $S=A-B$. 如图 1 所示.

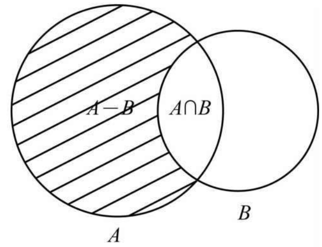


图 1

$A-B=A-(A\cap B)=A\cap\overline{B}$.

又定义 $(A-B)\cup(B-A)$ 为 A，B 的对称差集，记为 $A\Delta B$.

即 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B$，但 $x\notin A\cap B\}$，图 2 中阴影部分就是 $A\Delta B$.

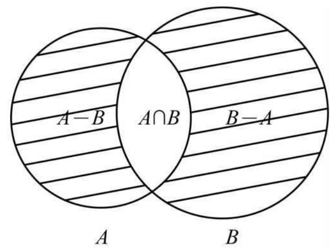


图 2

对称差的性质定理

(1) $A\Delta B=A\cup B-A\cap B$.

(2) $A\Delta A=\varnothing$.

(3) 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\Delta B=A\cup B$.

(4) 若 $A\Delta B=\varnothing$，则 $A=B$.

【证明】 $\because$ $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$，

$\therefore$ $A-B=\varnothing$ 且 $B-A=\varnothing$，

$\therefore$ $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，$\therefore$ $A=B$.

(5) $A\Delta B=B\Delta A$(对称差运算满足交换律).

(6) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$(对称差运算满足结合律).

【证明】 $(A\Delta B)\Delta C=[(A\cap 非\ B)\cup(非\ A\cap B)]\Delta C$

$=\{非[(A\cap 非\ B)\cup(非\ A\cap B)]\cap C\}\cup[(A\cap 非\ B)\cup(非\ A\cap B)]\cap 非\ C$

$=(A\cap B\cap C)\cup(非\ A\cap 非\ B\cap C)\cup(A\cap 非\ B\cap 非\ C)\cup(非\ A\cap B\cap 非\ C)$.

$A\Delta(B\Delta C)=A\Delta[(C\cap 非\ B)\cup(非\ C\cap B)]$

$=A\cap\{非[(C\cap 非\ B)\cup(非\ C\cap B)]\}\cup 非\ A\cap[(C\cap 非\ B)\cup(非\ C\cap B)]$

$=(A\cap B\cap C)\cup(非\ A\cap 非\ B\cap C)\cup(A\cap 非\ B\cap 非\ C)\cup(非\ A\cap B\cap 非\ C)$.

所以，$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

集合间的运算关系

设 A，B，C 是任意的集合，则

(1) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$.

(2) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

(3) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

注意 虽"交"对于差集、对称差的运算满足分配律，但"并"对于差集、对称差的运算不满足分配律. 即：

$A\cup(B\Delta C)\neq(A\cup B)\Delta(A\cup C)$.

【证明】 方法一：如图 3，从两式的韦恩图可以看出 $A\cup(B\Delta C)\neq(A\cup B)\Delta(A\cup C)$.

方法二：$\because$ $A\cup(B\Delta C)=A\cup[(B\cup C)-(B\cap C)]$，

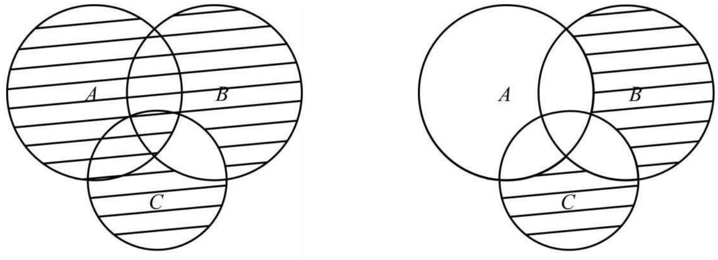
又 $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=[(A\cup B)\cup(A\cup C)]-[(A\cup B)\cap(A\cup C)]$

$=(A\cup B\cup C)-[A\cup(B\cap C)]$，

$A\cup[(B\cup C)-(B\cap C)]\neq(A\cup B\cup C)-[A\cup(B\cap C)]$，

$\therefore$ $A\cup(B\Delta C)\neq(A\cup B)\Delta(A\cup C)$，

即："并"对于对称差的运算不满足分配律.



(1) 阴影部分表示 $A\cup(B\Delta C)$

(2) 阴影部分表示 $(A\cup B)\Delta(A\cup C)$

图 3

【例 1】 设 M,P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $P-(M-P)$ 等于 （　　）

A. P　　B. $M\cap P$　　C. $M\cup P$　　D. M

【解】 当 $M\cap P\neq\varnothing$ 时，由韦恩图知，$M-P$ 为图 4 中的阴影部分，则 $P-(M-P)$ 显然为 P.

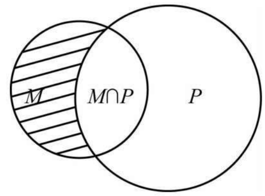


图 4

当 $M\cap P=\varnothing$ 时，$M-P=M$，

则 $P-(M-P)=P-M=\{x\mid x\in P$ 且 $x\notin M\}=P$. 故选 A.

【例 2】 证明方程组 $\begin{cases}X\cap(A\cup B)=X,\\A\cap(B\cup X)=A,\\B\cap(A\cup X)=B,\\X\cap(A\cap B)=\varnothing\end{cases}$ 有唯一解，并求出这唯一的 X.

【证明】 由 $X\cap(A\cup B)=X$ 得 $X\subseteq A\cup B$，又 $X\cap(A\cap B)=\varnothing$，从而 $X\subseteq A\Delta B$.

由 $A\cap(B\cup X)=A$ 得 $A-B\subseteq X$，从而 $A\Delta B\subseteq X$. 故 $A\Delta B=X$.

【例 3】 若 $X\Delta Y=X\Delta Z$，则 $Y=Z$.

【证明】 (1) $\because$ $X\Delta Y=X\Delta Z$，

$\therefore$ $(X\Delta Y)\Delta X=(X\Delta Z)\Delta X$，$\therefore$ $(X\Delta X)\Delta Y=(X\Delta X)\Delta Z$，$\therefore$ $Y=Z$.

【例 4】 已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 2)$. 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$；$A$ 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}=|a_i-b_i|$.

(Ⅰ) 证明：$\forall A,B,C\in S_n$ 有 $A-B\in S_n$，且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

(Ⅱ) 证明：$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

【证明】 (Ⅰ) 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$.

因为 $a_i,b_i\in\{0,1\}$，所以 $a_i-b_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，

从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$.

又 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}||a_i-c_i|-|b_i-c_i||$，

由题意知，$a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，

当 $c_i=0$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$，

当 $c_i=1$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$，

所以，$d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$.

（Ⅱ）设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$，$d(A,C)=l$，$d(B,C)=h$.

记 $O=(0,0,\cdots,0)\in S_n$，由（Ⅰ）可知

$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$，

$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$，

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2t$.

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

练习 1.2

1. 如果 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，那么 $A-B=$______，$B-A=$______，$A\Delta B=$______.

2. 求证：$A\Delta B=\overline{A}\Delta\overline{B}$.