工科课程提高与应试丛书

GAODENG SHUXUE

DIANXINGTI JIEXI JI ZICESHITI

刘三阳 主编

· 涵盖课程重点及难点

· 精设典型题详解及评注

· 选配课程考试模拟及全真试卷

高等数学

典型题解析及自测试题

· 上册 ·

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

高等数学典型题解析及自测试题

（上　册）

刘三阳　主编

刘三阳　李广民　王雪锋　井爱雯　王金金　编

西北工业大学出版社

2000年8月　西安

工科课程提高与应试丛书

高等数学典型题解析与自测试题

（下 册）

刘三阳 主编

刘三阳 李广民 王雪锋 井爱雯 王金金 编

西北工业大学出版社

2000 年 8 月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书总共分为三部分。第一部分典型题中各章与同济《高等数学》(第四版)配套，每章分为重点与难点、典型题解析、习题，第二部分自测试题中包括全真和模拟试题，附录给出了习题及试题答案。全书突出了题目的典型性和代表性，解(证)法的灵活性和启发性。题源广泛，题型多样，注重讲题示法，以题释理，强调解题思路的分析、解题方法的提炼和疑难问题的注释。旨在起到以题促学、解难释疑、举一反三、融会贯通之效。

本书可供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书，对参加高等数学竞赛和报考研究生的考生也具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解析与自测试题/刘三阳主编．—西安：西北工业大学出版社，2000.8
(工科课程提高与应试丛书)
ISBN 7-5612-1267-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34073 号

*

(邮编:710072　西安市友谊西路 127 号　电话:8491147)
全国各地新华书店经销
西安市向阳印刷厂印装

*

开本:850 毫米×1 168 毫米　1/32　印张:12.812 5　字数:289 千字
2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—8 000 册　定价:20.00 元(套)(上册:10.00 元，下册:10.00 元)

前　言

高等数学作为高等学校理工科专业的重要基础课，对大学生具有较大的难度和较重的份量，加之课时普遍减少，而且课程考试、后续专业课以及研究生入学考试又对这门课程有着较高的要求，学生普遍感到困难较多。为了帮助学生学好高等数学这门课程，我们编写了这本《高等数学典型题解析与自测试题》，供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书。

本书配合同济大学《高等数学》(第四版)并与之同步，分为上下两册。每章分为重点与难点、典型题解析、习题与答案(提示)，书末附有若干套全真和模拟试题及其答案。解题是学习高等数学的重要组成部分，是一种综合运用知识的过程，也是能力的一种训练和测验。本书突出了题目的典型性和代表性，解(证)法的启发性和灵活性，题源广泛、题型多样、重点突出，讲题示法，以题明理，注重解题思路和规律的分析，解题方法和技巧的提炼和有关注意事项和阐释。力求起到以题促学、释疑解难、触类旁通和提高能力的效果。

由于编者水平所限，书中错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

(陕)新登字 009 号

内容简介

本书总共分为三部分。第一部分典型题中各章与同济《高等数学》(第四版)配套，每章分为重点与难点、典型题解析、习题；第二部分自测试题中包括全真和模拟试题；附录给出了习题及试题答案。全书突出了题目的典型性和代表性，解(证)法的灵活性和启发性。题源广泛，题型多样，注重讲题示法，以题释理，强调解题思路的分析、解题方法的提炼和疑难问题的注释。旨在起到以题促学、解难释疑、举一反三、融会贯通之效。

本书可供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书，对参加高等数学竞赛和报考研究生的考生也具有参考价值。

目　录

上　册

第一部分　典型题解析

第二部分 自测试题

附录 习题与自测试题答案

下 册

第一部分 典型题解析

第二部分　自测试题

附录　习题与自测试题答案

目　录

（下　册）

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

附录　习题与自测试题答案

第一部分　典型题解析

第八章　多元函数微分法及其应用

一、内 容 提 要

1. 多元函数的连续性，偏导数的存在性，可微性等概念的区别和联系．

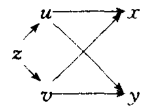
2. 偏导数和全微分的计算，尤其是求复合函数的二阶偏导数和隐函数的偏导数．以二元复合函数为例说明如下：设 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 均在点 (x,y) 处存在偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处存在偏导数，且可用公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

计算．当二阶偏导数存在，再求二阶偏导数时，须记住一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$ 仍是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的二元复合函数，其复合结构与原来的 $f(u,v)$ 相同，求它们的偏导数时也要按复合函数求偏导数的法则去做，例如

$$\frac{\partial}{\partial x}f'_u(u,v)=f''_{uu}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{uv}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}$$

为弄清复合关系，可借助下面的“线路图”：



从函数到自变量 x(或 y) 有两条路线，则在偏导数公式中表现为两项之和(项数 = 中间变量的个数)，每项对应一条路线；每条路线有两个箭头，对应项就是两个偏导数连乘(函数对中间量的偏导数乘以该中间变量对所论自变量的偏导数).

对抽象的多元复合函数求偏导数时，一般设置中间变量较为简便，例如对 $z = f(e^x\cos y, x^2 + y^2)$，设 $u = e^x\cos y, v = x^2 + y^2$.

3. 方向导数、梯度及其联系．须知梯度是这样一个向量——它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模即为方向导数的最大值．

4. 多元函数微分在几何上的应用．

5. 多元函数的极值和条件极值及其在几何、物理上的应用．

二、典型题解析

例 8.1 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{ax+by}{3x+y}$ 存在的充要条件是什么？

答 若二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{ax+by}{3x+y}$ 存在，由于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+by}{3x+y} = \frac{a}{3}, \quad \lim_{y\to\infty} \frac{ax+by}{3x+y} = b$$

都存在，所以两个累次极限也存在且相等，从而得 $\dfrac{a}{3} = b$，即 $a = 3b$. 反之若 $a = 3b$，显然 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{ax+by}{3x+y}$ 存在．因此 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{ax+by}{3x+y}$ 存在的充要条件是 $a = 3b$.

例 8.2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 是否存在？

答 当(x,y)沿直线 $y=x$ 趋于零时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

当(x,y)沿直线 $y=2x$ 趋于零时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{4x^4+x^2} = 0$$

所以原式极限不存在.

例 8.3 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

在点$(0,0)$处(　　).

(A) 连续、偏导数存在　　(B) 连续、偏导数不存在

(C) 不连续、偏导数存在　　(D) 不连续、偏导数不存在

答 应选(C).

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理，$f'_y(0,0)=0$，所以两个偏导数存在. 又当(x,y)沿着 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

极限值随 k 而变，所以极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在，$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

例 8.4 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在(0,0)处的连续性和可微性，偏导数的存在性和连续性.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\cos\dfrac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x}=0$，同理，$f'_y(0,0)=0$.

因而偏导数存在.

$$\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]=\Delta z-0=$$
$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=$$
$$[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时有

$$\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta z}{\rho}=$$
$$\frac{\rho^2}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}=\rho\cos\frac{1}{\rho}\to 0$$

由全微分定义知 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微且 $\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}=0$. 可微性蕴含连续性，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)连续.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f'_x(x,y)=2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

令(x,y)沿 $y=x$ 趋向于原点，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f'_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}+\frac{x}{\sqrt{2x^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right)$$

不存在，因为右端第一项极限为0，第二项极限不存在.

因此，$f'_x(x,y)$ 在(0,0)处不连续. 同理，$f'_y(x,y)$ 在(0,0)处也不连续.

例 8.5 已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b 的值.

解 由题设条件有

$$\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+$$
$$(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

即有

$$f'_x(x,y) = axy^3 - y^2\cos x,\quad f'_y(x,y) = 1 + by\sin x + 3x^2y^2$$

$$f''_{xy}(x,y) = 3axy^2 - 2y\cos x,\quad f''_{yx}(x,y) = by\cos x + 6xy^2$$

显然，$f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 均为连续函数，故有

$$f''_{xy}(x,y) \equiv f''_{yx}(x,y)$$

即

$$3axy^2 - 2y\cos \equiv by\cos x + 6xy^2$$

由此推知 $\begin{cases} 3a = b \\ b = -2 \end{cases}$，$a = 2, b = -2$.

例 8.6　设 $f(x+y, \dfrac{y}{x}) = x^2 - y^2$，求 $f(x,y)$，$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$.

解　令 $u = x + y, v = \dfrac{y}{x}$，则 $x = \dfrac{u}{1+v}, y = \dfrac{uv}{1+v}$，这时

$$f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

所以

$$f(x,y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}(y \neq -1)$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(1-y)}{1+y},\quad f'_y(x,y) = -\frac{2x^2}{(1+y)^2}$$

例 8.7　求 $f(x,y) = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数.

解

$$f(x,0) = \frac{x}{1+\sin x}$$

$$f'_x(x,0) = \frac{1 + \sin x - x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

将 $x = 0$ 代入，得 $f'_x(0,0) = 1$. 类似地有 $f(0,y) = \dfrac{-y}{1+\sin y}$，$f'_y(0,0) = -1$.

【注】　本题并未要求计算偏导数，只计算在给定点的偏导数值，这时不

必先求偏导数再求其该点处的值．若要计算 $f'_x(x_0,y_0)$，只需计算一元函数 $\varphi(x,0)=f(x,y_0)$ 的导数，$\varphi'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)$ 即为所求．若 $\varphi'(x_0)$ 不存在，则 $f'_x(x_0,y_0)$ 也不存在．这种情况经常遇到，例如，求函数在某点处的全微分、梯度或方向导数，求曲线(面)在某点处的切线(面)等．

例 8.8 设 $f(x,y,z)=z\cdot\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$.

解 取对数，得

$$\ln f=\ln z+\frac{1}{2}(\ln x-\ln y)$$

两边同时微分，得

$$\frac{1}{f}\mathrm{d}f=\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)$$

将 $x=y=z=1$ 代入，即得

$$\mathrm{d}f(1,1,1)=\mathrm{d}z+\frac{1}{2}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$$

例 8.9 已知 $z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(vu^{v-1})$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+(u^v\ln u)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$

$$\frac{u^v}{x^2+y^2}\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$(vu^{v-1})\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+(u^v\ln u)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$\frac{u^v}{x^2+y^2}\left(\frac{yv}{u}+x\ln u\right)$$

$$\mathrm{d}z=\frac{u^v}{x^2+y^2}\left[\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{yv}{u}+x\ln u\right)\mathrm{d}y\right]$$