

高职数学

(上册)

三年制

龙辉 主编

电子科技大学出版社

高 职 数 学

(三 年 制)

上 册

主 编 龙 辉 主 审 李和逊

副主编 向以华 郑 文

编 者 (以姓氏笔画为序)

龙 辉 向以华 李坤琼

张 焰 郑 文 周国清 廖嘉庆

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高职数学·上册:三年制/龙辉主编. —成都:电子科技大学出版社,2005.8

ISBN 7-81094-824-5

I. 高... II. 龙... III. 数学—高等学校:技术学校—教材 IV. 01

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第084285号

高职数学

上册

龙 辉 主编

出 版:电子科技大学出版社

(成都建设北路二段四号 邮编:610054)

责任编辑:徐守铭

发 行:新华书店经销

印 刷:成都光电印刷厂

开 本:787×1092 1/16 印张:13 字数:324千字

版 次:2005年8月第一版

印 次:2005年8月第一次印刷

书 号:ISBN 7-81094-824-5/O·40

印 数:8000册

定 价:19.80元

前言

教育部高等教育司《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》指出,各类高职高专院校,都要按照教育部制定的高职高专教育基础课程教学基本要求和专业培养规格编写教材.同时,要注意编写适用于不同地区、不同学校、各具特色的系列教材.根据这一精神,同时根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,针对高职教育既属高等教育层次,又属职业教育类型的特征,我们组织了一批富有高等职业教育教学经验的专家编写了这套《高职数学》,分上、下两册.

本教材的特点是:

1. 较准确地把握了“必需、够用”的尺度

本教材是在对高职工科类和经济类各专业进行了数学工具的需求问卷调查后确定编写内容的.对于多数专业所必需的函数、一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何与向量代数、线性代数、概率统计等内容,是本教材选编的重点.对于需求量较小,要求较弱的内容,如极限与连续、多元函数微分学、二重积分、级数等,我们进行了适当的精简.这样供给对准需求,充分体现了高职教育“以服务为宗旨”的指导思想.

2. 强化了数学在实际中的应用

(1) 概念的引入一律从实际问题入手,遵循了从感性到理性的认知规律,同时也是为下一步理论在实际中的应用推出了范例.

(2) 编入了大量有实际应用背景的例题、习题及讨论课题,落实以应用为目的的原则.其中还选编了经济工作中的边际、弹性、求总量、优化等微积分的应用问题,增加了数学应用的深度和广度.

(3) “数学建模”进一步强化了数学的应用.除在函数的应用、求最值、线性规划等处穿插了数学建模外,附录中还集中编写了“数学建模简介”,用以提高学生使用数学的兴趣和能力.

3. 进一步降低了深奥的数学理论和计算难度

与以往的教材相比,在必学内容中删去了只具理论价值,在实际中用处不大的纯理论.

不少定理省去了严格的理论证明,只给出几何解释或归纳.

由于教材中使用了计算机软件进行数学运算和数值计算,因此必学内容中删减了一些人工运算技巧和繁难的计算.

4. 优化了内容结构

如用拉普拉斯变换与二阶常系数线性微分方程相结合,代替了以往的特征方程法和待定自由项法.另外还对有的章节进行了合并.

5. 以生为本,分层次教学

考虑到高职生源的多渠道,基础不一致的特点,为了兼顾全体学生的个体差异,我们在调查了生源的入学分数的基础上,进行了聚类分析处理,然后在教材中进行了分层次教学安排.未打*号的内容为必学,打*号的内容为选学,在每章提高篇中的内容供学有余力的优生进一步学习.

6. 数学与计算机软件相结合

教材中几乎每一章都有数学软件 Matlab 的应用,附录中还集中介绍了 MATLAB 使用基础.软件的应用减少了计算的难度,运用软件演示,使得数学教学手段更加现代化,教学更加直观和动态.

7. 注重教学互动,改变学生学习方式

以往以罗列知识为表现形式的陈述式教材与注入式的教学相适应.本教材试图体现教学的启发式,改学生的被动接受为主动参与,因此教材中设置一些“学习活动”、“研究课题”、“讨论”、“观察与思考”等形式生动的栏目,加强了教与学,学与学的交流与互动,让学生通过积极思维,相互启发,发挥主观能动性,提高学习效率.

8. 改革了教材版面的呈现形式

教材中穿插了大量图标、图形和图示,图文并茂.每章的开头配有标志性的插图和带启发性的引言.正文的右边留有空白栏,可供编者适时地进行注解,也可供学生学习时批注.教材版面的人性化使学生易于接受,乐于接受.

编写组成员

上册:主 编 龙 辉 主 审 李和逊

副主编 向以华 郑 文

编 者 龙 辉 向以华 郑 文 李坤琼

廖嘉庆 周国清 张 焰

下册:主 编 曾乐辉 主 审 韩乐文

副主编 徐江涛 郭 思

编者 曾乐辉 徐江涛 郭 思 梁 静

徐 敏 燕长轩

本书在编写过程中得到了重庆市数学会高职专委会的指导,得到了在渝主要高职院校以及一些举办了高职、高专教育的各级各类学校领导和教师的大力支持和帮助,在此表示诚挚的感谢.

本教材上册基本学时数为 64 学时,下册基本学时数为 66 学时,使用者可根据专业需求适当增删.

本教材可供三年制高职、高专使用,也可供招收初中毕业生的五年制高职选用.

由于本教材具有创新的模式,编写它是一种尝试,且编者水平有限,因此难免有缺点和错误,恳请读者批评指正.

《高职数学》教材编写组

2005 年 4 月

目 录

第 1 章 函数

1.1 函数概念与应用及数学建模简介	2
1.2 基本初等函数与初等函数	12
小结与提高	19
综合练习题 1	25

第 2 章 极限与连续

2.1 极限	30
2.2 无穷小量与无穷大量	36
2.3 极限的四则运算法则	39
2.4 函数的连续性	42
小结与提高	48
综合练习题 2	54

第 3 章 导数与微分

3.1 导数的概念	57
3.2 函数的求导法则	64
3.3 微分	73
小结与提高	76
综合练习题 3	82

第 4 章 导数的应用

4.1 极值	86
4.2 最大值最小值及其在最优化中的应用	91
小结与提高	95
综合练习题 4	102

第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的概念	105
5.2 不定积分的计算	109
小结与提高	124
综合练习题 5	130

第 6 章 定积分

6.1 定积分的概念及性质	133
6.2 定积分的积分法	138
6.3 广义积分	145
小结与提高	148
综合练习题 6	151

第 7 章 定积分的应用

7.1 定积分在几何上的应用	155
7.2 定积分在物理上的应用	163
7.3 定积分在经济中的应用	167
小结与提高	171
综合练习题 7	174

附录 1 科学计算软件 Matlab 使用基础

附录 2 常用初等数学公式

附录 3 积分表



第 1 章

函 数

大家都知道声音在空气中的传播速度是 340m/s , 经过 t 秒钟后, 它传播的距离 s 有多远呢? 由公式: 距离 = 速度 $\times$ 时间, 可以得出 $s = 340t$. 这是公式, 也是我们将要讨论的函数. 如果已知时间 t , 就可算出传播的距离 s 来.

又如一张圆桌面半径为 r , 它的面积 A 是多少呢? 它由圆的面积公式 $A = \pi r^2$ 计算得出. 这也是一个函数. 如果已知半径 r 的数值, 就可算出面积 A 来. 在生活和生产实际中, 函数随处可见, 它就在我们身边. 从上面两例可知, 函数的作用就是通过一个已知的信息去推知另一个未知的信息.

在千变万化的自然界, 在错综复杂的人类社会, 各种事物和现象之间无不存在着千丝万缕的联系, 而函数就是描述量与量之间关系的有力工具. 为了认识世界, 改造世界, 我们应当学好函数这一章.

本章我们将在中学数学函数的基础之上进一步理解函数的概念, 基本初等函数的概念, 复合函数的概念, 初等函数的概念, 了解数学建模, 学会建立简单的函数模型, 学会复合函数的分解. 为下一步学习微积分及其应用打下基础.

1.1 函数概念与应用及数学建模简介

1.1.1 函数的概念

观察声音传播的距离公式 $s = 340t$, 它有两个变量 t 和 s , 每知道一个时间 t , 按照公式 $s = 340t$, 都可算出一个对应的距离 s 来, 这样我们把距离 s 叫做时间 t 的函数.

推而广之, 一般地, 有函数的定义.

1. 函数的定义

定义 设有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的规律 f , 可以得出惟一确定的值与之对应, 那么 y 就叫做 x 的函数. 记作

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做函数(或因变量), 自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当 x 取遍 D 中的一切数值时, 对应 y 的所有值的集合叫做函数的值域, 记作 M .

函数的记号除了 $f(x)$ 表示外, 也可用 $F(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ 等表示.

2. 函数的表示法

千万不要以为函数的表示法只能用公式表示, 用公式来表示只是其中的一种, 叫做公式法(或解析式法).

函数的表示法主要有三种: 表格法、图像法、公式法.

例 1 据股市行情报导, 个股“深宝安”某月上旬 1~10 日的收盘价如表 1.1 所示.

表 1.1

日期 t /日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
收盘价 R /元	5.34	4.97	4.44	4.21	3.85	3.98	4.21	4.63	3.79	3.88

按照这个表格, 每一个日期都对应一个惟一的收盘价. 若设日期为 t , 收盘价为 R , 对照函数的概念, R 就是 t 的函数. 这里不存在计算收盘价的公式. 日期 t 与收盘价 R 的对应是靠表格来完成的, 这就是函数的表格法.

思考: 在声音传播距离的函数式 $s = 340t$ 中, 哪个变量是自变量, 哪个变量是函数?

函数的定义域 D 是哪一个集合?

从 t 对应到 s 的对应规律 $f(t) = ?$

当 $t = 2s$ 时, 函数值 $s|_{t=2} = ?$

你能估计出函数的值域 M 来吗?

例2 有时我们可能会想,汽车开得快耗油量大,还是开得慢耗油量大? 以下是 CQ643 型城市公共汽车的耗油量图,横坐标表示车速(单位: km/h),纵坐标表示耗油量(单位: L/100km)。

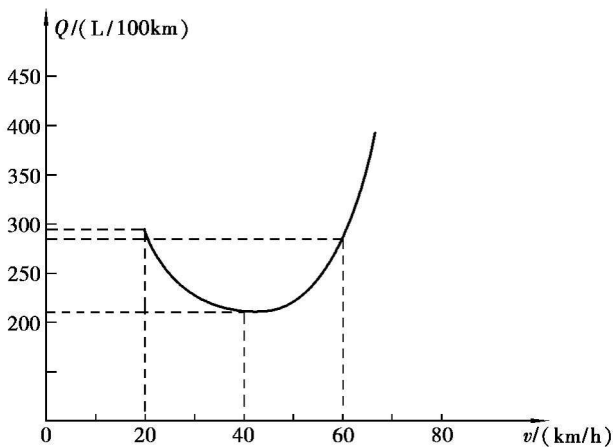


图 1.1

当车速 $v = 20\text{km/h}$, 对应的耗油量 $Q = 295\text{L}/100\text{km}$,

当车速 $v = 40\text{km/h}$, 对应的耗油量 $Q = 210\text{L}/100\text{km}$,

当车速 $v = 60\text{km/h}$, 对应的耗油量 $Q = 285\text{L}/100\text{km}$.

按照这个耗油量曲线图,对每一个车速 v ,都可以对应一个惟一的耗油量 Q . 因此耗油量 Q 是车速 v 的函数. 这里 v 与 Q 的对应是靠图像来完成的,我们把它叫做函数的图像法.

自变量与函数的对应如果是靠公式来完成的,我们就说函数是用公式法表示的. 如声音传播的距离 $s = 340t$, 圆的面积 $A = \pi r^2$ 都是用公式法表示的函数. 用公式法表示的函数也叫做函数的解析式.

在往后的学习中,我们接触较多的是用公式法表示的函数.

3. 函数的定义域

前面我们已经知道,在函数 $y = f(x)$ 中自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

对于一个函数,掌握它的定义域是非常重要的.

例3 生产成本是产量的函数,产量的大小决定着成本的多少. 某化肥厂生产氮肥的成本函数为

$$C(x) = 1.5 + 2x - 2x^2 + x^3$$

其中 $C(x)$ 为成本,单位为千元; x 为产量,单位为吨. 求此函数的定义域.

由常识我们知道,产量 x 不可能为负数,因此 x 的取值范围为 $x \geq 0$ 的一切实数,函数定义域 $D = \{x | x \geq 0\}$,写作区间即 $D: [0, +\infty)$.

由此可得,生产和生活实际中的函数,其定义域由问题的具体意

注:耗油量的单位为: L/100 km,表示汽车行驶平均每 100 km 需耗多少升油.

注:从图上找车速 $v = 40\text{km/h}$ 对应的耗油量 Q 的方法是:

过横坐标轴上刻度为 40 的点作平行于纵坐标轴的直线,交耗油量曲线于点 P , P 点的纵坐标就是 $v = 40\text{km/h}$ 对应的耗油量 Q .

可以看出 P 点的纵坐标为 210.

所以,当车速 $v = 40\text{km/h}$,对应的耗油量 $Q = 210\text{L}/100\text{km}$

义来决定.

例4 求函数 $y = \frac{3}{x}$ 的定义域.

这是一个没有赋予实际意义的数学式子表示的函数,显然 x 不能等于 0,因此 x 的取值范围为 $x \neq 0$,函数定义域 $D = \{x | x \neq 0\}$.

由此可得,由数学式子表示的函数,其定义域是使得函数式有意义的 x 的取值范围.

例5 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{x+2}{x-1} \quad (2) f(x) = \sqrt{x+5} - \frac{4}{3-x}$$

$$(3) y = \frac{3x}{2x^2+7x-4} \quad (4) f(x) = \ln(x^2-9)$$

解(1) $y = \frac{x+2}{x-1}$

要使函数式有意义,分母不能等于 0,即

$$x-1 \neq 0 \quad x \neq 1$$

所以,该函数的定义域为集合 $\{x | x \neq 1\}$ 或区间 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(2) f(x) = \sqrt{x+5} - \frac{4}{3-x}$$

要使函数式有意义,根号下要大于等于 0,且分母不能等于 0.

即 $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$, 解这个不等式得 $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

所以该函数的定义域为集合 $\{x | x \geq -5, x \neq 3\}$ 或区间 $[-5, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$(3) y = \frac{3x}{2x^2+7x-4}$$

要使函数式有意义,分母不能等于 0. 即 $2x^2+7x-4 \neq 0$,下面解这个不等式. 左边分解因式得

$$(2x-1)(x+4) \neq 0$$

只要 $x \neq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq -4$, 这个不等式就成立.

所以该函数的定义域为集合

$$\left\{x \left| x \neq \frac{1}{2}, x \neq -4 \right. \right\} \text{或区间 } (-\infty, -4) \cup (-4, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$(4) f(x) = \ln(x^2-9)$$

要使函数式有意义,对数的真数部分必须大于 0. 即 $x^2-9 > 0$, 下面解这个不等式.

先求得方程 $x^2-9=0$ 的两根为 $x_1 = -3, x_2 = 3$.

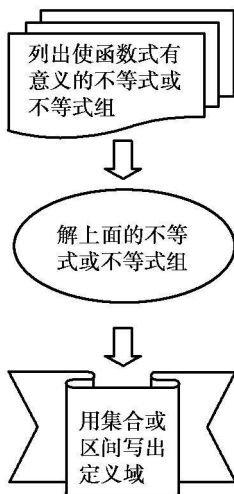
所以,不等式 $x^2-9 > 0$ 的解为 $x < -3$ 或 $x > 3$.

注: 解一元二次不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 应先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 x_1, x_2 , 设 $x_1 < x_2$ 则 $ax^2+bx+c > 0$ 的

所以该函数的定义域为集合

$$\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 3\} \text{ 或区间 } (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

由上面的例题,我们可以得出求函数定义域的程序如下:



解为 $\{x|x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$, 同理 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解为 $\{x|x_1 < x < x_2\}$

4. 函数值

某种商品的销售利润 y (单位: 元) 与销售数量 x 之间的函数关系式为

$$y = 240x - x^2 - 1\,600$$

问卖出 10 件商品时, 所得利润是多少元? 即销售量 $x = 10$ 时, 求利润 y 等于多少?

将 $x = 10$ 代入上面函数式中 x 处, 如下图所示:

$$y = 240x - x^2 - 1\,600$$

可以得出

$$y = (240 \times 10 - 10^2 - 1\,600) \text{ 元} = 700 \text{ 元}$$

即销售量 $x = 10$ 时, 利润

$$y = (240 \times 10 - 10^2 - 1\,600) \text{ 元} = 700 \text{ 元}$$

我们把 $y = 700$ 叫做函数 $y = 240x - x^2 - 1600$ 在点 $x = 10$ 处的函数值.

记作 $y \Big|_{x=10} = 700$

对于一般的函数 $y = f(x)$, 如果当 $x = x_0 \in D$ (D 为定义域) 时, 对应的函数值为 y_0 , 则 y_0 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值.

记作 $y \Big|_{x=x_0} = y_0$ 或 $f(x_0) = y_0$

这时我们还说函数在点 $x = x_0$ 处有定义, 如果函数在某个区间上每一点都有定义, 则说函数在该区间上有定义.

例 6 设函数 $f(x) = 4 - 3x + 2x^2$, 求 $x = -2$ 处的函数值 $f(-2)$.

解 将 $x = -2$ 代入函数式中 x 处, 如下图所示:

$$f(x) = 4 - 3x + 2x^2$$

(三个气泡分别指向 x, 3x, 和 x^2 项, 每个气泡内都写着 x = -2)

可以得出

$$f(-2) = 4 - 3 \times (-2) + 2 \times (-2)^2 = 18$$

例 7 设函数 $g(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, 求 $g(4)$, $g(a)$, $g(2 + \Delta t)$.

解 $g(4) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$

$$g(a) = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$g(2 + \Delta t) = \sqrt{(2 + \Delta t)^2 + 1} = \sqrt{5 + 4\Delta t + (\Delta t)^2}$$

5. 分段函数

下面的函数是一个分段函数.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

当自变量 x 的取值范围为 $x < 0$ 时, 函数式为 $-x$, 当自变量 x 的取值范围为 $x \geq 0$ 时, 函数式为 x^2 . 因此, 分段函数就是当自变量 x 在不同的范围取值时, 用不同的函数式来表示的函数.

例 8 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

求函数 $f(x)$ 的定义域, 并求 $f(-0.5)$ 和 $f(1)$.

解 函数 $f(x)$ 的定义域即是自变量 x 各个不同取值范围的并集. 因此, 此函数的定义域为区间 $[-1, 2]$.

$$f(-0.5) = -0.5 + 1 = 0.5 \quad f(1) = 1 - 1 = 0$$

由本例可以看出, 分段函数的定义域就是自变量 x 各个不同取值范围的并集.

求函数值时, 看自变量 x 取值位于哪个范围, 就代入相应的函数式来计算.

例 9 作例 8 所给分段函数的图像.

解 先作 $-1 \leq x < 0$ 时, 解析式 $y = x + 1$ 的图像, 如图 1.2 所示.

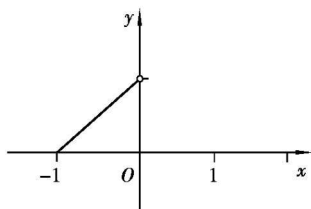


图 1.2

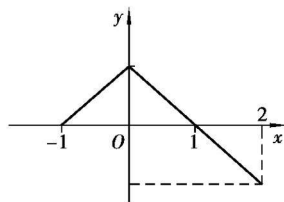


图 1.3

注: 作分段函数的图像, 只要把各段解析式的图像在不同的范围内分别作出即可.

再在上面图形中作 $0 \leq x \leq 2$ 时, 解析式 $y = 1 - x$ 的图像, 如图 1.3 所示.

1.1.2 应用函数描述简单实际问题及数学建模简介

1. 建立实际问题的函数关系式

人类在征服自然界的斗争中要进行大量的生产活动和科学实验, 其中经常需要研究实际问题中出现的各个变量的变化情况, 以及它们之间的依赖关系, 并用数学公式表示出来, 以使用数学方法来求解.

我们先来看一个实例.

例 10 如图 1.4 所示, 甲船以 6km/h 的速度向西航行, 同时乙船在甲船之北 16km , 以 8km/h 的速度向南航行. 求甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系.

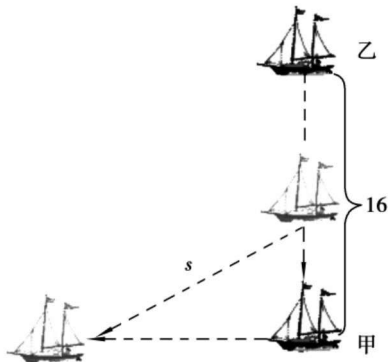
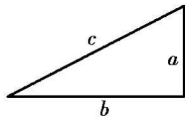


图 1.4

注: 勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$



解 步骤 1: 设时间为 t , 两船的距离为 s .

步骤 2: 由勾股定理, t 小时后两船的距离为

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (16 - 8t)^2}$$

步骤 3: 时间 t 的取值范围为: $t \geq 0$. 所以, 甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系为

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (16 - 8t)^2} \quad t \geq 0$$

通过上面的例子我们可以归纳出建立实际问题函数式的步骤为:

步骤 1: 设定自变量和因变量(或叫函数)的字母.

步骤 2: 根据题意建立自变量和因变量的等式, 并表示成函数的标准形式 $y = f(x)$.

步骤 3: 写出自变量的取值范围.

例 11 某企业需要生产容积为 16dm^3 的圆柱形密封包装桶. 试建立包装桶所需材料面积与底面半径之间的函数关系.

解 如图 1.5 所示, 设圆柱底面半径为 r , 表面积为 A , 则圆柱的

高

$$h = \frac{16}{\pi r^2}$$

由题意可得

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{16}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{32}{r} + 2\pi r^2$$

半径为 r 的取值范围为区间 $(0, +\infty)$.

所以, 包装桶所需材料面积与底面半径之间的函数关系为

$$A = \frac{32}{r} + 2\pi r^2 \quad r \in (0, +\infty)$$

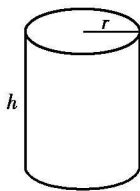


图 1.5

例 11 某地一段时期内个人所得税的征收标准是:

月收入不超过 929 元免税;

月收入超出 929 ~ 1 429 元的部分按 5% 的税率征税;

月收入超出 1 429 ~ 2 929 元的部分按 10% 的税率征税;

月收入超出 2 929 ~ 5 000 元的部分按 15% 的税率征税;

求税金与月收入(假定月收入不超过 5 000 元)的函数式.

解 设月收入为 x 元, 税金为 y 元.

(1) 当 $0 \leq x \leq 929$ 时

$$y = 0$$

(2) 当 $929 < x \leq 1\,429$ 时

$$y = (x - 929) \cdot 5\% = 0.05x - 46.45$$

(3) 当 $1\,429 < x \leq 2\,929$ 时

超过 1 429 部分即 $(x - 1\,429)$ 部分按 10% 征税.

929 ~ 1 429 部分即 $(1\,429 - 929)$ 部分按 5% 征税.

$$y = (x - 1\,429) \cdot 10\% + (1\,429 - 929) \cdot 5\% \\ = 0.1x - 117.9$$

(4) 当 $2\,929 < x \leq 5\,000$ 时

超过 2 929 部分即 $(x - 2\,929)$ 部分按 15% 征税.

1 429 ~ 2 929 部分即 $(2\,929 - 1\,429)$ 部分按 10% 征税.

929 ~ 1 429 部分即 $(1\,429 - 929)$ 部分按 5% 征税.

$$y = (x - 2\,929) \cdot 15\% + (2\,929 - 1\,429) \cdot 10\% \\ + (1\,429 - 929) \cdot 5\% = 0.15x - 264.35$$

综上所述, 税金 y 与月收入 x 的函数式为

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 929 \\ 0.05x - 46.45 & 929 < x \leq 1\,429 \\ 0.1x - 117.9 & 1\,429 < x \leq 2\,929 \\ 0.15x - 264.35 & 2\,929 < x \leq 5\,000 \end{cases}$$

注: 本例中步骤 2: 根据题意建立自变量和因变量的等式, 并表示成函数的标准形式 $y = f(x)$ 与步骤 3: 出自变量的取值范围, 是两步合并成一步来进行的.

例 12 图 1.6 是某种周期电信号在一个周期内的波形图. 建立电压与时间的函数关系式.

注 1: 本例自变量与因变量的字母已经由题

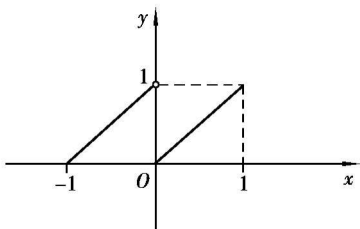


图 1.6

解 该图像分为两部分,应用两个解析式来表示.

当 $-1 \leq t < 0$ 时 $u = t + 1$

当 $0 \leq t \leq 1$ 时 $u = t$

所以,电压 u 与时间 t 的函数关系式为

$$u = \begin{cases} t + 1 & -1 \leq t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

2. * 数学建模简介

例 13 甲船以 m km/h 的速度向西航行,同时乙船在甲船之北 l km,以 n km/h 的速度向南航行. 求甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系.

解 由例 10 可以得到甲、乙两船的距离 s 与时间 t 之间的函数关系为

$$s = \sqrt{(mt)^2 + (l - nt)^2} \quad t \geq 0$$

这就是一个最简单的数学建模的示例.

上面函数关系式就是一个最简单的数学模型. 更具体地说,它是一个函数形式的数学模型,或叫**函数模型**.

一般地,**数学模型**是针对某种实际问题,为了一个特定的目的,(上例是针对两船互动过程这一实际问题,目的是研究两船距离与时间之间的函数关系.)根据问题提供的条件和内在规律,运用数学工具把问题表示出来的一种数学形式. 它可以是若干数学公式,也可以是各种方程与不等式,或其他数学结构.

在建立这一数学结构的时候,为了问题能够求解,还需抓住主要因素,抛弃次要因素,作出必要的理想化假设.(上例实际上已隐含着船的运动是匀速运动,不考虑水流速度的影响等等假设.)

数学建模不仅仅是建立实际问题的数学模型,它还包括模型的求解,模型的验证及模型的应用等程序.

数学建模包括以下四个主要程序:

模型的建立 根据实际问题提供的信息,作出必要的简化和假设,运用数学工具和各种数学形式(包括数学概念、数学符号、数学表达式等等数学语言)建立问题的数学模型.

模型的求解 采用适当的数学方法对模型求解.

目给出,因此省去步骤 1: 设定自变量和因变量(或叫函数)的字母.

注 2: 本例两段直线段的方程可用直线的斜截式 $y = kx + b$ 写出.

注: 数学模型针对的实际问题中的已知条件一般用字母 a, b, c, d, m, n, l 等等来表示,而不用具体的数值.

如果给出的条件是具体的数值,也应先用字母来代替,等模型建立并求解以后再代入具体的数值.