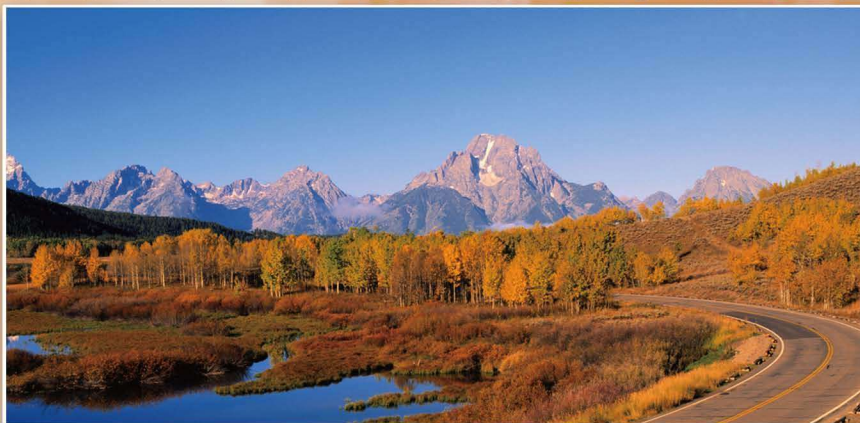


G A O D E N G S H U X U E



普通高等教育“十二五”规划教材

(理工类)

高等数学 下册

主 编 赵利彬 刘国清



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(理工类) 下册

主 编 赵利彬 刘国清

副主编 黄建吾 许晓玲



同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神的基础上,并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,为适应 21 世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,结合一些本、专科院校学生的基础和特点进行编写的,是面向 21 世纪课程教材。

全书分上、下两册,上册内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,下册内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程。书内各节后均配有相应的习题,同时每章还配有综合练习,书末附有习题的参考答案。

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富,适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用,也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类.下册 / 赵利彬主编. — 上海:
同济大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5608-5710-7

I. ①高… II. ①赵… III. ①高等数学—高等学校—
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 285333 号

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(理工类)下册

主编 赵利彬 刘国清 副主编 黄建吾 许晓玲

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向秦

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 21.75

印 数 1—4 100

字 数 435 000

版 次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5710-7

定 价 39.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

“高等数学”是普通高等院校理工类本科专业普遍开设的一门公共基础课程. 在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应 21 世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求, 适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变, 满足一些高等院校新的教学形势、学生基础和教学特点, 根据我们多年的教学改革实践, 在多次研讨和反复实践的基础上, 编写了这部高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神, 并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”, 参考了近几年来国内出版的一些优秀教材, 结合编者多年的教学实践经验, 编写而成的. 全书以严谨的知识体系, 通俗易懂的语言, 丰富的例题、习题, 深入浅出地讲解高等数学的知识. 培养学生分析问题、解决问题的能力.

全书分上、下两册, 上册内容包括: 函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用.

下册内容包括: 向量代数与空间解析几何, 多元函数微分学, 多元函数积分学, 无穷级数, 常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题, 同时每章还配有综合练习, 书末附有习题的参考答案. 本书的主要特色有以下几点:

1. 在满足教学基本要求的前提下, 淡化理论推导过程. 加强训练, 强化应用.

在第 1 章中没有介绍映射的内容, 直接通过实例给出函数的定义, 同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂, 又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时, 本书经过精心设计与编选, 配备了相当丰富的例题、习题, 目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质, 掌握重要的解题方法和应用技巧.

2. 内容结构设计合理, 突出重点消除难点. 篇幅比传统教材要少, 但高等数学的基本内容都讲到了, 且有一定的理论深度.

平面极坐标是积分中经常用的重要内容, 因此, 在第 5 章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系, 给出了一些常用曲线的极坐标方程, 为后面的学习奠定了一定的理论基础.

3. 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

4. 注重理论联系实际,增加了数学在工程技术上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

5. 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

一致连续、一致收敛等内容可根据教学需要和学时安排酌情增删.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题、习题丰富.适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学经管类微积分课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由赵利彬、刘国清担任主编,黄建吾、许晓玲担任副主编,编写大纲由赵利彬提出,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:第1章、第9章由马合保编写,第2章、第3章由王宜洁编写,第4章、第7章由许晓玲编写,第5章、第8章由黄建吾编写,第6章、第10章由刘国清编写.全书由赵利彬统稿、定稿.

在本书的编写过程中得到了有关领导、老师的支持,在此我们表示诚挚的谢意!在编写过程中参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者在此一并表示感谢!

虽然编者力求本书通俗易懂,简明流畅,便于教学,但由于作者水平与学识有限,本书疏漏与错误之处在所难免,书中一定还有不少不尽人意之处;敬请专家和读者多提出宝贵意见不吝批评和赐教.我们将万分感激.本书将不断改进与完善,突出自己的特色,更好地服务于教学.

赵利彬

2014年6月

目 录

前 言

第 6 章 向量代数与空间解析几何	1
6.1 空间直角坐标系	1
6.1.1 空间直角坐标系	1
6.1.2 空间两点间的距离	2
习题 6-1	4
6.2 向量及其线性运算	4
6.2.1 向量的概念	4
6.2.2 向量的线性运算	5
6.2.3 向量在轴上的投影和向量的坐标	6
6.2.4 向量的模、方向余弦的坐标表达式	8
习题 6-2	10
6.3 数量积与向量积	10
6.3.1 两向量的数量积	10
6.3.2 两向量的向量积	12
习题 6-3	15
6.4 平面及其方程	15
6.4.1 平面的点法式方程	16
6.4.2 平面的一般式方程	17
6.4.3 两平面的夹角	19
6.4.4 点到平面的距离	20
习题 6-4	21
6.5 空间直线及其方程	21

6.5.1 空间直线的一般方程	21
6.5.2 空间直线的对称式方程与参数方程	22
6.5.3 两直线的夹角,平面与直线的夹角	23
6.5.4 平面束	26
习题 6-5	26
6.6 曲面及其方程	27
6.6.1 曲面方程的概念	27
6.6.2 旋转曲面	28
6.6.3 柱面	29
6.6.4 其他常见的二次曲面	31
习题 6-6	36
6.7 空间曲线及其方程	36
6.7.1 空间曲线的一般方程及参数方程	36
6.7.2 空间曲线在坐标面上的投影	37
习题 6-7	39
综合练习 6	40
第 7 章 多元函数微分学	44
7.1 多元函数的极限与连续性	44
7.1.1 平面点集	44
7.1.2 多元函数概念	47
7.1.3 多元函数的极限	48
7.1.4 多元函数的连续性	50
习题 7-1	52
7.2 偏导数	52
7.2.1 偏导数的定义及算法	52
7.2.2 高阶偏导数	57
习题 7-2	59
7.3 全微分	60
7.3.1 全微分的定义	60
7.3.2 全微分在近似计算中的应用	64

习题 7-3	65
7.4 多元复合函数及隐函数的求导法则	66
7.4.1 多元复合函数的求导法则	66
7.4.2 隐函数的求导法则	70
习题 7-4	75
7.5 多元函数微分法的应用	76
7.5.1 空间曲线的切线与法平面	76
7.5.2 曲面的切平面与法线	80
7.5.3 方向导数与梯度	82
习题 7-5	90
7.6 多元函数极值及求法	91
7.6.1 多元函数的极值	91
7.6.2 多元函数的最值	94
7.6.3 条件极值 拉格朗日乘数法	94
习题 7-6	99
7.7 多元函数的泰勒公式	100
习题 7-7	103
综合练习 7	104
第 8 章 多元函数积分学	108
8.1 二重积分	108
8.1.1 二重积分的概念	108
8.1.2 二重积分的性质	112
8.1.3 二重积分的计算	113
习题 8-1	125
8.2 二重积分的应用	127
8.2.1 平面图形的面积和几何体的体积	128
8.2.2 曲面的面积	130
8.2.3 质量与质心	133
8.2.4 转动惯量	135
习题 8-2	136

8.3 三重积分	136
8.3.1 三重积分的概念	136
8.3.2 三重积分的计算	137
习题 8-3	143
8.4 含参变量的积分	144
习题 8-4	150
8.5 曲线积分	151
8.5.1 对弧长的曲线积分	151
8.5.2 对坐标的曲线积分	158
8.5.3 格林(Green)公式及其应用	164
习题 8-5	174
8.6 曲面积分	176
8.6.1 对面积的曲面积分	176
8.6.2 对坐标的曲面积分	181
8.6.3 高斯(Gauss)公式及其应用	190
8.6.4 斯托克斯(Stokes)公式及其应用	196
习题 8-6	201
综合练习 8	203
 第 9 章 无穷级数	 207
9.1 数项级数的概念与基本性质	207
9.1.1 数项级数及其敛散性	207
9.1.2 级数的基本性质	210
习题 9-1	214
9.2 数项级数的审敛法	215
9.2.1 正项级数及其审敛法	215
9.2.2 交错级数及莱布尼兹定理	223
9.2.3 级数的绝对收敛与条件收敛	225
习题 9-2	228
9.3 幂级数	229
9.3.1 函数项级数的概念	229

9.3.2 幂级数及其收敛区间	230
9.3.3 幂级数的运算及性质	234
习题 9-3	237
9.4 函数的幂级数展开	238
9.4.1 泰勒级数	238
9.4.2 初等函数的幂级数展开	241
9.4.3 幂级数在近似计算上的应用	246
习题 9-4	248
9.5 函数项级数的一致收敛性	248
9.5.1 一致收敛的概念	248
9.5.2 和函数的分析性质	252
习题 9-5	255
9.6 傅里叶级数	255
9.6.1 三角函数系与三角级数	256
9.6.2 函数的傅里叶级数	256
9.6.3 正弦级数和余弦级数	260
9.6.4 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	267
9.6.5 傅里叶级数的复数形式	269
习题 9-6	272
综合练习 9	273
第 10 章 常微分方程	276
10.1 微分方程的基本概念	276
10.1.1 引例	276
10.1.2 基本概念	277
习题 10-1	281
10.2 一阶微分方程	281
10.2.1 变量可分离的微分方程	282
10.2.2 齐次方程	285
10.2.3 一阶线性微分方程	289
习题 10-2	297

10.3 可降阶的高阶微分方程·····	298
10.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 ·····	298
10.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 ·····	299
10.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 ·····	300
习题 10-3 ·····	302
10.4 高阶线性微分方程·····	303
10.4.1 基本概念 ·····	303
10.4.2 线性微分方程的解的结构 ·····	303
10.4.3 二阶常系数齐次线性微分方程 ·····	306
10.4.4 二阶常系数非齐次线性微分方程 ·····	310
10.4.5 欧拉方程 ·····	315
习题 10-4 ·····	316
综合练习 10 ·····	317
 参考答案·····	 302
 参考文献·····	 336

第 6 章 向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题,平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要,它使一元函数微积分有了直观的几何意义,同样,空间解析几何对学习多元函数微积分也是必不可少的.本章在建立空间直角坐标系的基础上,先讨论向量代数,然后用向量代数讨论空间的直线与平面,并介绍空间的曲面与曲线及空间解析几何的有关内容.

6.1 空间直角坐标系

6.1.1 空间直角坐标系

要用代数的方法来研究几何问题,首先要沟通空间的点与有序数组之间的联系,依照平面解析几何的方法,可以通过建立空间直角坐标系来实现.过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴,他们都以 O 为原点,且有相同的长度单位,它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系. O 为原点,这三条轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴).习惯上,把 x 轴与 y 轴放在水平面上 z 轴放在铅垂线上,它们的正向符合右手法则,即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时大拇指的指向就是 z 轴

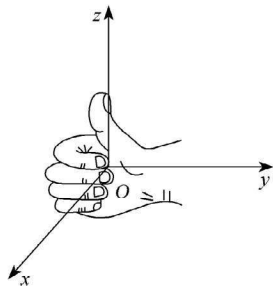


图 6-1

的正向(图 6-1). 这样的坐标系就是本章使用的右手直角坐标系.

三个坐标轴两两确定一个平面,称为坐标面.

三个坐标面把整个空间划分为八个部分,每个部分称为卦限,共有八个卦限,按照象限的顺序(逆时针): xOy 平面上方的四个卦限依次记为 I、II、III、IV 卦限, xOy 平面下方的四个卦限依次记为 V、VI、VII、VIII 卦限.

在空间建立了直角坐标系后,空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示.

设 M 为空间任一点, 过 M 点作三个分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 分别交 x 、 y 、 z 轴于 A 、 B 、 C 三点(图 6-2), 若 A 、 B 、 C 三点在坐标轴上的坐标是 x_0 、 y_0 、 z_0 , 则空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x_0, y_0, z_0 . 反之, 任给一有序数组 x_0, y_0, z_0 , 我们可以在 x 轴、 y 轴、 z 轴上取坐标为 x_0, y_0, z_0 的点 A 、 B 、 C , 并过 A 、 B 、 C 分别作与坐标轴垂直的平面, 则它们相交于唯一的点 M . 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 x_0, y_0, z_0 之间的一一对应关系, 这组数 x_0, y_0, z_0 称为点 M 的坐标, 记为 $M(x_0, y_0, z_0)$, x_0, y_0, z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

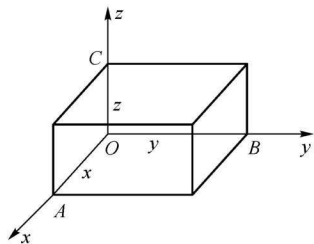


图 6-2

6.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 为了求它们之间的距离 d , 我们过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-3).

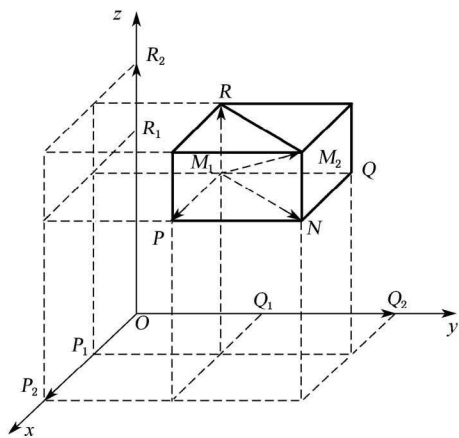


图 6-3

由勾股定理得

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$, $|PN| = |\theta_1\theta_2| = |y_2 - y_1|$,

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以 $d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地,空间任一点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.1 证明以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98}.$$

$$|AB| = |AC| \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 为等腰三角形.}$$

又因为 $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.2 求点 $M(1, 2, 4)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 向各坐标轴做垂线, 垂足依次为 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

因此 M 到三个坐标轴的距离依次为

$$d_x = |MA| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20},$$

$$d_y = |MB| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17},$$

$$d_z = |MC| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

例 6.1.3 设在 x 轴上 P , 它到 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的两倍, 求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上, 设 P 点坐标为 $(x, 0, 0)$.

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$$\text{因为 } |PP_1| = 2|PP_2|,$$

$$\text{所以 } \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow x = \pm 1.$$

所求点为 $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$.

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:
 $A(1, -2, -3)$, $B(2, 3, -4)$, $C(-4, -5, 6)$, $D(5, -6, 7)$, $E(-1, -2, -3)$,
 $F(-2, 1, -3)$.
2. 指出下列各点所在的位置:
 $A(3, 4, 0)$, $B(0, 2, 3)$, $C(0, 3, 0)$, $D(0, 0, -1)$.
3. 试写出点 (a, b, c) 关于 xOy 面,关于 y 轴,及关于原点对称点的坐标.
4. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.
5. 在 yOz 上求一点,使该点与点 $A(3, 0, 4)$ 和 $B(3, 4, 0)$ 的距离相等,且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.
6. 在 y 轴上求与点 $A(1, 0, -3)$ 和点 $B(0, 1, -1)$ 等距离的点.
7. 试证明以 $A(4, 3, 1)$, $B(7, 1, 2)$, $C(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6.2 向量及其线性运算

6.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学及其他一些实际问题时,我们经常遇到这样一类量,它既有大小又有方向,我们把这一类量叫向量(或矢量),如:力、速度、位移、力矩等.

在数学上通常用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$,有时也用一个粗体小写字母 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 等表示向量.

向量的大小称为向量的模,向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$,模等于 1 的向量叫单位向量,模为零的向量叫零向量.零向量的方向是任意的.与起点无关的向量称为自由向量,本章所研究的向量主要就是这种自由向量.若两个向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所在的线段平行,我们说两个向量平行,记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,两个向量只要大小相等且方向相同,我们称这两个向量是相等的.设有两个向量平行,经过平行移动可以共线,因此也称两个向量共线.

设有 $k(k \geq 3)$ 个向量,把它们起点放在同一点,如果个终点与公共起点在同一个平面上,则称这 k 个向量共面.

6.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 a 和 b , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, 以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC} = b$, 则向量 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 和 b 的和, 记作 $c = a + b$ (图 6-4).

这种求向量和的方法称为三角形法则. 当 a 与 b 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB} = a$ $\overrightarrow{AD} = b$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC} = a + b$ (图 6-5), 这种求向量和的方法称为平行四边形法则.

容易验证向量的加法满足以下运算定律:

(1) 交换律: $a + b = b + a$.

(2) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

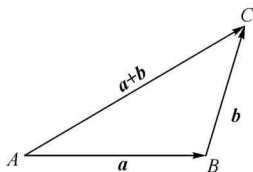


图 6-4

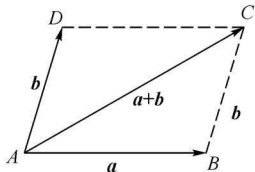


图 6-5

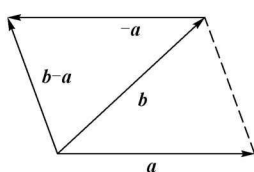


图 6-6

2. 向量的减法

设 a 为一向量, 与 a 方向相反且模相等的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$. 我们规定两个向量 b 与 a 的差为 $b - a = b + (-a)$, 即把 $-a$ 与 b 相加, 便得到 b 与 a 的差 $b - a$ (图 6-6).

由三角形两边之和大于第三边的原理, 我们可以得到常用的三角不等式.

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b|, \\ |a - b| &\leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

3. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积是一个向量, 记作 λa , 它的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$, 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反. 特别地, 在 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即为零向量.

$$\lambda = 1 \text{ 时, } \lambda a = a; \lambda = -1 \text{ 时, } \lambda a = -a.$$

可以证明向量与数的乘法满足以下运算定律:

(1) 结合律 $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$;

(2) 分配律 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

由于向量 λa 与 a 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系, 即有

定理 6.2.1 设向量 $a \neq 0$, 则向量 b 平行于 a 的充分必要条件是, 存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$, 事实上, 若 $b \parallel a$, 取 $|\lambda| = \frac{|a|}{|b|}$, 则 $b = \lambda a$, 若 $b = \lambda a$, $b = \mu a$, 则

$$\lambda a - \mu a = (\lambda - \mu)a = 0, \quad \text{所以 } \lambda = \mu.$$

单位向量在向量代数中是一类非常重要的向量, 与向量 a 方向相同的单位向量称为 a 的单位向量, 记作 a^0 .

按照向量与数的乘积的规定, 我们有 $a = |a|a^0$ 或 $a^0 = \frac{a}{|a|}$.

例 6.2.1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, M 为对角线交点, 试用 a 和 b 表示 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6-7 所示, 由于平行四边形对角线互相平分, 所以

$$a + b = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}, \quad -(a + b) = 2\overrightarrow{MA},$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a + b).$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{BD} = b - a = 2\overrightarrow{BM}, \text{ 即 } a - b = 2\overrightarrow{MB}, \text{ 所以 } \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(a - b).$$

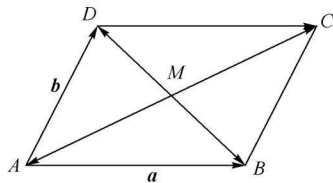


图 6-7

6.2.3 向量在轴上的投影和向量的坐标

在讨论向量的概念与运算时, 我们是用几何方法引进的, 这个方法比较直观, 但计算不方便, 下面我们来引进向量的坐标, 把向量用数组表示出来. 使向量的运算可以化为数的运算.

1. 向量在轴上的投影

先引入两个向量夹角的概念.

设有两个非零向量 a 和 b , 把它们的起点移到同一点, 规定它们在 0 和 π 之间的夹角 θ 为这两个向量的夹角.

下面我们来定义向量在轴上的投影. 设有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 u , 过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面, 与 u 轴分别交于点 A' , B' , 则 A' , B' 点分别称为 A , B 点在轴 u 上的投影(图 6-8).

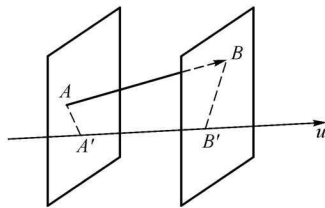


图 6-8