高中

同步学程

TONG BU XUE CHENG

高中新课程

数学

必修1 必修4

明天出版社

高中

同步学程

高中新课程

数学

必修1　必修4

明天出版社

同步学程
数学
必修 1 必修 4
※
明天出版社出版发行
（济南市经九路胜利大街 39 号）
http://www.sdpress.com.cn
http://www.tomorrowpub.com
各地新华书店经销 山东省无棣县教育实业公司印刷厂印刷
※
787×1092 毫米 16 开 13 印张 331 千字
2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5332-5830-6
定价：11.00 元

前言

为了更好地贯彻素质教育要求，落实《山东省普通高中课程设置及教学指导意见（试行）》，帮助广大师生更好地理解和把握实验教材的内容和要求，全面提高学生的自主学习能力，我们依据教育部颁布的《普通高中课程方案（实验）》、各学科课程标准和现行教材，组织部分一线骨干教师和教学研究人员编写了这套《同步学程》丛书，主要供高中学生同步学习使用。这套丛书对指导普通高中新课程实验，提高学生的综合素质，都将起到积极地促进作用。

这套丛书包括思想政治、语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理共九个学科的所有必修模块和部分选修模块，并根据教学进度同步发行。各模块根据新课程的内容特点按单元（节、课）编写，指导学生在规定的课时内完成学习任务，提高学习效率。

这套丛书有以下几个方面的特点：

1. 注重体现普通高中课程改革的理念和要求，帮助师生进行课程实验，用好用活教材；

2. 注重体现“知识和能力、过程和方法、情感态度和价值观”的三维目标要求，在帮助学生牢固掌握基础知识的前提下，努力提高学生的应用能力；

3. 注重设置问题情境，拓宽知识背景，指导学生掌握科学的学习方法，自主探求未知领域，培养学生的探索精神和创新能力；

4. 注重与新课程实验的同步性，紧密配合各学科的学习，按单元（节、课）分配学习课时，组织学习训练内容，既便于教师指导又便于学生自学。

参加《同步学程·数学》（必修 1　必修 4）编写工作的老师及分工情况：李在功、韩继芳（第一章），付玉辉（第二章），周晓玲（第三章）；郑振华（第一章），于清堂（第二章），卢延兵（第三章）。刘洪福、聂作庆、王均星、王洪峰、王文清等老师参加了审稿。王文清老师负责统稿。

希望这套《同步学程》丛书能够帮助同学们学好新课程，打牢基础，提升素质，实现理想。

2008 年 8 月

目录

必修 1

必修 4

必修1

第一章 集合与函数概念

§1.1 集　合

课标要求

1. 了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系；能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

2. 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集；在具体情境中，了解全集与空集的含义.

3. 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集；理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集；能使用 *Venn* 图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用.

基础诊断

1. 集合中的元素的三个特性分别为______、______和______.

2. a 与集合 A 的关系是“属于”和“不属于”，分别记作“______”和“______”.

3. 除可以用自然语言描述一个集合外，还可以用________和________表示集合，另外还经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为________.

4. 集合与集合的关系及运算：

名称		定义（文字表示）	符号表示	图形表示	性质
子集	真子集				
	相等				
交集					
并集					
补集					

典型示例

【例1】已知 $x^2\in\{1,0,x\}$，求实数 x 的值.

【分析】由确定性可知 $x^2=0,1$ 或 x，由互异性可知 $x\neq1,0$.

【解】若 $x^2=0$，则 $x=0$，此时集合为 $\{1,0,0\}$，不符合集合元素的互异性，舍去.

若 $x^2=1$，则 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时，集合为 $\{1,0,1\}$，舍去；

当 $x=-1$ 时，集合为 $\{1,0,-1\}$，符合.

若 $x^2=x$，则 $x=0$ 或 $x=1$，均不符合集合元素的互异性都舍去.

综上所述，$x=-1$.

【反思与小结】既要应用元素的确定性、互异性和无序性解题，又要利用它们检验解的正确与

否，特别是互异性，最易忽视，必须在学习中引起足够重视.

【例 2】分别用列举法和描述法表示下列集合.

(1)由 1 和 -1 组成的集合；

(2)函数 $y=x+1$ 和 $y=x^2-1$ 的图象的交点组成的集合.

【解】(1)列举法：$\{-1,1\}$；

描述法(答案不唯一)：$\{x|x^2=1\}$.

(2)列举法：$\{(-1,0),(2,3)\}$；

(3)描述法：$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=x+1\\y=x^2-1\end{cases}\right\}$.

【反思与小结】列举法和描述法是表示集合的两种基本方法，要注意表示形式上的区别. 特别是用描述法表示集合时要弄清两点：一是集合中元素的表示形式；二是集合的特征性质.(属于 A 的元素具有性质 $p(x)$，不属于 A 的元素不具有性质 $p(x)$，则 $p(x)$ 叫做 A 的特征性质).

【例 3】设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，若 $C=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in\mathbf{A}\}$，$D=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in\mathbf{B}\}$，求 $(C\cap\complement_{\mathbf{N}}D)\cup(D\cap\complement_{\mathbf{N}}C)$.

【分析】关键在于弄清 C、D 的特征性质，用列举法表示 C、D.

【解】$C=\{0,1,2\}$，$D=\{1,2,3\}$

故 $C\cap\complement_{\mathbf{N}}D=\{0\}$，$D\cap\complement_{\mathbf{N}}C=\{3\}$.

$\therefore(C\cap\complement_{\mathbf{N}}D)\cup(D\cap\complement_{\mathbf{N}}C)=\{0,3\}$.

【反思与小结】本题主要考查集合的运算和集合的表示法，对于集合运算一是搞清定义，二是掌握顺序，还要注意运用 Venn 图，简化运算过程.

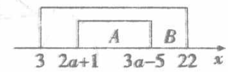
【例 4】若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的值的集合为 M，求 M.

【分析】解决本题的思想方法是数形结合. 突破口在 $A\subseteq(A\cap B)$，能由此得出结论 $A\subseteq B$. 然后根据集合 A、B 的关系将其表示于同一数轴上，即可对字母 a 进行讨论. 同时应注意集合 A 是非空集合，莫忘 $2a+1$ 与 $3a-5$ 的大小关系.

【解】因为 $A\subseteq(A\cap B)$，所以即 $A\subseteq B$.

如图，由题意可知 $2a+1\geqslant 3$，$3a-5\leqslant 22$，$2a+1\leqslant 3a-5$，解得：$6\leqslant a\leqslant 9$，

所以集合 $M=\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$.



【反思与小结】数集是集合中最常见的一类，研究数集的交、并、补运算及集合间的关系问题是本节的重点，解决方法一般采用数形结合(利用数轴或韦恩图)，寻求集合间的关系，从而达到解决问题的目的.

【例 5】若集合 $A=\{x|x^2+px+q=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$A\cup B=B$，求 p、q 满足的条件.

【分析】本题首先由 $A\cup B=B$ 明确关系 $A\subseteq B$，然后分 $A=\varnothing$，$A\subsetneqq B$，$A=B$ 三种情况讨论.

【解】由条件知 $B=\{1,2\}$，而 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$，故 $A=\varnothing$ 或 $A\subsetneqq B$ 或 $A=B$.

(1)若 $A=\varnothing$，则 $x^2+px+q=0$ 没有实根，$\Delta=p^2-4q<0$，即 $p^2<4q$ 时，$A\subseteq B$.

(2)若 $A=\{1\}$，则 $x^2+px+q=0$ 有两相等实根 1，即 $p=-2$，$q=1$ 时，$A\subseteq B$.

(3)若 $A=\{2\}$，则 $x^2+px+q=0$ 有两相等实根 2，即 $p=-4$，$q=4$ 时，$A\subseteq B$.

(4)若 $A=\{1,2\}$，则 $x^2+px+q=0$ 有两根 1，2，即 $p=-3$，$q=2$ 时，$A\subseteq B$.

【反思与小结】在集合的交、并、补运算中应注意进行恰当的分类，特别是 $A\subseteq B$ 则有 $A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 两种可能.

归纳总结

1. 对于集合问题，要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形)，然后再确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合之间的关系及运算，一般应把各集合化到最简形式，再进行运算，并注意运用数

形结合（如数轴、Venn 图）简化运算.

3. 含参数的集合问题，要注意元素的互异性，有时需要用到分类讨论，数形结合的思想.

4. 集合问题常与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融会贯通.

拓展提高

1. 集合 $P=\{x|y=x^2+2x\}$ 与集合 $Q=\{y|y=x^2+2x\}$ 与集合 $M=\{(x,y)|y=x^2+2x\}$ 表示的是同一个集合吗？它们有什么区别与联系？

【解析】尽管三个集合中 x、y 的关系都是 $y=x^2+2x$（三个集合之间的联系），但它们是三个截然不同的集合，主要因为它们的元素是不一样的. 记二次函数 $y=x^2+2x$ 的图象为 C，则集合 P 表示 C 上的点的横坐标的取值范围，显然 $P=\mathbf{R}$；而集合 Q 表示 C 上的点的纵坐标的取值范围，于是，$Q=\{y|y\geqslant-1\}$；集合 M 即为 C 上所有点的集合（也可看作二元方程 $y=x^2+2x$ 所有解的集合）.

2. 已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，且 $M=N$，求实数 a、b 的值.

【解析】由条件 $M=N$，进一步分析出两个集合中元素相同，求解 a、b 的值.

$\because M=N$，$\therefore \begin{cases}a=2a,\\b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\b=2a.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

代入检验得所求 a、b 的值为

$\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

【思考】以上解法中为什么要对得到的解进行检验？

【变式1】

已知 a、$x\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{2,4,x^2-5x+9\}$，$B=\{3,x^2+ax+a\}$，$C=\{x^2+(a+1)x-3,1\}$，分别求：

(1) 使 $A=\{2,3,4\}$ 的 x 值；

(2) 使 $2\in B$，$B\subsetneqq A$ 的 a，x 的值；

(3) 使 $B=C$ 的 a，x 的值.

【变式2】

若集合 $A=\{x|x^2+ax+b=x\}$ 中，仅有一元素 a，求 a、b 的值.

3. 设集合 $A=\{|a+1|,3,5\}$，集合 $B=\{2a+1,a^2+2a,a^2+2a-1\}$，当 $A\cap B=\{2,3\}$ 时，求 $A\cup B$.

【解析】$\because A\cap B=\{2,3\}$，而 $A\cap B\subseteq A$，

$\therefore 2\in A$，从而 $|a+1|=2$.

$\therefore a=1$，或 $a=-3$.

当 $a=1$ 时，集合 B 的元素 $a^2+2a=3$，$2a+1=3$，与元素的互异性矛盾，因此 $a\neq1$.

当 $a=-3$ 时，集合 $B=\{-5,2,3\}$，又 $A=\{2,3,5\}$，

$\therefore A\cup B=\{-5,2,3,5\}$.

【回顾】以上两个问题的解答都需要对所得解进行检验. 对这类问题你要仔细的想想，要增强解题中的检验意识.

展示平台

基础训练

1. 下列各组对象能组成集合的是　（　　）

A. 著名球星　　B. 年青的人

C. 自然数　　D. 全班成绩好的同学

2. 集合 $\{x|x^2-4x+4=0\}$ 中所有元素之和为　（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 8

3. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是　　(　　)

A. $\{x=0,y=1\}$

B. $\{0,1\}$

C. $\{(0,1)\}$

D. $\{(x,y)\mid x=0,或\ y=1\}$

4. 集合 $M=\{1,2,3,4\}$ 的子集个数为　　(　　)

A. 8 个　　B. 7 个　　C. 15 个　　D. 16 个

5. 设集合 $M=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 M 与 N 的关系是　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M=N$　　D. $M\subsetneqq N$ 且 $M\supsetneqq N$

6. 已知集合 $M=\{x\mid x-a=0\}$，$N=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $M\cap N=M$，则实数 a 的值是　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1 或 -1　　D. 0 或 1 或 -1

7. 设 A、B、U 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq U$，则下列各式中错误的是　　(　　)

A. $(\complement_U A)\cup B=U$

B. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=U$

C. $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$

D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U B$

8. 如果集合 $A=\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$，那么(1)$0\subseteq A$；(2)$\varnothing\subseteq A$；(3)$\{0\}\subsetneqq A$；(4)$N\subseteq A$；(5)$\{\frac{1}{3}\}\subsetneqq A$，以上各式中正确的个数是　　(　　)

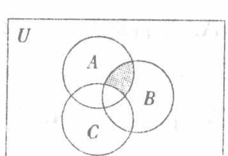
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 已知集合 $A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$，$B=\{x\mid 3<x<5\}$，则能使 $A\cap B=B$ 成立的实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\{a\mid 3<a\leqslant 4\}$　　B. $\{a\mid 3\leqslant a\leqslant 4\}$

C. $\{a\mid 3<a<4\}$　　D. $\{4\}$

10. 如图，U 为全集，A、B、C 是 U 的 3 个子集，则阴影部分表示的集合是　　(　　)



A. $(A\cap B)\cap C$　　B. $(A\cap B)\cup C$

C. $(A\cap B)\cap(\complement_U C)$　　D. $(A\cap B)\cup(\complement_U C)$

11. 用列举法表示集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid \frac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\}$，$A=$________.

12. 集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$ 且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 $x=$________.

13. 满足条件 $\{2,3\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4\}$ 的所有集合 M 为________.

14. 已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，则 $A\cap\complement_R B=$________.

15. 已知 $(1,2)\in A\cap B$，$A=\{(x,y)\mid y^2=ax+b\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，则 $a=$________，$b=$________.

16. 已知 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，$B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

17. 设 A、B 是两个非空集合，定义 A 与 B 的差集 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(1)试举出两个数集 A,B，求它们的差集；

(2)差集 $A-B$ 与 $B-A$ 是否一定相等，说明你的理由.

能力训练

18. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，若集合 S 和 T 满足 $S\cap T=\{2\}$，$\complement_U S\cap T=\{4\}$，$(\complement_U S)\cap(\complement_U T)=\{1,5\}$，则有　（　　）

A. $3\in S,3\in T$　　B. $3\in S,3\in \complement_U T$

C. $3\in \complement_U S,3\in T$　　D. $3\in \complement_U S,3\in \complement_U T$

19. 设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，则实数 a 组成的集合的子集有多少个？并写出这些子集.

20. 已知全集 $U=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，若 $\complement_U A=\{0\}$，则这样的实数 x 是否存在？若存在，求出 x；若不存在，请说明理由.

反思提高

§1.2 函数及其表示

课标要求

1. 通过丰富实例，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

2. 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数.

3. 通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用.

基础诊断

1. 设 A、B 是非空的数集，如果____，那么就称 $f:A\longrightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数（*function*），记作：________________________.

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域（*domain*）；与之对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in A\}$ 叫做函数的________. 显然 $\{y|y=f(x),x\in A\}$ ______ B.

2. __________、__________和__________是决定函数的三要素，其中______由______和________确定，所以只要两个函数的________相同，并且________完全一致，这两个函数就相等.

3. 填写下表.

函数	一次函数	二次函数		反比例函数
		$a>0$	$a<0$	
对应关系				
定义域				
值域				

4. 对于区间，下列说法正确的是____________；①区间是集合；②区间的左端点必小于右端点；③区间中的元素都是点，可以用数字表示；④任何区间均可在数轴上表示出来；⑤以“$-\infty$”或“$+\infty$”为区间的一端点时，这一端点必须是小括号；⑥区间 (a,b) 的长度是 $b-a$.

5. 根据具体的函数问题，可以分别用________、________和________表示函数. 在函数的定义域内，对于 x 的不同取值区间，有着不同的对应法则，这样的函数通常叫做________.

6. 设 A、B 是两个非空集合，如果____，那么就称对应 $f:A\longrightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射（*mapping*）. 函数是一种特殊的映射. 集合 A 到集合 B 上的映射或函数，允许________元素对应______元素或______元素对应________元素，而不允许________元素对应________元素. 因此判断一个图形是不是函数图象的依据是________________.

典型示例

【例 1】求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}+2$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}+(3x-1)^0$；

(4) $y=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

【分析】求函数定义域就是把所有使解析式有意义的条件都考虑到，并求其交集.

【解】(1) 由 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ 4-x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $1\leqslant x\leqslant 4$.

∴函数 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}+2$ 的定义域是 $\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$.

(2) 由 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}$ 得 $x\geqslant -3$，且 $x\neq 0$.

∴函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ 的定义域是 $[-3,0)\cup(0,+\infty)$.

(3) 由 $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ 3x-1\neq 0\end{cases}$ 得 $x\neq \dfrac{1}{3}$，且 $x\neq 1$.

∴函数 $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}+(3x-1)^0$ 的定义域是 $\{x\in \mathbf{R}|x\neq \dfrac{1}{3}$，且 $x\neq 1\}$.

(4) 由 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\geqslant 0$，得　$1+\dfrac{1}{x}>0$，

∴ $\dfrac{x+1}{x}>0$.

∴ $\begin{cases}x+1>0,\\ x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1<0,\\ x<0.\end{cases}$

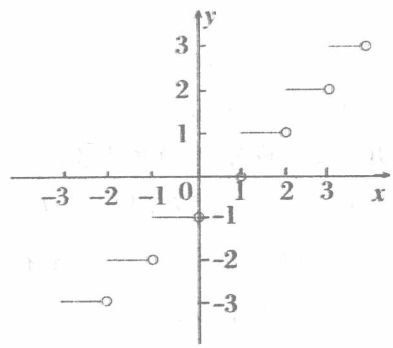
∴ $x>0$ 或 $x<-1$.

∴其定义域为 $(0,+\infty)\cup(-\infty,-1)$

【反思与小结】定义域是使解析式有意义的 x 的取值范围，在求解过程中尽量不化简，若化简必需把化简之前的限制条件加上，否则就会引起定义域的扩大或缩小而产生错误. 例如，在(3)中，若先将解析式化简为 $y=x^2+x+2$，从而得出定义域为 $\mathbf{R}$，显然是错误的.

【例 2】设 x 是任意一个实数，y 是不超过 x 的最大整数，试问 x 和 y 之间是不是函数关系？如果是，请画出这个函数的图象.

【解】对每一个实数 x，都能够写成等式：$x=y+\alpha$，其中 y 是整数，α 是一个小于 1 的非负数. 由此可以看到，对于任一个实数 x，都有惟一确定的 y 值与它对应，所以说 x 和 y 之间是函数关系，其定义域是 $\mathbf{R}$，这个函数的图象如图所示.



【反思与小结】根据函数定义，要检验给定两个变量之间是否具有函数关系，只要检验：(1)定义域和对应法则是否给出；(2)根据给出的对应法则，自变量 x 在其定义域中的每一个值，是否都能确定惟一的函数值 y. “不超过 x 的最大整数”所确定的函数通常称作取整函数. 记为 $y=[x]$.

【例 3】求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$x\in \mathbf{R}$，在 $x=0,1,2$ 处的函数值和值域.

【解】$f(0)=\dfrac{1}{0^2+1}=1$，$f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{1}{5}$.

容易看出，这个函数当 $x=0$ 时，函数取得最大值，当自变量 x 逐渐变大时，函数值趋向于零，但永远不会等于零，于是可知这个函数的值域为 $\{y|y=\dfrac{1}{x^2+1},x\in \mathbf{R}\}=(0,1]$.

【反思与小结】求函数的值域是个比较复杂的问题，要注意讲究方法，常用的方法有：观察法，配方法，换元法，最值法，数形结合法等. 没有通用的方法和固定模式. 求值域关键是重视对应法则的作用，还要特别注意定义域对值域的制约.

【例 4】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x & (x>0),\\ \pi & (x=0),\\ 0 & (x<0).\end{cases}$

(1) $f(x)$ 的定义域是________，值域是________；

(2)求 $f\{f[f(-1)]\}$；

(3)若 $f(x)=\pi$，求 x.

【解】(1)定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$.

(2) $f\{f[f(-1)]\}=f\{f(0)\}=f(\pi)=2\pi$.

(3)当 $x>0$ 时，由 $f(x)=2x=\pi$，得 $x=\frac{\pi}{2}$；

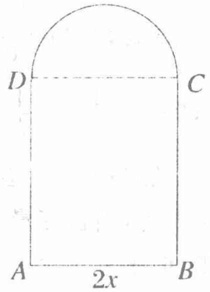
当 $x=0$ 时，$f(x)=\pi$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=0\neq\pi$.

综上可知：$x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$.

【反思与小结】分段函数是一个整体，不要把它误以为是"几个函数"，可结合图象加深对分段函数的理解.

【例 5】如图，用长为 L 的铁丝做成下部为矩形，上部为半圆形的框架，若矩形的底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数关系式，并求出其定义域.



【分析】对"不规则"图形的求积问题，常采用"割补法"化为"规则"图形的求积问题，本题可将框架分割成两部分：一个半圆、一个矩形.

【解】$\because AB=2x$，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\pi x, AD=\frac{L-2x-\pi x}{2}$.

$\therefore y==\frac{\pi}{2}x^2+2x\cdot\frac{L-2x-\pi x}{2}$

$=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+Lx$.

由 $\begin{cases}0<2x<\frac{L}{2},\\ 0<\frac{L-2x-\pi x}{2}<\frac{L}{2}.\end{cases}$ 得 $0<x<\frac{L}{\pi+2}$.

$\therefore$ 所求函数关系式为 $y=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+Lx$，定义域为 $\{x|0<x<\frac{L}{\pi+2}\}$.

【反思与小结】由实际问题确定的函数的定义域，不但要考虑解析式本身有意义，还要考虑变量的实际意义.

归纳总结

1. 从映射的角度深化对函数概念的理解，而且要真正从三要素的整体上把握函数概念.

2. 重视函数定义域在函数概念中的地位，求定义域一要考虑使解析式有意义，二要注意题设或问题的实际意义对自变量的制约.

3. 任何一个函数的值域都是由其定义域和对应法则共同决定的，要合理运用求值域的常用方法，如配方法、数形结合法、换元法等.

4. 分段函数的问题要注意定义域所对应的解析式不要混淆.

5. 解题过程中要注重"数形结合"的数学思想，当遇到一些常见的函数，如一次函数、二次函数时，可先画出其图象再解答.

拓展提高

例谈求函数解析式的几种常用方法

函数解析式是研究函数性质的基础，其解析式的求法也综合了代数、几何的相关知识以及相应的数学思想方法，以下将例谈求函数解析式的常用方法，以供参考.

一、消元法

1. 设 $f(x)$ 满足 $3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$，求 $f(x)$.

【解析】$\because 3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$， ①

$\therefore 3f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{4}{x}$. ②

联立，用①×3−②×2，得 $5f(x)=12x-\frac{8}{x}$，

$\therefore f(x)=\frac{12}{5}x-\frac{8}{5x}$.

二、换元法

2. 已知 $f(x+1)=2x^2+1$,求 $f(x)$.

【解析】设 $x+1=t$,则 $x=t-1$.

$\therefore f(t)=2(t-1)^2+1=2t^2-4t+2+1$

$=2t^2-4t+3$.

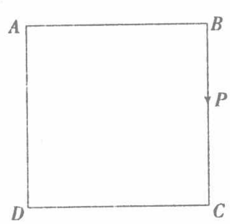
$\therefore f(x)=2x^2-4x+3$.

三、配凑法

【变式】试用其它方法求解 2.

四、定义法

3. 如图,动点 P 从边长为 4 的正方形 $ABCD$ 顶点 B 开始,顺次经过 C,D,A 绕周界一圈,当 x 表示 P 的行程,y 表示$\triangle APB$ 的面积,求函数 $y=f(x)$的解析式.



【解析】设 $PB=x$,$\because AB=4$,由三角形面积公式,得

$$y=\begin{cases}2x & x\in[0,4),\\ 8 & x\in[4,8),\\ 24-2x & x\in[8,12),\\ 0 & x\in[12,16).\end{cases}$$

五、待定系数法

4. 已知二次函数 $y=f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(1)=2$,且在 $x=t$(t 为实数)处取得最值,若 $y=g(x)$为一次函数,且 $g(x)+f(x)=x^2+2x-3$,求 $y=f(x)$的解析式.

【解析】设 $f(x)=a(x-t)^2+m$,

$\because y=g(x)$ 为一次函数,$f(x)+g(x)=x^2+2x-3$,

$\therefore a=1$.

$\because f(1)=2$,

$\therefore 2=(1-t)^2+m$,$\therefore m=-t^2+2t+1$.

$\therefore f(x)=(x-t)^2-t^2+2t+1$,

即 $f(x)=x^2-2tx+2t+1$.

展示平台

基础训练

1. 以下四组函数中,两个函数相等的是 (　　)

A. $f(x)=|x|$　　$g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=\sqrt{x^2}$　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　$g(x)=x+1$

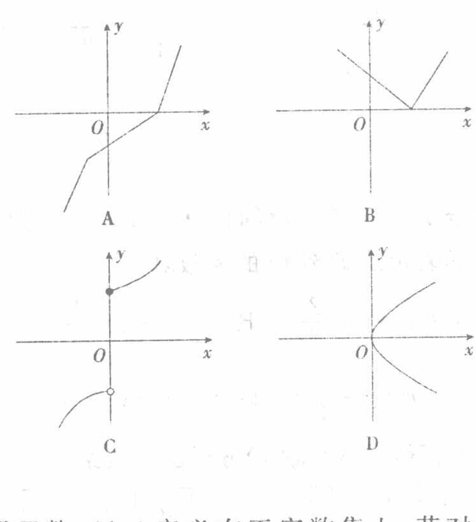
D. $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$

$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

2. 设 $f(x)=2-x$,则使 $f[f(x)]=x^2$ 成立的 x 是 (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. ±1　　D. 1 或 0

3. 下列图形中,不可能是函数 $y=f(x)$的图象的是 (　　)



4. 设函数 $f(x)$定义在正实数集上,若对任意 $x_1>0,x_2>0$ 均有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$且 $f(8)=3$,则 $f(2)$等于 (　　)

A. 1　　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　　D. $\frac{1}{4}$

5. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,4]$，则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是　　(　　)

A. $[-4,4]$　　　B. $[-2,2]$

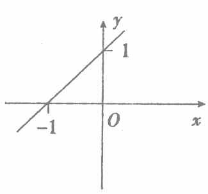
C. $[-4,-2]$　　　D. $[2,4]$

6. 周长为定值 a 的矩形，它的面积 S 是这个矩形的一边长 x 的函数，则这个函数的定义域是　　(　　)

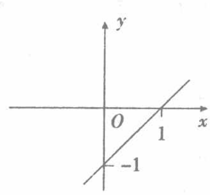
A. $(a,+\infty)$　　　B. $(\frac{a}{2},+\infty)$

C. $(\frac{a}{2},a)$　　　D. $(0,\frac{a}{2})$

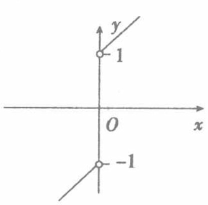
7. 函数 $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ 的图象是　　(　　)



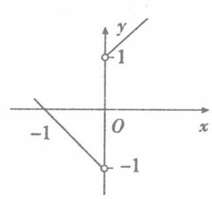
A



B



C



D

8. 集合 $P=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$Q=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，下列不表示从 P 到 Q 的函数是　　(　　)

A. $f: x\rightarrow y=\frac{2}{3}x$　　B. $f: x\rightarrow y=\frac{1}{3}x$

C. $f: x\rightarrow y=\frac{1}{2}x$　　D. $f: x\rightarrow y=\sqrt{x}$

9. 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 分别由下表给出：

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1

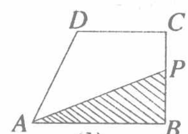
x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]=$______；当 $g[f(x)]=2$ 时，$x=$______.

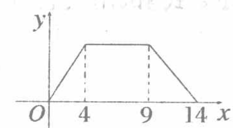
10. 如果 $f(x-1)=x^2$，那么 $f(x)=$________.

11. 已知函数 $y=\sqrt{ax^2-6ax+a+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

12. 直角梯形 $ABCD$ 如图(1)，动点 P 从 B 点出发，由 $B\rightarrow C\rightarrow D\rightarrow A$ 沿边运动，设点 P 运动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 $f(x)$，如果函数 $y=f(x)$ 的图象如图(2)，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.



(1)



(2)

13. 设函数 $f(x)=2x+3$，函数 $g(x)=3x-5$，求 $f[g(1)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

14. 已知函数 $\Phi(x)=f(x)+g(x)$，其中 $f(x)$ 是 x 的正比例函数，$g(x)$ 是 x 的反比例函数，且 $\Phi(\frac{1}{3})=16$，$\Phi(1)=8$，求 $\Phi(x)$ 的表达式.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<-1),\\ x^2 & (-1\leqslant x\leqslant 1),\\ x & (x>1).\end{cases}$

(1)求 $f\{f[f(-2)]\}$；

(2)当 $f(x)=-7$ 时，求 x 的值；

(3)求 $f(x)$ 的定义域和值域；

(4)画出 $f(x)$ 的图象.

能力训练

16. 市内电话费是这样规定的：每打一次电话不超过 3 分钟的付电话费 0.18 元，超过 3 分钟而不超过 6 分钟的付电话费 0.36 元，依次类推，每次打电话 $x(0<x\leqslant 10)$ 分钟应付话费 y 元，写出函数解析式并画出函数图象.

17. 某服装厂生产一种服装，每件服装的成本为 40 元，出厂单价为 60 元. 该厂为鼓励销售商订购，决定当一次订购量超过 100 件时，每多订购一件，订购的全部服装的出厂单价就降低 0.02 元. 根据市场调查，销售商一次订购量不会超过 500 件.

(1) 设一次订购量为 x 件，服装的实际出厂单价为 P 元，求出函数 $P=f(x)$ 的表达式；

(2) 当销售商一次订购 450 件服装时，该服装厂获得的利润是多少元？(服装厂售出一件服装的利润＝实际出厂单价－成本).

18. 对定义域分别是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$，规定函数 $h(x)=$

$$\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & \text{当 } x\in D_f\text{，且 } x\in D_g, \\ f(x) & \text{当 } x\in D_f\text{，且 } x\notin D_g, \\ g(x) & \text{当 } x\notin D_f\text{，且 } x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=x^2$，写出 $h(x)$ 的解析式；

(2) 求问题(1)中函数 $h(x)$ 的值域.

反思提高