普通高等教育“十二五”规划教材
公共基础课程教材系列

高等数学

上册

◎ 主编：彭建平 段生贵 曹南斌

电子科技大学出版社

高等数学

（上册）

主　编　彭建平　段生贵　曹南斌

本书编写组（按姓氏笔画为序）：

弓小影　田雪玲　刘晓姗

李文汉　辛玉东　宋建民

陈金萍　陈敏江

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册 / 彭建平，段生贵，曹南斌主编．
—成都：电子科技大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5647-0471-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①彭… ②段… ③曹… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 181430 号

高等数学（上册）

主编　彭建平　段生贵　曹南斌

出版发行：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：曾　艺
责任编辑：袁　野
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：三河市文阁印刷厂
成品尺寸：170mm×230mm　　印张 17.5　　字数 330 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版
印　　次：2013 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-0471-1
定　　价：33.00 元

目　　录

第一章　函数与极限

函数是微积分的主要研究对象,而极限又是研究函数的基本工具,在本章前半部分主要介绍极限的概念、性质和运算法则;介绍与极限概念密切相关、且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量;我们还将求得两个应用非常广泛的重要极限.学好这些内容,准确理解极限概念,熟练掌握极限运算法则,是学好微积分的基础.

本章的后半部分将通过极限引入函数的一类重要性质——连续性.连续性是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述.函数在一点处连续与函数在一个区间上的连续则分别描述了函数的微观性态和宏观性态.学好这章内容,对掌握微积分全部内容与技巧有重要的影响与作用.

第一节　函数的概念与性质

一、集合

1.集合概念

集合是最基本的数学概念之一.所谓集合,指的是具有一定性质的对象的全体,通常用大写拉丁字母 A,B,X,Y 等表示集合.集合中的对象称为该集合中的元素,通常用小写拉丁字母 a,b,x,y 等表示.

对于集合 A,如果对象 a 是集合 A 的元素,则说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果对象 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.一个集合若其元素的个数是有限的,则称作有限集,否则称作无限集.

集合的表示通常有两种方法,一种是列举法,就是把集合的全体元素一一

列举出来表示.

例如:自然数集 $N=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,整数集 $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\}$.

另一种是描述法,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,就可表示成 $M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$.

有时我们在表示数集的字母的右上角标上"$*$"来表示该数集内排除了数 0 的集;标上"$+$"表示该数集内排除 0 与负数的集.

正整数集 $N^{+}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

有理数集 $Q=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\, p\in N^{+},q\in Z,\text{且 }p,q\text{ 互质}\right\}$;

实数集 $R=\{x\mid x\text{ 是有理数或无理数}\}$.

设 A,B 是两个集合,如果 A 的所有元素都属于 B,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$. 例如 $N^{+}\subset Z\subset Q\subset R$. 显然对任何集合 A,都有 $A\subset A$. 规定空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

2. 集合运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$;

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$;

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A\backslash B$,即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.

有时在研究某个问题时,问题中所涉及的集合总是某个最大集合 X 的子集,此时称 X 是全集;当 $A\subset X$ 时,称由 X 中不属于 A 的元素的全体组成的集合为 A 的补集或余集,并记为 A^{C},即 $A^{C}=\{x\mid x\in X\text{ 且 }x\notin A\}$.

例如偶数集关于整数集的补集为奇数集;有理数集 Q 关于实数集 R 的补集为无理数集.

3. 区间与邻域

在高等数学课程中,最常遇到的实数集的子集是区间.

设 a,b $(a<b)$是两个实数，则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的开区间，如图 1-1，记为

$$(a,b)=\{x|a<x<b\};$$

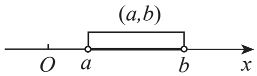

图 1-1

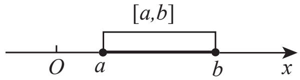

图 1-2

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的闭区间，如图 1-2，记为

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或$(a\leqslant x<b)$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记为

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}\text{或}([a,b)=\{x|a\leqslant x<b\})$$

上述几类区间的长度是有限的，称为有限区间. 除此以外，还有下述几类无限区间(或无穷区间)，引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)，则可用类似地记号表示无限区间，例如

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{ 为任意实数}\}.$$

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径(如图 1-3).

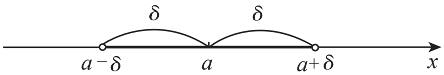

图 1-3

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于$|x-a|<\delta$，因此 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，所以 $U(a,\delta)$表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

为方便起见，把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

二、映射

1. 映射概念

定义 1 设 X,Y 是两个给定的集合，如果按照某个确定的对应法则 f，使对于集合 X 中的每一个元素 x，都可以找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称这个对应法则 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射，记为

$$f:X\to Y$$

其中 y 称为映射 f 下 x 的像，x 称为映射 f 下 y 的一个原像，通常记为 $y=f(x)$. 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f；在映射 f 之下，X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f，即 $R_f=\{y\mid y\in Y \text{ 并且 } y=f(x),x\in X\}$.

从映射定义看出，构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

(1) 集合 X，即定义域 $D_f=X$；

(2) 集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；

(3) 对应法则 f，使每一个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

需要注意的是：

(1) 映射要求元素的像必须是唯一的.

例如，设 $X=R^+$，$Y=R$，而对应法则 f 要求对每一个 $x\in R^+$，它的像 $y\in R$ 且满足关系 $y^2=x$，这样的 f 不是映射，就是因为 f 不满足像的唯一性的要求.

(2) 映射并不要求原像也具有唯一性.

例 1 设 X 是平面上所有三角形的全体，Y 是平面上所有圆的全体. 因每个三角形都有唯一确定的外接圆，若定义对应法则 f：y 是三角形 x 的外接圆，则 f 显然是一个映射，其定义域与值域分别为 $D_f=X$ 和 $R_f=Y$.

例 2 记 $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，下面所规定的对应关系显然也是一个映射：$f(\alpha)=a$，$f(\beta)=b$，$f(\gamma)=c$，则 f 的定义域为 $D_f=X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，

值域 $R_f = \{a,b,c\} \subset Y$.

例 3 设 $f: R \to R$,对每个 $x \in R$, $f(x) = x^2$. 显然 f 是一个映射,f 的定义域$D_f = R$,值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$,它是 R 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y,除 $y = 0$ 外,它的原像不是唯一的. 如 $y = 4$ 的原像就有 $x = 2$ 和 $x = -2$ 两个.

例 4 设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$,对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$,易知 f 是一个映射,其定义域 $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,值域 $R_f = [-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 f 的原像也具有唯一性,即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射,如果映射 f 满足 $R_f = Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 是双射(又称为一一映射).

上面例 1 中的映射不是单射,是满射;例 2 中的映射是单射,不是满射;例 3 中的映射既不是满射,也不是单射;例 4 中的映射,既是单射,又是满射,因此是一一映射.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每一个 $y \in R_f$,有唯一的 $x \in X$,适合 $f(x) = y$. 于是,可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g: R_f \to X,$$

对每个 $y \in R_f$,规定 $g(y) = x$,这 x 满足 $f(x) = y$,这个映射 g 称为 f 的逆映射,记为 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$,值域 $R_{f^{-1}} = X$.

显然,只要逆映射 f^{-1}存在,它就一定是 R_f 到 X 上的双射.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, f: Y_2 \to Z.$$

如果 $R_g \subset Y_2 = D_f$,那么就可以构造出一个新的对应法则,这还是一个映射. 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$,我们把这个映射称为 g 和 f 构成的复合映射,记作 $f \circ g$,即

$$f \circ g: X \to Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

例 5 设 $X = Y_1 = Y_2 = Z = R$,映射 $g: X \to Y_1$,对每个 $x \in X$, $g(x) =$

$\sin x$ 和 $f:Y_2\to Z$,对每个 $u\in Y_2$,有 $f(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$. 显然 $R_g=[-1,1]\subset D_f$,因此 g 与 f 可以构成复合映射 $f\circ g:X\to Z$,对每个 $x\in X$,有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}.$$

由复合映射的定义可知,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:$R_g\subset D_f$,否则,不能构成复合映射. 由此可以知道,映射 f 和 g 的复合是有顺序的. 这就是说,$f\circ g$ 有意义并不意味着 $g\circ f$ 也一定有意义,即使都有意义,即 $R_g\subset D_f$ 与 $R_f\subset D_g$ 都满足,复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也是不同的.

特别的,若将映射 f 与它的逆映射 f^{-1} 进行复合,则得到下述两个恒等式:

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=y,y\in R_f;$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x,x\in X.$$

例如,在前面的例题中,例 2,例 4 中的映射存在逆映射. 例 4 的逆映射 f^{-1} 就是

$$x=\arcsin y,\ [-1,1]\to y\in[-1,1].$$

并且通过复合运算,可得到恒等式

$$\sin(\arcsin y)=y,\ y\in[-1,1];$$

$$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

三、函数

1. 函数概念

定义 2 设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为 $y=f(x)$,$x\in D$. 读作“函数 $y=f(x)$”或“函数 f”,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.

函数定义中,对每个 $x\in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,通常称为函数关系,函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可知,一个函数的构成要素为定义域和对应法则. 由于值域是由定义域 D_f 和对应法则 f 决定的,所以,如果两个函数的定义域和对应法则完全一致,我们就称两个函数相同,否则就是不同的.

表示函数的方法有三种:表格法、图示法、解析法(公式法).

表格法就是将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法.例如在实际应用中,我们经常会用到的平方表,三角函数表等都是用表格法表示的函数.

图示法就是用坐标平面上曲线来表示函数的方法.一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量(如图 1-4).

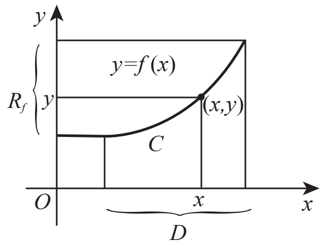

图 1-4

解析法就是用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法.在用解析法表示函数时,有些特殊情形.

情形一:有些函数在它的定义域的不同部分,其表达式不同,亦即用多个解析式表示一个函数,这类函数称为分段函数.

下面列举几个常用的分段函数.

例 6 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = [0, +\infty)$,它的图形如图 1-5 所示.

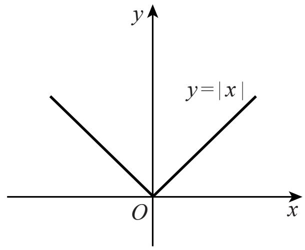

图 1-5

例 7 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

它的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = \{1, 0, -1\}$,图形如图 1-6 表示.对于任何实数 x,下列关系成立:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

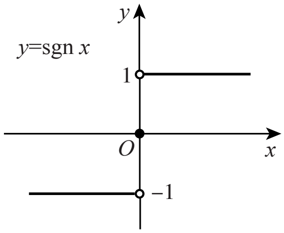

图 1-6

例 8 “整数部分”函数(又称取整函数),$y=[x]=n, n\leqslant x<n+1, n\in Z$. 它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=Z$. 根据定义可知,对任一实数 x,它所对应的函数值 $[x]$ 称为 x 的整数部分. 例如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$. 图形如图 1-7 所示,函数的图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

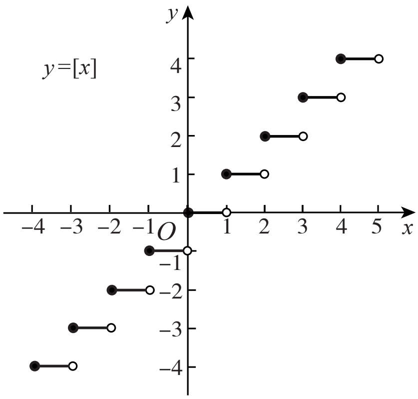

图 1-7

对于取整函数 $[x]$,可以证明:对任意的实数 x,有不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$.

注意分段函数的定义域是其各段定义域的并集;另外,分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

情形二:函数的隐式表示,是指通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x 之间函数关系的方式,这也是一种重要的函数表示形式.

例 9 圆的标准方程 $x^2+y^2=R^2$,反映了变量 x 与 y 之间的特定关系. 由于当 $x\in(-R,R)$,对应的 y 不是唯一确定的,所以,还不能说 y 是 x 的函数. 但是若限定条件 $y\geqslant 0$,即只考虑上半圆周时,变量 y 就是变量 x 的函数了,且可表示为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$,此时 $x^2+y^2=R^2$, $y\geqslant 0$ 就是它的隐式表示形式.

情形三：在表示变量 x 与 y 的函数关系时，我们需要引入第三个变量（例如参数 t），通过建立 t 与 x，t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

称为函数的参数表示.

2. 函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，若存在常数 M_1，使得 $f(x) \geqslant M_1$ 对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界；若存在常数 M_2，使得 $f(x) \leqslant M_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，M_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

若存在两个常数 M_1 和 M_2，使得 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

函数 $f(x)$ 在 X 上有界的另一定义是"存在常数 $M>0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对任一 $x \in X$ 都成立". 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

容易证明函数 $f(x)$ 在 X 上有界的两种定义是等价的.

例如，由于 $|\sin x| \leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）.

又如函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有下界但无上界，因此 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但是 $f(x) = x^2$ 在 $(-1,1)$ 内是有界的.

(2)函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，I 是一个区间，且 $I \subset D$，如果函数在区间 I 上随着 x 增大而增大，即：对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（如图 1-8）. 如果函数在区间 I 上随着 x 增大而减小，即：对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的（如图 1-9）. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

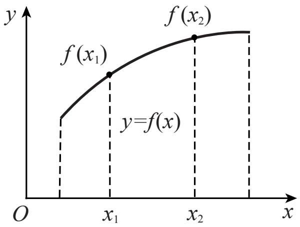

图 1-8

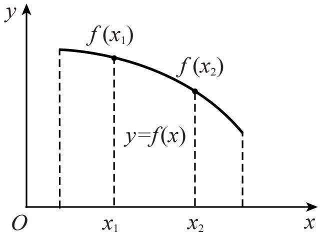

图 1-9

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的；在$(-\infty,+\infty)$内函数不是单调的(如图 1-10).

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的(如图 1-11).

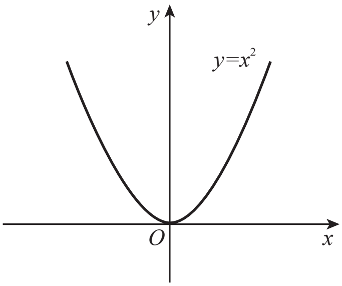

图 1-10

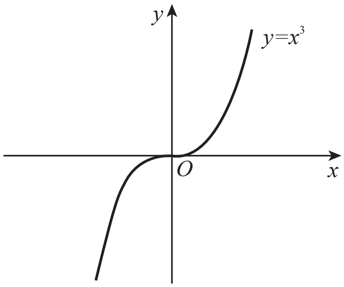

图 1-11

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$(此时必有 $-x\in D$)都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

注 偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-12)，奇函数的图形关于原点对称(如图1-13).

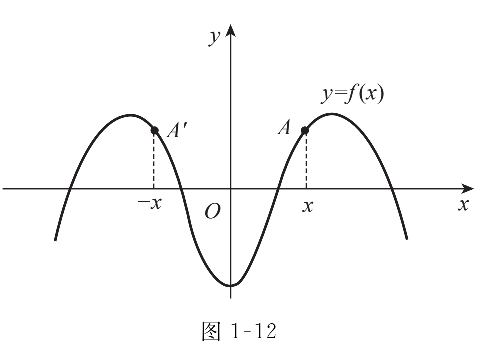

图 1-12

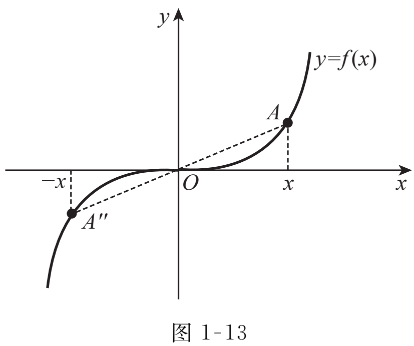

图 1-13