G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育"十二五"规划教材

（理工类）高等数学 下册

主编 赵利彬 刘国清

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

高 等 数 学

（理工类）下册

主　编　赵利彬　刘国清
副主编　黄建吾　许晓玲

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神的基础上，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，结合一些本、专科院校学生的基础和特点进行编写的.是面向21世纪课程教材.

全书分上、下两册，上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用.下册内容包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程.书内各节后均配有相应的习题，同时每章还配有综合练习，书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富.适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类.下册 / 赵利彬主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5608-5710-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第285333号

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(理工类)下册

主编 赵利彬 刘国清 **副主编** 黄建吾 许晓玲

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 21.75

印 数 1—4 100

字 数 435 000

版 次 2014年7月第1版 2014年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5710-7

定 价 39.00元

前　言

“高等数学”是普通高等院校理工类本科各专业普遍开设的一门公共基础课程. 在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变,满足一些高等院校新的教学形势、学生基础和教学特点,根据我们多年的教学改革实践,在多次研讨和反复实践的基础上,编写了这部高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,参考了近几年来国内出版的一些优秀教材,结合编者多年的教学实践经验,编写而成的. 全书以严谨的知识体系,通俗易懂的语言,丰富的例题、习题,深入浅出地讲解高等数学的知识. 培养学生分析问题、解决问题的能力.

全书分上、下两册,上册内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用.

下册内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题,同时每章还配有综合练习,书末附有习题的参考答案. 本书的主要特色有以下几点:

1. 在满足教学基本要求的前提下,淡化理论推导过程. 加强训练,强化应用.

在第1章中没有介绍映射的内容,直接通过实例给出函数的定义,同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂,又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时,本书经过精心设计与编选,配备了相当丰富的例题、习题,目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质,掌握重要的解题方法和应用技巧.

2. 内容结构设计合理,突出重点消除难点. 篇幅比传统教材要少,但高等数学的基本内容都讲到了,且有一定的理论深度.

平面极坐标是积分中经常用的重要内容,因此,在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系,给出了一些常用曲线的极坐标方程,为后面的学习奠定了一定的理论基础.

3. 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

4. 注重理论联系实际,增加了数学在工程技术上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

5. 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

一致连续、一致收敛等内容可根据教学需要和学时安排酌情增删.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富.适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由赵利彬、刘国清担任主编,黄建吾、许晓玲担任副主编,编写大纲由赵利彬提出,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:第 1 章、第 9 章由马合保编写,第 2 章、第 3 章由王宜洁编写,第 4 章、第 7 章由许晓玲编写,第 5 章、第 8 章由黄建吾编写,第 6 章、第 10 章由刘国清编写.全书由赵利彬统稿、定稿.

在本书的编写过程中得到了有关领导、老师的支持,在此我们表示诚挚的谢意!在编写过程中参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者在此一并表示感谢!

虽然编者力求本书通俗易懂,简明流畅,便于教学,但由于作者水平与学识有限,本书疏漏与错误之处在所难免,书中一定还有不少不尽人意之处;敬请专家和读者多提出宝贵意见不吝批评和赐教.我们将万分感激.本书将不断改进与完善,突出自己的特色,更好地服务于教学.

赵利彬

2014 年 6 月

目　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题，平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要，它使一元函数微积分有了直观的几何意义，同样，空间解析几何对学习多元函数微积分也是必不可少的. 本章在建立空间直角坐标系的基础上，先讨论向量代数，然后用向量代数讨论空间的直线与平面，并介绍空间的曲面与曲线及空间解析几何的有关内容.

6.1　空间直角坐标系

6.1.1　空间直角坐标系

要用代数的方法来研究几何问题，首先要沟通空间的点与有序数组之间的联系，依照平面解析几何的方法，可以通过建立空间直角坐标系来实现. 过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴，他们都以 O 为原点，且有相同的长度单位，它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系. O 为原点，这三条轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴). 习惯上，把 x 轴与 y 轴放在水平面上 z 轴放在铅垂线上，它们的正向符合右手法则，即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 6-1). 这样的坐标系就是本章使用的右手直角坐标系.

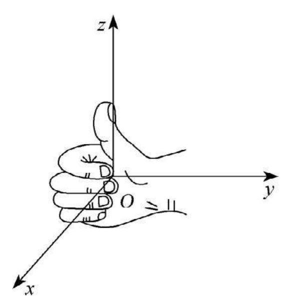

图 6-1

三个坐标轴两两确定一个平面，称为坐标面.

三个坐标面把整个空间划分为八个部分，每个部分称为卦限，共有八个卦限，按照象限的顺序(逆时针)：xOy 平面上方的四个卦限依次记为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，xOy 平面下方的四个卦限依次记为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

在空间建立了直角坐标系后，空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示.

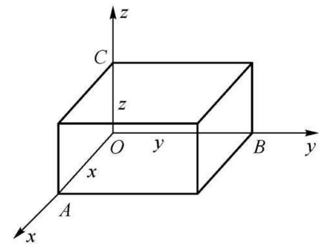

图 6-2

设 M 为空间任一点,过 M 点作三个分别与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,分别交 x、y、z 轴于 A、B、C 三点(图 6-2),若 A、B、C 三点在坐标轴上的坐标是 x_0, y_0, z_0,则空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x_0, y_0, z_0. 反之,任给一有序数组 x_0, y_0, z_0,我们可以在 x 轴,y 轴,z 轴上取坐标为 x_0, y_0, z_0 的点 A、B、C,并过 A、B、C 分别作与坐标轴垂直的平面,则它们相交于唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 x_0, y_0, z_0 之间的一一对应关系,这组数 x_0, y_0, z_0 称为点 M 的坐标,记为 $M(x_0, y_0, z_0)$, x_0, y_0, z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

6.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点,为了求它们之间的距离 d,我们过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-3).

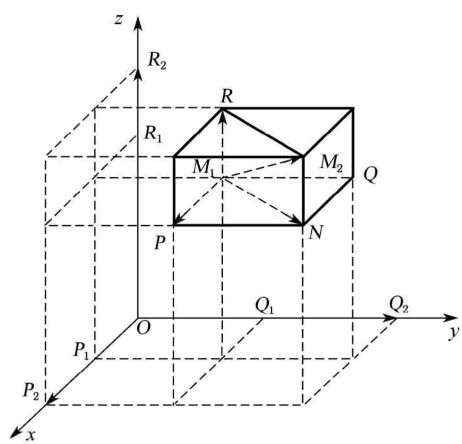

图 6-3

由勾股定理得

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$, $\quad |PN| = |\theta_1\theta_2| = |y_2 - y_1|$,

$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$,

所以 $d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

这就是**空间两点间的距离公式**.

特殊地,空间任一点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.1　证明以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解　因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$
$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$
$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98}.$$
$|AB| = |AC|$ 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

又因为 $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.2　求点 $M(1, 2, 4)$ 到各坐标轴的距离.

解　点 M 向各坐标轴做垂线,垂足依次为 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

因此 M 到三个坐标轴的距离依次为

$$d_x = |MA| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20},$$
$$d_y = |MB| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17},$$
$$d_z = |MC| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

例 6.1.3　设在 x 轴上 P,它到 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的两倍,求点 P 的坐标.

解　因为 P 在 x 轴上,设 P 点坐标为 $(x, 0, 0)$.

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$
$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$
因为 $|PP_1| = 2|PP_2|$,

所以 $\sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow x = \pm 1$.

所求点为 $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$.

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$A(1,-2,-3)$, $B(2,3,-4)$, $C(-4,-5,6)$, $D(5,-6,7)$, $E(-1,-2,-3)$, $F(-2,1,-3)$.

2. 指出下列各点所在的位置:

A. $(3,4,0)$, B. $(0,2,3)$, C. $(0,3,0)$, D. $(0,0,-1)$.

3. 试写出点(a,b,c)关于 xOy 面,关于 y 轴,及关于原点对称点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 上求一点,使该点与点 $A(3,0,4)$ 和 $B(3,4,0)$ 的距离相等,且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

6. 在 y 轴上求与点 $A(1,0,-3)$ 和点 $B(0,1,-1)$ 等距离的点.

7. 试证明以 $A(4,3,1)$, $B(7,1,2)$, $C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6.2 向量及其线性运算

6.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学及其他一些实际问题时,我们经常遇到这样一类量,它既有大小又有方向,我们把这一类量叫向量(或矢量),如:力、速度、位移、力矩等.

在数学上通常用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$,有时也用一个粗体小写字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等表示向量.

向量的大小称为向量的模,向量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$,模等于 1 的向量叫单位向量,模为零的向量叫零向量.零向量的方向是任意的.与起点无关的向量称为自由向量,本章所研究的向量主要就是这种自由向量.若两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行,我们说两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,两个向量只要大小相等且方向相同,我们称这两个向量是相等的.设有两个向量平行,经过平行移动可以共线,因此也称两个向量共线.

设有 $k(k\geqslant3)$个向量,把它们起点放在同一点,如果个终点与公共起点在同一个平面上,则称这 k 个向量共面.

6.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6-4）.

这种求向量和的方法称为**三角形法则**. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6-5），这种求向量和的方法称为**平行四边形法则**.

容易验证向量的加法满足以下运算定律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

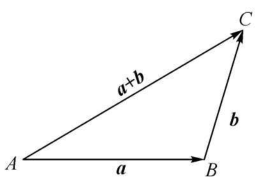

图 6-4

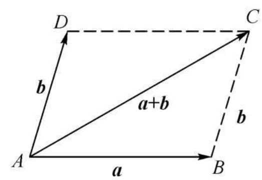

图 6-5

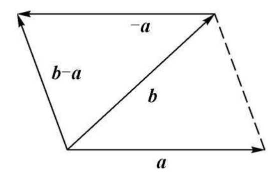

图 6-6

2. 向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加，便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 6-6）.

由三角形两边之和大于第三边的原理，我们可以得到常用的三角不等式.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反. 特别地，在 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{0}$，即为零向量.

$$\lambda=1\text{ 时},\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};\ \lambda=-1\text{ 时},\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

可以证明向量与数的乘法满足以下运算定律：

（1）结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

（2）分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系,即有

定理 6.2.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是,存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,事实上,若 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$,取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,则

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=0,\quad 所以\ \lambda=\mu.$$

单位向量在向量代数中是一类非常重要的向量,与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$.

按照向量与数的乘积的规定,我们有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 6.2.1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, M 为对角线交点,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$.

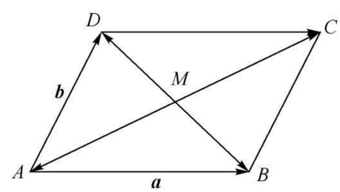

图 6-7

解 如图 6-7 所示,由于平行四边形对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AM},\ -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\,\overrightarrow{MA},$$

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\,\overrightarrow{BM}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\,\overrightarrow{MB}$,所以 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

6.2.3 向量在轴上的投影和向量的坐标

在讨论向量的概念与运算时,我们是用几何方法引进的,这个方法比较直观,但计算不方便,下面我们来引进向量的坐标,把向量用数组表示出来.使向量的运算可以化为数的运算.

1. 向量在轴上的投影

先引入两个向量夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,把它们的起点移到同一点,规定它们在 0 和 π 之间的夹角 θ 为这两个向量的夹角.

下面我们来定义向量在轴上的投影.设有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 u,过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面,与 u 轴分别交于点 A', B',则 A', B' 点分别称为 A, B 点在 轴 u 上的投影(图 6-8).

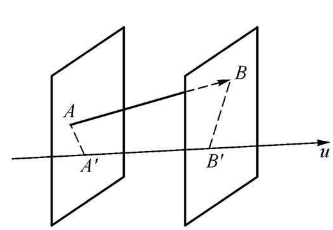

图 6-8