高职数学

（二年制）

主编 龙辉 陆海

电子科技大学出版社

高　职　数　学

（二年制）

主　编　龙　辉　陆　海

主　审　黄锡年

编　者　龙　辉　陆　海

耿恭健　廖小林　钟珊珊

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高职数学:两年制/龙辉等主编.—成都:电子科技大学出版社,2005.8

ISBN 7-81094-826-1

Ⅰ.高...　Ⅱ.龙...　Ⅲ.数学－高等学校:技术学校－教材　Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第084286号

高职数学(两年制)

陆海　龙辉　主编

出　　版:电子科技大学出版社

　　　　(成都建设北路二段四号　邮编:610054)

责任编辑:徐守铭

发　　行:新华书店经销

印　　刷:成都光电印刷厂

开　　本:787×1092　1/16　印张:13　字数:324千字

版　　次:2005年8月第一版

印　　次:2005年8月第一次印刷

书　　号:ISBN 7-81094-826-1/O·42

印　　数:8000册

定　　价:19.80元

前　言

教育部高等教育司《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》指出，各类高职高专院校，都要按照教育部制定的高职高专教育基础课程教学基本要求和专业培养规格编写教材. 同时，要注意编写适用于不同地区、不同学校、各具特色的系列教材. 根据这一精神，同时根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》以及教育部《两年制高等职业教育技能型紧缺人才培养指导方案》，我们组织了一批富有高等职业教育教学经验的专家编写了这本《高职数学》教材，供两年制高职使用.

本教材的特点是:

1. 准确地把握了“必需、够用”的尺度

本教材是完全按照教育部《两年制高等职业教育技能型紧缺人才培养指导方案》指定的内容编写的. 内容包括函数、一元函数微积分、常微分方程、概率与数理统计初步、数理逻辑初步等. 这里兼顾了各种两年制专业的需求，这样供给对准需求，充分体现了高职教育“以服务为宗旨”的指导思想.

2. 进一步降低了深奥的数学理论和计算难度

与以往教材相比，删去了只具理论价值，在实际中用处不大的纯理论.

大部分定理省去了严格的理论证明，只给出几何解释或归纳.

由于教材中使用了计算机软件进行数学运算和数值计算，因此删减了很多人工运算技巧和繁难的计算.

3. 强化了数学在实际中的应用

概念的引入一律从实际问题入手，遵循了从感性到理性的认知规律，同时也是为下一步理论在实际中的应用推出了范例.

编入了大量有实际应用背景的例题、习题及讨论课题，落实以应用为目的的原则.

4. 数学与计算机软件相结合

教材中几乎每一章都有数学软件 Matlab 的应用,附录中还集中介绍了 Matlab 使用基础. 软件的应用减少了计算的难度;运用软件演示,使得数学教学手段更加现代化,教学更加直观和动态.

5. 注重教学互动,改变学生学习方式

以往以罗列知识为表现形式的陈述式教材与注入式的教学相适应. 本教材试图体现教学的启发式,改学生的被动接受为主动参与,因此教材中设置一些"学习活动","研究课题","讨论","观察与思考"等形式生动的栏目,加强了教与学,学与学的交流与互动,让学生通过积极思维,相互启发,发挥主观能动性,提高学习效率.

6. 改革了教材版面的呈现形式

教材中穿插了大量图标、图形和图示,图文并茂. 每章的开头配有标志性的插图和带启发性的引言. 正文的右边留有空白栏,可供编者适时地进行注解,也可供学生学习时批注. 教材版面的人性化使学生易于接受,乐于接受.

编写组成员

主编　龙　辉　陆　海

主审　黄锡年

编者　龙　辉　陆　海　廖小林　耿恭健　钟珊珊

本书在编写过程中得到了重庆市数学学会高职专委会的指导,得到了在渝主要高职院校以及一些举办了高职、高专教育的各级各类学校领导和教师的大力支持和帮助,在此表示诚挚的感谢.

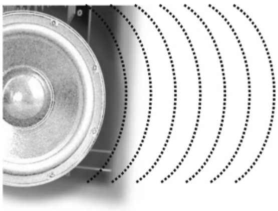
本教材基本学时数为 70 学时,使用者可根据专业需求适当增删.

由于本教材具有创新的模式,编写它是一种尝试,且编者水平有限,因此难免有缺点和错误,恳请读者批评指正.

《高职数学》(两年制) 教材编写组

2005 年 4 月

目　录



第 1 章

函数、极限与连续

大家都知道声音在空气中的传播速度是 340m/s，经过 t s 后，它传播的距离 s 有多远呢？由公式：距离 = 速度 × 时间，可以得出 $s = 340t$ m. 这是公式，也是我们将要讨论的函数. 如果已知时间 t，就可算出传播的距离 s 来.

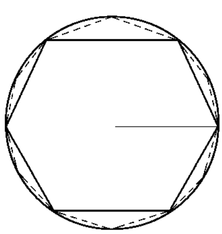
由此可知，函数的作用就是通过一个已知的信息去推知另一个未知的信息.

在千变万化的自然界，在错综复杂的人类社会，各种事物和现象之间无不存在着千丝万缕的联系，而函数就是描述量与量之间关系的有力工具.

圆周率 π 就是圆周长与直径之比，也即直径为 1 的圆的周长，你可知道圆周率是怎样求出来的吗？在公元 263 年，三国时期的数学家刘徽为了求圆周率，对直径为 1 的圆作了分割. 先在圆内内接正三角形，然后取各段弧的中点，作第二次分割，得正六边形，依次类推，得正十二边形、正二十四边形 …… 随着分割次数的增加，正 n 边形和圆就越来越接近. 当分割次数无限增大时，正 n 边形就变成圆了. 如果我们用 C 表示圆的周长，用 C_n 表示圆的内接正 n 边形的周长，显然 C_n 是 n 的函数 $C_n = f(n)$，当 n 较大时，我们可用正 n 边形的周长作圆的周长的近似值，刘徽采用这种思想，求出了 $C \approx 3.14$，到了南北朝时期，数学家祖冲之，将正 n 边形推演到了 98 304 边形，求出圆周率落在3. 141 592 6到3. 141 529 27之间，这一纪录在世界上保持了达1100 年之久. 但是不管圆的内接正多边形的边数 n 是多大的整数，C_n 总是 C 的近似值. 只有当圆的内接正多边形的边数 n 无限增加时，C_n 才无限地趋于一个确定的值，这个确定的值我们记作 π，理应是直径为 1 的圆的周长的精确值，称其为圆周率.

上面通过对圆周长的近似值 C_n 的变化趋势分析，确定出圆的周长的精确值，这就是极限的思想. 极限理论在高等数学中占有重要的地位.

本章我们将在中学数学函数的基础之上进一步理解函数的概念、基本初等函数的概念、复合函数的概念、初等函数的概念. 了解数学建模，学会建立简单的函数模型，学会复合函数的分解. 讨论函数极限的概念、极限的运算法则、函数的连续性及其性质，为下一步学习微积分及其应用打下基础.



1.1 函数概念与应用及数学建模简介

1.1.1 函数的概念

观察声音传播的距离公式 $s=340t$，它有两个变量 t 和 s，每知道一个时间 t，按照公式 $s=340t$，都可算出一个对应的距离 s 来，这样我们把距离 s 叫做时间 t 的函数.

推而广之，一般地，有函数的定义.

1. 函数的定义

定义 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，可以得出惟一确定的值与之对应，那么 y 就叫做 x 的函数. 记作

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做函数(或因变量)，自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当 x 取遍 D 中的一切数值时，对应 y 的所有值的集合叫做函数的值域，记作 M.

函数的记号除了 $f(x)$ 表示外，也可用 $F(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$ 等表示.

2. 函数的表示法

千万不要以为函数的表示法只是一个公式，用公式来表示只是其中的一种，叫做公式法(或解析式法).

函数的表示法主要有三种: 表格法、图像法、公式法.

例 1 据股市行情报导，个股“深宝安”某月上旬 1 ~ 10 日的收盘价如表 1.1.

表 1.1

日期/日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
收盘价/元	5.34	4.97	4.44	4.21	3.85	3.98	4.21	4.63	3.79	3.88

按照这个表格，每一个日期都对应一个惟一的收盘价. 若设日期为 t，收盘价为 R，对照函数的概念，R 就是 t 的函数. 这里不存在计算收盘价的公式. 日期 t 与收盘价 R 的对应是靠表格来完成的，这就是函数的**表格法**.

例 2 有时我们可能会想，汽车开得快耗油量大，还是开得慢耗油量大? 图 1.1 是 CQ643 型城市公共汽车的耗油量图，横坐标表示车速(单位: km/h)，纵坐标表示耗油量(单位: L/100km).

思考: 在声音传播的距离函数式 $s=340t$ 中，哪个变量是自变量，哪个变量是函数?

函数的定义域 D 是哪一个集合?

从 t 对应到 s 的对应规律 $f(t)=?$

当 $t=2$s 时，函数值 $s\big|_{t=2}=?$

你能估计出函数的值域 M 来吗?

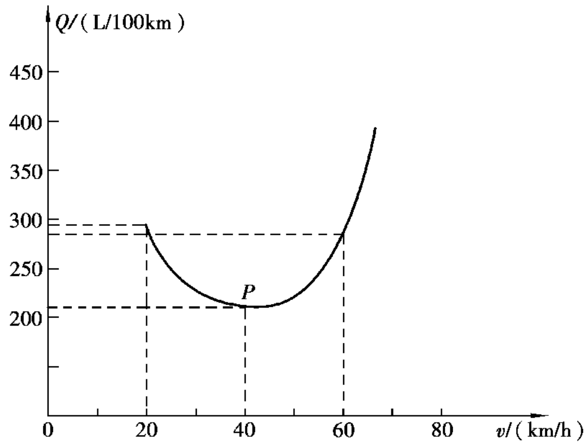


图 1.1

注: 耗油量的单位为 L/100km,表示汽车行驶平均每 100km 需耗多少升油.

当车速 $v=20\mathrm{km/h}$,对应的耗油量 $Q=295\mathrm{L/100km}$

当车速 $v=40\mathrm{km/h}$,对应的耗油量 $Q=210\mathrm{L/100km}$

当车速 $v=60\mathrm{km/h}$,对应的耗油量 $Q=285\mathrm{L/100km}$

按照这个耗油量曲线图,对每一个车速 v,都可以对应一个惟一的耗油量 Q. 因此耗油量 Q 是车速 v 的函数. 这里 v 与 Q 的对应是靠图像来完成的,我们把它叫做函数的**图像法**.

注: 从图上找车速 $v=40\mathrm{km/h}$ 对应的耗油量 Q 的方法是:

过横坐标轴上刻度为40 的点作平行于纵坐标轴的直线,交耗油量曲线于点 P,P 点的纵坐标就是 $v=40\mathrm{km/h}$ 对应的耗油量 Q.

可以看出 P 点的纵坐标为 210.

所以,当车速 $v=40\mathrm{km/h}$,对应的耗油量 $Q=210\mathrm{L/100km}$

自变量与函数的对应如果是靠公式来完成的,我们就说函数是用**公式法**表示的. 如声音传播的距离 $s=340t$,圆的面积 $A=\pi r^2$ 都是用公式法表示的函数. 用公式法表示的函数也叫做函数的**解析式**.

在往后的学习中,我们接触较多的是用公式法表示的函数.

3. 函数的定义域

前面我们已经知道,在函数 $y=f(x)$ 中,自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

对于一个函数,掌握它的定义域是非常重要的.

例 3　生产成本是产量的函数,产量的大小决定着成本的多少. 某化肥厂生产氮肥的成本函数为

$$C(x)=1.5+2x-2x^2+x^3$$

其中 $C(x)$ 为成本,单位: 千元,x 为产量,单位: 吨. 求此函数的定义域.

由常识我们知道,产量 x 不可能为负数,因此 x 的取值范围为 $x\geqslant 0$ 的一切实数,函数定义域 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$,写作区间即 D: $[0,+\infty)$.

由此可得,**生产和生活实际中的函数,其定义域由问题的具体意义来决定**.

例 4　求函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的定义域.

这是一个没有赋予实际意义的数学式子表示的函数,显然 x 不能等于 0,因此 x 的取值范围为 $x\neq 0$,函数定义域 $D=\{x\mid x\neq 0\}$.

由此可得,**由数学式子表示的函数,其定义域是使得函数式有意义的 x 的取值范围**.

例 5 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ (2) $f(x) = \sqrt{x+5} - \dfrac{4}{3-x}$

(3) $y = \dfrac{3x}{2x^2+7x-4}$ (4) $f(x) = \ln(x^2-9)$

解 (1) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

要使函数式有意义,分母不能等于0.

即 $x-1 \neq 0$ $x \neq 1$

所以该函数的定义域为

集合$\{x \mid x \neq 1\}$ 或区间$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) $f(x) = \sqrt{x+5} - \dfrac{4}{3-x}$

要使函数式有意义,根号下要大于等于0,且分母不能等于0.

即$\begin{cases} x+5 \geqslant 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$,解这个不等式得$\begin{cases} x \geqslant -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$

所以,该函数的定义域为

集合$\{x \mid x \geqslant -5, x \neq 3\}$ 或区间$[-5, 3) \cup (3, +\infty)$

(3) $y = \dfrac{3x}{2x^2+7x-4}$

要使函数式有意义,分母不能等于0.

即 $2x^2+7x-4 \neq 0$,下面解这个不等式.

左边分解因式得$(2x-1)(x+4) \neq 0$

只要 $x \neq \dfrac{1}{2}$ 且 $x \neq 4$,这个不等式就成立.

所以,该函数的定义域为

集合$\left\{x \mid x \neq \dfrac{1}{2}, x \neq -4\right\}$或区间

$(-\infty, -4) \cup \left(-4, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

注: 解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$,应先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 x_1, x_2,设 $x_1 < x_2$ 则 $ax^2+bx+c>0$ 的解为$\{x \mid x < x_1$ 或 $x > x_2\}$ 同理

$a^2+bx+c<0$

的解为$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

(4) $f(x) = \ln(x^2-9)$

要使函数式有意义,对数的真数部分必须大于0.

即 $x^2-9>0$,下面解这个不等式.

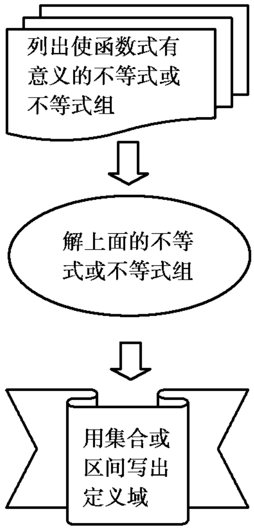
先求得方程 $x^2-9=0$ 的两根为 $x_1=-3, x_2=3$

所以,不等式 $x^2-9>0$ 的解为 $x<-3$ 或 $x>3$

所以,该函数的定义域为

集合$\{x \mid x<-3$ 或 $x>3\}$ 或区间$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

由上面的例题,我们可以得出求函数定义域的程序如下:



4. 函数值

某种商品的销售利润 y 与销售数量 x 之间的函数关系式为

$$y = 240x - x^2 - 1600$$

y 的单位: 元,问卖出 10 件商品时,所得利润是多少元?即销售量 $x = 10$ 时,求利润 y 等于多少?

将 $x = 10$ 代入上面函数式中的 x 处,如下图所示

$x=10$　　$x=10$

$$y=240x-x^2-1600$$

可以得出

$$y = (240 \times 10 - 10^2 - 1600)\ 元 = 700\ 元$$

即销售量 $x = 10$ 时,利润 $y = (240 \times 10 - 10^2 - 1600)$ 元 $= 700$ 元. 我们把 $y = 700$ 叫做函数 $y = 240x - x^2 - 1600$ 在点 $x = 10$ 处的函数值.

记作　　$y\big|_{x=10} = 700$

对于一般的函数 $y = f(x)$,如果当 $x = x_0 \in D$(D 为定义域) 时,对应的函数值为 y_0,则 y_0 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的**函数值**.

记作　　$y\big|_{x=x_0} = y_0$ 或 $f(x_0) = y_0$

这时我们还说函数在点 $x = x_0$ 处有定义,如果函数在某个区间上每一点都有定义,则说函数在该区间上有定义.

例 6　设函数 $f(x) = 4 - 3x + 2x^2$,求 $x = -2$ 处的函数值 $f(-2)$.

解　将 $x = -2$ 代入函数式中的 x 处,如下图所示

$x=-2$　　$x=-2$　　$x=-2$

$$f(x) = 4 - 3x + 2x^2$$

可以得出

$f(-2)=4-3\times(-2)+2\times(-2)^2=18$

例 7 设函数 $g(t)=\sqrt{t^2+1}$,求 $g(4)$,$g(a)$,$g(2+\Delta t)$.

解 $g(4)=\sqrt{4^2+1}=\sqrt{17}$

$g(a)=\sqrt{a^2+1}$

$g(2+\Delta t)=\sqrt{(2+\Delta t)^2+1}=\sqrt{5+4\Delta t+(\Delta t)^2}$

5. 分段函数

下面的函数是一个分段函数.

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$$

当自变量 x 的取值范围为 $x<0$ 时,函数式为 $-x$,当自变量 x 的取值范围为 $x\geqslant 0$ 时,函数式为 x^2,因此:

分段函数就是当自变量 x 在不同的范围取值时,用不同的函数式来表示的函数.

例 8 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqslant x<0\\ 1-x & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

求函数 $f(x)$ 的定义域,并求 $f(-0.5)$ 和 $f(1)$.

解 函数 $f(x)$ 的定义域即是自变量 x 各个不同取值范围的并集. 因此,此函数的定义域为区间 $[-1,2]$.

$$f(-0.5)=-0.5+1=0.5 \qquad f(1)=1-1=0$$

由本例可以看出,分段函数的定义域就是自变量 x 各个不同取值范围的并集.

求函数值时,看自变量 x 取值位于哪个范围,就代入相应的函数式来计算.

例 9 作例 8 所给分段函数的图像.

解 先作 $-1\leqslant x<0$ 时,解析式 $y=x+1$ 的图像,如图 1.2.

注: 作分段函数的图像,只要把各段解析式的图像在不同的范围内分别作出即可.

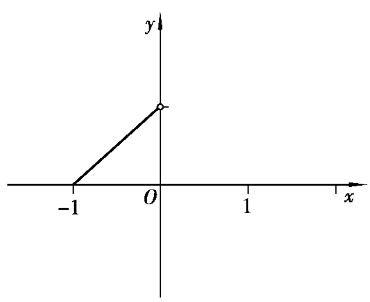


图 1.2

再在上面图形中作 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,解析式 $y=1-x$ 的图像,如图 1.3.

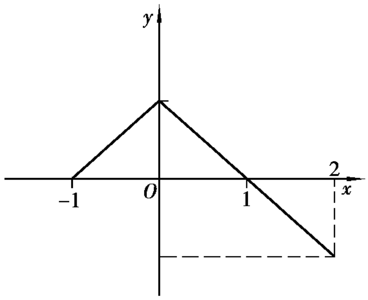


图 1.3

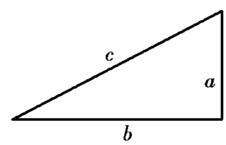
1.1.2　应用函数描述简单实际问题及数学建模简介

1. 建立实际问题的函数关系式

人类在征服自然界的斗争中要进行大量的生产活动和科学实验,其中经常需要研究实际问题中出现的各个变量的变化情况,以及它们之间的依赖关系,并用数学公式表示出来,以便用数学方法来求解.

注: 勾股定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$



我们先来看一个实例.

例 10　图 1.4 中,甲船以 6 km/h 的速度向西航行,同时乙船在甲船之北 16 km,以 8 km/h 的速度向南航行. 求甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系.

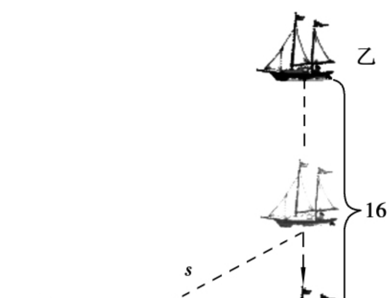


图 1.4

解　步骤 1: 设时间为 t,两船的距离为 s.

步骤 2: 由勾股定理,t 小时后两船的距离

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (16 - 8t)^2}$$

步骤 3: 时间 t 的取值范围为: $t \geqslant 0$

所以,甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系为:

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (16 - 8t)^2} \qquad t \geqslant 0$$

通过上面的例子我们可以归纳出建立实际问题函数式的步骤为:

步骤 1: 设定自变量和因变量(或叫函数)的字母.

步骤 2: 根据题意建立自变量和因变量的等式,并表示成函数的标准形式

$$y = f(x)$$

步骤 3: 写出自变量的取值范围.

注: 例 10 中步骤 2 根据题意建立自变量和因变量的等式,并表示成函数的标准形式 $y = f(x)$ 与步骤 3 写出自变量的取值范围. 是两步合并成一步来进行的.

例 11 某企业需要订做容积为 16dm^3 的圆柱形密封包装桶. 试建立包装桶所需材料面积与底面半径之间的函数关系.

解 如图 1.5,设圆柱底面半径为 r,表面积为 A.

则圆柱的高 $h = \dfrac{16}{\pi r^2}$

由题意可得

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{16}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{32}{r} + 2\pi r^2$$

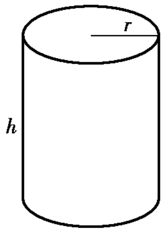


图 1.5

半径 r 的取值范围为区间 $(0, +\infty)$.

所以,包装桶所需材料面积与底面半径之间的函数关系为

$$A = \frac{32}{r} + 2\pi r^2 \qquad r \in (0, +\infty)$$

例 12 某地一段时期内个人所得税的征收标准是:

月收入不超过 929 元免税;

月收入超出 929 元到 1429 元的部分按 5% 的税率征税;

月收入超出 1429 元到 2929 元的部分按 10% 的税率征税;

月收入超出 2929 元到 5000 元的部分按 15% 的税率征税;

求税金与月收入(假定月收入不超过 5000 元)的函数式.

解 设月收入为 x 元,税金为 y 元.

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 929$ 时

$$y = 0$$

(2) 当 $929 < x \leqslant 1429$ 时

$$y = (x - 929) \cdot 5\% = 0.05x - 46.45$$

(3) 当 $1429 < x \leqslant 2929$ 时

其中超过 1429 部分,即 $(x - 1429)$ 部分按 10% 征税.

其中 929 到 1429 部分,即 $(1429 - 929)$ 部分按 5% 征税.

$$y = (x - 1429) \cdot 10\% + (1429 - 929) \cdot 5\%$$
$$= 0.1x - 117.9$$

(4) 当 $2929 < x \leqslant 5000$ 时

其中超过 2929 部分,即 $(x - 2929)$ 部分按 15% 征税.

其中 1429 到 2929 部分,即 $(2929 - 1429)$ 部分按 10% 征税.

其中 929 到 1429 部分,即 $(1429 - 929)$ 部分按 5% 征税.

$$y = (x - 2929) \cdot 15\% + (2929 - 1429) \cdot 10\% + (1429 - 929) \cdot 5\%$$

$= 0.15x - 264.35$

综上所述,税金 y 与月收入 x 的函数式为:

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 929 \\ 0.05x - 46.45 & 929 < x \leqslant 1429 \\ 0.1x - 117.9 & 1429 < x \leqslant 2929 \\ 0.15x - 264.35 & 2929 < x \leqslant 5000 \end{cases}$$

例 13　图 1.6 是某种周期电信号在一个周期内的波形图. 建立电压与时间的函数关系式.

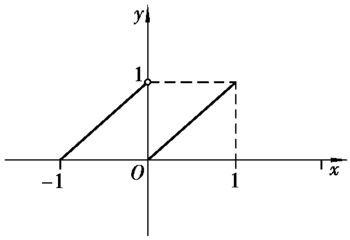


图 1.6

解　该图像分为两部分,应用两个解析式来表示.

当 $-1 \leqslant t < 0$ 时　　$u = t + 1$

当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时　　$u = t$

所以,电压 u 与时间 t 的函数关系式为:

$$u = \begin{cases} t + 1 & -1 \leqslant t < 0 \\ t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

注 1: 例 13 自变量与因变量的字母已经由题目给出,因此省去步骤 1: 设定自变量和因变量(或叫函数)的字母.

注 2: 例 13 两段直线段的方程可用直线的斜截式

$$y = kx + b$$

写出.

1.1.3　数学建模简介

例 14　甲船以 m km/h 的速度向西航行,同时乙船在甲船之北 l km,以 n km/h 的速度向南航行. 求甲、乙两船的距离与时间之间的函数关系.

解　由例 10 可以得到甲、乙两船的距离 s 与时间 t 之间的函数关系为:

$$s = \sqrt{(mt)^2 + (l - nt)^2} \qquad t \geqslant 0$$

这就是一个最简单的数学建模的示例.

上面函数关系式就是一个最简单的数学模型. 更具体地说,它是一个函数形式的数学模型,或叫**函数模型**.

一般地,**数学模型**是针对某种实际问题,为了一个特定的目的,(上例是针对两船互动过程这一实际问题,目的是研究两船距离与时间之间的函数关系),根据问题提供的条件和内在规律,运用数学工具把问题表示出来的一种数学形式. 它可以是若干数学公式,也可以是各种方程与不等式,或其他数学结构.

在建立这一数学结构的时候,为了问题能够求解,还需抓住主要因素,抛弃次要因素,作出必要的理想化假设(上例实际上已隐含着

注: 数学模型针对的实际问题中的已知条件,一般用字母 a,b,c,d,m,n,l 等等来表示,而不用具体的数值.

如果给出的条件是具体的数值,也应先用字母来代替,等模型建立并求解以后再代入具体的数值.

船作的是匀速运动,不考虑水流速度的影响等等假设).

数学建模不仅仅是建立实际问题的数学模型,它还包括模型的求解,模型的验证及模型的应用等程序.

数学建模包括以下四个主要程序:

模型的建立 根据实际问题提供的信息,作出必要的简化和假设,运用数学工具和各种数学形式(包括数学概念、数学符号、数学表达式等数学语言)建立问题的数学模型.

模型的求解 采用适当的数学方法对模型求解.

模型的验证 将模型求解的结果解释成实际问题的答案,放到实际中去验证其合理性与适用性.

模型的应用 如果经验证,模型可用,则应用它来指导实践.

例 15 有一边长为 a 的正方形铁皮,从它的四个角截去相等的小方块,然后折起各边做一个无盖的小盒子,求它的容积与截去的小方块边长之间的函数模型(如图 1.7).

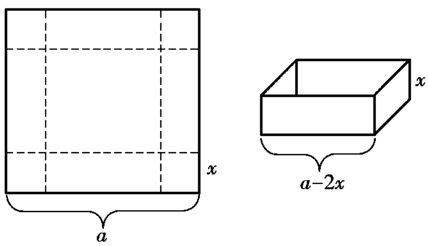


图 1.7

解 设截去的小方块边长为 x,盒子的容积为 y,盒子容积即长方体体积等于底面积乘高,即

$$y = (a-2x)^2 \cdot x$$

自变量 x 的取值范围为 $0 < x < \dfrac{a}{2}$

所以,盒子容积与截去的小方块边长之间的函数模型为:

$$y = x(a-2x)^2 \qquad \text{定义域为}\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

习题 1.1

1. 某工人一天工作 8 小时. 他在某天的第 1 个小时内生产了 20 个产品,第 2 个小时内生产了 15 个产品,第 3 个小时内生产了 24 个产品,第 4 个小时内生产了 30 个产品,第 5 个小时内生产了 22 个产品,第 6 个小时内生产了 14 个产品,第 7 个小时内生产了 19 个产品,第 8 个小时内生产了 13 个产品. 请用表格法表示他一天各小时与产量的函数关系.