高等数学讲义

数学教研室 编

辽宁大学经济系

高等数学讲义

（下　　册）

辽宁大学经济系
数学教研室　编

目　录

第六章　不定积分

第七章　定积分

第八章　多元函数微分学

第九章 常微分方程

第六章 不定积分

随着导数概念的建立而产生的问题，是如何求出所给函数的导数？这是一个运算的问题，这种运算叫做微分法，在第三章和第四章里已经解决了这个问题，这是事物的一个方面。用辩证唯物主义的观点来看问题，就不能只看事物的一面，还要看事物的另一面，既看到正面，也要看到反面。只有全面地观察事物、分析事物、研究事物的各个方面，才能真正认识事物、理解事物，从而掌握事物的客观规律，较好地解决事物的矛盾。按照这种观点，自然使人们想到这样一个问题：如果已知某函数的导数，是否存在另外一种运算，使得对导数施行这种运算后等于这个函数呢？事实上，根据有关史料记载，早在微分学产生以前就出现了这种运算：求积问题，即积分学。十七世纪由牛顿和莱布尼兹两位数学家共同建立了微分学和积分学的联系。微分法和积分法是高等数学中的最重要和最基本的运算形式。在整个数学体系中，微分法与积分法是互相对立的两种计算方法，犹如加法与减法，乘法与除法，乘方与开方，是一对矛盾的两个对立面，是研究变量问题的基础。在本章及下一章中，我们将研究高等数学中另外两个基本概念—不定积分与定积分，它是微分运算的逆运算。

§6.1 原函数与不定积分

1.1原函数

回忆一下，我们在建立导数概念时，研究过这样的问

题：已知作直线运动的物体的路程随时间的变化规律为$S=S(t)$，如何求它在任意时刻的速度$V(t)$？通过微分法我们得到$V(t)=\frac{dS(t)}{dt}$。现在我们提出相反的问题：已知物体运动的速度随时间的变化规律为$V=V(t)$，如何求物体的路程随时间的变化规律$S=S(t)$？这种问题正是微分法的逆问题。在自然科学与工程技术的研究中，会遇到很多这一类的问题。从数学上来看，抛开具体问题的物理意义，它们都是已知一个函数的导数或微分，要求原来函数的问题。对大量这类问题的研究，形成了数学分析中的原函数与不定积分的概念及其计算方法。由于这种问题具有普遍意义，现在我们给出它的一般定义。

定义：设函数$F(x)$与$f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果对于(a, b)内任一点x，都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，则函数$F(x)$叫做函数$f(x)$在区间(a, b)内的原函数。

例如，已知$(x^2)'=2x$，所以x^2是$2x$的原函数；

$(\sin x)'=\cos x$，所以$\sin x$是$\cos x$的原函数；

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$所以$\ln x$是$\frac{1}{x}$的原函数。

由于x^2，x^2+3，x^2-1，x^2+C（C为任意常数）的导数都是$2x$，所以x^2，x^2+3，x^2-1，x^2+C都是$2x$的原函数。

由此可以看出，一个函数的原函数不止一个，而是很多个。

一般地，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$（C是任意常数）也是$f(x)$的原函数。这是因为

$$[F(x)+c]'=F'(x)=f(x)。$$

1.2 不定积分

由于常数的导数是零，因此当$F(x)$是$f(x)$的一个原函数时，$F(x)+C$（C是任意常数）也是$f(x)$的原函数。这就是说，如果$f(x)$有一个原函数$F(x)$，那么，它就有无穷多个原函数：$F(x)+C$。

有人会问：这无穷多个原函数$F(x)+C$是否包括了$f(x)$的全体原函数呢？换句话说，$f(x)$的任何一个原函数是否都能表示成$F(x)+C$的形式呢？回答是肯定的。下面的定理就具体地回答了这个问题。

定理　如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$（C是任意常数）就表示了函数$f(x)$的原函数的全体。

证明　第一个结论是明显的：

$$[F(x)+c]'=F'(x)+c'=f(x)+0=f(x)$$

下面证明第二个结论，即$f(x)$的任何一个原函数$\Phi(x)$，都可以用$F(x)$加上一个常数来表示。

设$\Phi(x)$是$f(x)$的另一个原函数，即$\Phi'(x)=f(x)$，且$F'(x)=f(x)$，因为

$$[(\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

所以由导数公式可知$\Phi(x)-F(x)$为一常数，即

$$\Phi(x)-F(x)=C$$

于是　$\Phi(x)=F(x)+c$

这就说明了f（x）的所有原函数都可以表示成F（x）+c的形式。

这个定理也告诉我们：如果某函数有一个原函数，那么它就一定有无穷多个原函数，并且它们彼此间只多差一个常数。

求原函数的问题叫作不定积分问题。

为了以后讨论方便，我们引进如下的定义。

定义：设函数F（x）是函数f（x）的一个原函数，则函数f（x）的原函数的全体F（x）+C叫做函数f(x)的不定积分，并用记号$\int f(x)dx$表示，即

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

这里符号"$\int$"叫做积分记号，x叫做积分变量，函数f（x）叫做被积函数，微分f（x）dx叫做被积表达式，常数c叫做积分常数。

积分符号是一种运算符号，表示对已给函数求它的全体原函数。因此，求原函数f（x）的不定积分问题，就转化为求函数f（x）的一个原函数F（x）的问题，求出原函数F（x）以后，再加上任意常数C，就得到f（x）的不定积分。所以积分常数C切记不可丢掉。

求已知函数的原函数的方法叫做不定积分法或简称为积分法。

例1，求$\int 2xdx$

解　因为$(x^2)'=2x$，即x^2是2x的一个原函数，所以$\int 2xdx=x^2+c$

例2，求$\int \cos xdx$

解　因为$(\sin x)'=\cos x$，即sinx是cosx的一个

原函数，所以 $\int \cos x dx = \sin x + c$。

例 3　求 $\int x^2 dx$

解　因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，即 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$。

不定积分中含有任意常数C，所以不定积分表示的是无穷多个原函数，它们之间只差一个常数，通常也说它是一族函数。

3、不定积分的几何意义：

我们以 $\int 2x dx = x^2 + c$ 为例，看一看这一族函数在几何图形上的特点，当c取不同的值时，函数 $y = x^2 + c$ 的图形如图6.1所示，它们都是抛物线，都是以y轴为对称轴，开口都向上。这些抛物线中任意一条，经过上下平移，可得其他任意一条。因此不定积分 $\int f(x) dx$ 的图形是一族平行曲线。它们的方程是：$y = F(x) + c$。这族平行曲线也叫做积分曲线族。又由于 $[F(x) + c]' = f(x)$ 所以这个积分曲线族在横坐标相同的点处，它们的切线斜率相等，从而这些切线互相平行。这就是不定积分的几何意义。

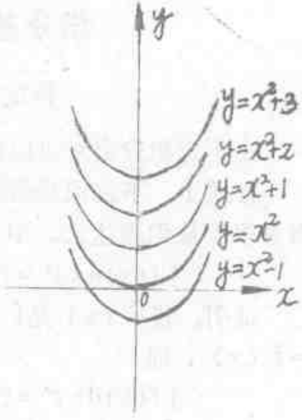

图　6.1

例如，求过点（1，2），而切线的斜率为 $2x$ 的曲线。

解：设所求的曲线为$y=F(x)$

由题意知 $y'=2x$

因为$(x^2)'=2x$，所以曲线族$y=x^2+c$中任意一条曲线的切线斜率均为$2x$，但并不是这族中任一曲线都经过点（1，2）。要求这族中经过点（1，2）的曲线，将（1，2）代入$y=x^2+c$中得

$2=1^2+c$ 　　即$c=1$

所求的曲线是$y=x^2+1$。

§6.2 不定积分的主要性质与积分基本公式

一 不定积分的主要性质

由不定积分定义可以直接得到下列性质1及性质2。

性质1 不定积分的导数等于被积函数，不定积分的微分等于被积表达式。即

$$[\int f(x)dx]'=f(x)\text{或}d\int f(x)dx=f(x)dx$$

证明：设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数即$F(x)'=f(x)$，则

$$[\int f(x)dx]'=[F(x)+c]'=F'(x)+c'$$
$$=f(x)$$

$$d\int f(x)dx=d[F(x)+c]=dF(x)+dc。$$
$$=F'(x)dx=f(x)dx$$

性质2 函数微分的不定积分等于该函数本身加上一个任意常数。即

$$\int F'(x)dx=F(x)+c\text{或}\int dF(x)dx=F(x)+c。$$

证明　设$F(x)$是$F'(x)$的一个原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x)+c,$$

$$\int dF(x)dx = \int F'(x)dx = F(x)+c$$

性质1及性质2表明了不定积分与微分运算的互逆关系。如果对一个函数先求不定积分，然后再求导数或微分，则两者作用互相抵消；反过来，如果对一个函数先求导数或微分，然后再求不定积分，两者的作用也是互相抵消，不过此时要差一个常数。

性质3　被积函数中的常数因子可以提到积分符号外面来。即

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k\text{为非零常数})$$

证明　根据导数运算法则及上面的性质1，得

$$\begin{aligned}(k\int f(x)dx)' &= k'\int f(x)dx + k(\int f(x)dx)' \\ &= kf(x)\end{aligned}$$

从而可知$k\int f(x)dx$是$kf(x)$的原函数，即

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$　　　　证毕

性质4　有限个函数的代数和的不定积分等于各个函数的不定积分的代数和。即一项一项分开积：

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$$

证明　只要证明等式左右两端的导数相等，问题即得证。

$$\because \text{左端} = \left[\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx\right]' = f(x)+g(x)-h(x)$$

$$\text{右端}[\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx]'$$

$$=[\int f(x)dx]'+[\int g(x)dx]'-$$

$$-[\int h(x)dx]'=f(x)+g(x)-h(x)$$ 证毕。

二 积分基本公式

现在我们开始具体讨论如何求一个已知函数的原函数的问题。这个问题比“求一个已知函数的导函数”的问题要复杂得多，原因在于：导函数的定义是有解析结构的，就是说导函数的定义本身已经指明了把某些确定的运算施行于已知函数之上，于是只要按运算的手续就可以求出已知函数的导函数；可是原函数的定义就大不相同，其中并没有任何解析结构，就是说没有指明用什么运算去求原函数，而仅仅说它是“以已知函数为导函数”，因而只有从微分运算的结果中去寻找“已知函数是什么函数的导数”，可见在寻找的时候，一般难免感到有些困难，不再象微分法那样有一定的轨道可循。

根据定义，每一个可导的函数f（x）都必然是它自己的导函数的原函数。而且不定积分的运算是微分运算的逆运算，因此由微分法的每一个基本公式就可以推导出一个积分法的对应公式。现在对照列出如下：

微分公式	积分公式
1. $d(c)=0$，	1. $\int 0dx=c$（C为常数）
2. $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^ndx$ $(n\neq-1)$，	2. $\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c(n\neq-1)$；
3. $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$，	3. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$

$4.\ d(e^x)=e^x dx,$ $4.\ \int e^x dx=e^x+c,$

$5.\ d\left(\frac{1}{l_n a}a^x\right)=a^x dx,$ $5.\ \int a^x dx=\frac{1}{l_n a}a^x+c$

$6.\ d(\sin x)=\cos x dx,$ $6.\ \int \cos x dx=\sin x+c$

$7.\ d(-\cos x)=\sin x dx,$ $7.\ \int \sin x dx=-\cos x+c,$

$8.\ d(\operatorname{tg}x)=\frac{dx}{\cos^2 x},$ $8.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+c,$

$9.\ d(-\operatorname{ctg}x)=\frac{dx}{\sin^2 x}$ $9.\ \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+c,$

$10.\ d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $10.\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c,$

$11.\ d(\operatorname{arctg}x)=\frac{dx}{1+x^2},$ $11.\ \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+c$

以上一些积分基本公式是计算不定积分的基础，要通过反复算题逐步熟悉掌握、记准。

由于积分法是微分法的逆运算，所以这些积分公式都是通过微分公式导出来的，要证明这些积分公式，只须证明等式右端的导数等于左端的被积函数。我们以公式 3 为例：

证明　当 $x>0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln x]' = \frac{1}{x};$$

当 $x>0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)'$$

$$= \frac{1}{x}$$

因此，不论 $x>0$ 或 $x<0$，都有

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$$

由不定积分定义知

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

说明：①幂函数 x^n 的不定积分由公式2、3共同给出：

当 $n \neq -1$ 时，用公式2；当 $n=-1$ 时，用公式3。即

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, & 当 n \neq -1 时 \\ \ln|x|+c & 当 n=-1 时。\end{cases}$$

（2）公式2的几个特殊情形，今后常用，有必要单独记忆：

当 $n=0$ 时，有 $\int 1dx = x+c$；

当 $n=-\frac{1}{2}$ 时，有 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$；

当$n=-2$时，有$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$，

§6.3 不定积分的计算

利用不定积分的性质和基本公式，对一些较复杂一点的函数的不定积分，可以直接求出来。

一、直接积分法

例1，求$\int(2x^2+3x-5)dx$

解 $\int(2x^2+3x-5)dx$

$=\int 2x^2dx+\int 3xdx-\int 5dx$

$=2\int x^2dx+3\int x-5\int dx$

$$=2\cdot\frac{x^3}{3}+c_1+3\cdot\frac{x^2}{2}+c_2-5x+c_3$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+c$$

其中$C=C_1+C_2+C_3$仍为常数。

例2、求$\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

解 $\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{2}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=4\sqrt{x}+c$$

例3、求$\int(1-\frac{1}{x})^2dx$

解 $\int(1-\frac{1}{x})^2dx=\int(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx$

$$=\int dx-\int\frac{2}{x}dx$$

$$+\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$$

例4、求 $\int a^x(1-\frac{1}{xa^x})dx$

解 $=\int(a^x-\frac{1}{x})dx=\int a^xdx-\int\frac{dx}{x}$

$$=\frac{a^x}{\ln a}-\ln|x|+c$$

例5．求$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

解 $\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}xx$

$$=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right) dx$$

$$= \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx$$

$$= \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + c$$

例 6　求 $\int tg^2 x dx$。

解 $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + c$$

例 7 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$。

解 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx$

$$= \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c.$$

例 8　求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

解　$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} dx$