

三角數理卷七

英國海麻士輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

三角形各理設題

第一題 求將以斗之各倍和較角之餘弦和數明之

斗餘弦未斗 斗餘弦卯 斗餘弦寅 斗餘弦四

惟因

二餘弦寅斗餘弦卯斗—餘弦寅卯斗—餘弦寅卯斗。

所以得

四餘弦寅斗餘弦卯斗餘弦未斗—

二餘弦寅卯斗餘弦未斗—二餘弦寅卯斗餘弦未斗—

餘弦寅卯未斗—餘弦寅卯未斗—餘弦寅卯未斗—餘弦寅卯未斗。

第三題

求將

正弦^二斗^一×餘弦^二斗^一

以斗之各倍角之正弦級數明之

則求得

$$\text{正弦斗} \times \text{餘弦斗} = \frac{4}{2} \text{正弦斗} (\text{正弦二斗})$$

$$= \frac{8}{2} \text{正弦斗} (\text{餘弦四斗})$$

$$= \frac{16}{2} \text{正弦斗} (\text{正弦五斗} \mid \text{正弦三斗})$$

第四題求

式之證

$$\text{正切}(\text{角}|\text{元}) = \frac{\text{正弦角餘弦角}|\text{正弦元餘弦元}}{\text{正弦角}|\text{正弦元}}$$

證得題式之右邊可化作

$$\frac{\text{正弦二角}|\text{正弦二元}}{\text{二正弦角}|\text{二正弦元}} = \frac{\text{正弦二角}|\text{正弦二元}}{\text{餘弦二元}|\text{餘弦二角}}$$

$$= \frac{\text{二餘弦}(\text{角}|\text{元})\text{正弦}(\text{角}|\text{元})}{\text{二正弦}(\text{角}|\text{元})\text{正弦}(\text{角}|\text{元})} = \text{正切}(\text{角}|\text{元})$$

第五題 求

$$\frac{1 - (\text{餘割} \text{亢正切天})}{1 - (\text{餘割} \text{角正切天})} = \frac{1 - (\text{餘切} \text{亢正弦天})}{1 - (\text{餘切} \text{角正弦天})}$$

式之證

證得題式之左邊等于

$$\frac{\text{餘弦天} \mid 1 - (\text{餘切} \text{亢}) \text{正弦天}}{\text{餘弦天} \mid 1 - (\text{餘切} \text{角}) \text{正弦天}}$$

即等于

$$\frac{1 - (\text{餘切} \text{亢正弦天})}{1 - (\text{餘切} \text{角正弦天})}$$

第六題 求

$$\frac{\text{正切角} | \text{正切亢}}{\frac{\text{餘弦角} \text{餘弦亢}}{\text{正弦}(\text{角} | \text{亢}) \text{正弦}(\text{角} | \text{亢})}} =$$

式之證

證得題式之左邊等于

$$\frac{(\text{正切角} | \text{正切亢})}{(\text{正切角} | \text{正切亢})}$$

故等于

$$\frac{\text{餘弦角} \text{餘弦亢}}{\text{正弦}(\text{角} | \text{亢})} \times \frac{\text{餘弦角} \text{餘弦亢}}{\text{正弦}(\text{角} | \text{亢})}$$

第七題

若

則

求此兩式之證

惟因

所以

即

$$\text{正弦斗} = \text{正} \angle \text{正} \sin \text{斗} \mid \text{正} \angle \text{餘} \sin \text{斗} \text{正} \angle \text{斗}$$

$$\text{正} \angle \text{斗} = \text{正} \angle \text{正} \sin (\text{斗} \mid \text{斗})$$

$$\text{正} \angle \text{斗} = \text{正} \angle \text{正} \sin \mid$$

$$\text{正} \angle \text{斗} = \text{正} \angle \text{餘} \sin \mid$$

$$\text{正} \angle \text{餘} \sin \text{斗} \text{正} \angle \text{斗}$$

$$\text{正} \angle \text{正} \sin$$

$$\text{正} \angle \text{斗} (\text{正} \angle \text{餘} \sin) = \text{正} \angle \text{正} \sin$$

第八題 若

$$\frac{\text{正切甲}}{\text{正切(甲乙)}} = \frac{\text{正切甲}}{\text{正切乙}} - \frac{\text{正切甲}}{\text{正切丙}}$$

則

$$\text{正切甲} \text{正切乙} = \text{正切丙}$$

求此兩式之證

惟因

$$\text{正切甲} \text{正切(甲乙)} = \frac{\text{正切甲}}{\text{正切丙}} \text{正切甲}$$

又因

$$1 - \text{正切甲} \text{正切(甲乙)} =$$

$$1 - \text{正切甲} \frac{\text{餘弦甲}}{\text{正切丙}} = \frac{\text{餘弦甲}}{\text{餘弦丙}}$$

所以下式約上式得

$$\text{正切乙} = \text{正切丙} \text{餘切甲}$$

第九題 若

$$\text{餘弦斗} \perp \text{甲餘弦斗} = \text{乙}$$

$$\text{正弦斗} \perp \text{甲正弦斗} = \text{丙}$$

則

$$\text{正弦二斗} = \sqrt{\frac{\text{四甲} \perp \text{三}}{(-\text{甲}) \perp \text{乙} \perp \text{丙}}}$$

求其證

兩式相加得

$$(\text{餘弦斗} \perp \text{正弦斗}) \perp (\text{甲餘弦斗} \perp \text{甲正弦斗}) = \text{乙} \perp \text{丙}$$

自乘變之得

$$(-\text{正弦二斗}) \perp (-\text{甲} \perp \text{正弦二斗}) = \text{四}(\text{乙} \perp \text{丙})$$

即

$$\text{四}(-\text{甲}) \perp \text{四}(\text{甲}) \perp \text{正弦二斗}$$

$$(\text{四甲} \perp \text{三}) \perp \text{正弦二斗} \perp \text{正弦二斗} = \text{四}(\text{乙} \perp \text{丙})$$

一 惟因

$$\text{四}(\text{甲} \perp \text{甲}) \perp \text{正弦二斗} \perp \text{正弦二斗} = \text{八乙丙}$$

二

爲將其兩式相乘而變得之式所以若將①②兩式

相減則必得

$$\begin{aligned} & \text{四} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \sin^2 \theta \\ & = \text{四} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

第十題

若則

正切斗 = 餘弦角正切牛

$$\text{正切} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) = \frac{\text{正切} \sin \theta \text{餘弦} \sin \theta}{\text{正切} \sin \theta \text{正弦} \sin \theta}$$

求其證

第十一題

若

正割角正割斗正切角正切斗—正割亢

①

則

正割角正切斗正切角正割斗—正切亢

②

求其證

其證爲

$$\text{正切}(\text{牛斗}) = \frac{1 - \text{正切牛正切斗}}{\text{正切牛} - \text{正切斗}}$$

$$= \frac{1 - \text{正切牛餘弦角}}{\text{正切牛} - (\text{餘弦角})}$$

$$= \frac{2 - \text{餘弦牛} - 1 - \text{正弦牛餘弦角}}{2 - \text{正弦牛餘弦牛} - (\text{餘弦角})}$$

$$= \frac{1 - \text{餘弦角} - (\text{餘弦牛} - \text{正弦牛}) - (\text{餘弦角})}{2 - \text{正弦牛} - (\text{餘弦角})}$$

$$= \frac{1 - \text{正切三角餘弦二牛}}{2 - \text{正切三角正弦二牛}}$$

$$= \frac{1 - \text{正切三角餘弦二牛}}{2 - \text{正切三角正弦二牛}}$$

$$= \frac{1 - \text{正切三角餘弦二牛}}{2 - \text{正切三角正弦二牛}}$$

$$= \frac{1 - \text{正切三角餘弦二牛}}{2 - \text{正切三角正弦二牛}}$$

其①式自乘得

正割角正割斗 $\perp$ 正割角正切角正割斗正切斗 $\perp$ 正切角正切斗 $\perp$ 正割元

惟因

正割角 $\perp$ 正切角 $\perp$

所以

正割角正切斗 $\perp$ 正割角正切角正割斗正切斗 $\perp$ 正切角正割斗 $\perp$ 正切元

卽

正割角正切斗 $\perp$ 正切角正割斗 $\perp$ 正切元

第十二題

若

$$\text{寅} = \text{餘割斗} \mid \text{正弦斗}$$

$$\text{卯} = \text{正割斗} \mid \text{餘弦斗}$$

則

$$\begin{matrix} \text{三} & \text{三} & \text{三} & \text{三} \\ \text{寅} & \text{卯} & \text{寅} & \text{卯} \end{matrix} = 1$$

求其證

惟因

$$\text{寅} = \frac{\text{正弦斗}}{\text{餘弦斗}}$$

$$\text{卯} = \frac{\text{餘弦斗}}{\text{正弦斗}}$$

所以

$$\text{寅卯} = \frac{\text{餘弦斗}}{\text{正弦斗}} \times \frac{\text{正弦斗}}{\text{餘弦斗}}$$

又

$$\begin{matrix} \text{三} & \text{三} & \text{三} & \text{三} \\ \text{寅} & \text{卯} & \text{寅} & \text{卯} \end{matrix} = \frac{\text{正弦斗}}{\text{餘弦斗}} \times \frac{\text{餘弦斗}}{\text{正弦斗}}$$

$$= \frac{(\text{正弦斗} \mid \text{餘弦斗})}{\text{餘弦斗} \mid \text{正弦斗}} = \frac{(\text{寅卯})}{1}$$

第十三題

有

$$\begin{aligned} \text{寅} &= \text{餘弦}^{\frac{3}{4}} \text{牛} \perp \\ \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{牛} &= \text{正切角} \end{aligned}$$

求以角爲主而明其寅之同數

惟因

$$\begin{aligned} \text{寅} &= \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{牛}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{牛}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} = \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} \\ &= \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} = \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} \\ &= \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} = \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp} \end{aligned}$$

所以

$$\text{寅} = \frac{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}{\left(\frac{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}}{\perp \text{正切}^{\frac{3}{4}} \text{角}} \right) \perp}$$

第十四題

有

$$\frac{\text{餘弦角} \cdot \text{餘弦元} \cdot \text{餘弦底}}{\text{餘弦角} \cdot \text{餘弦元} \cdot \text{餘弦底}} = 1$$

求

$$\frac{\text{角}}{\text{元}} = \text{周}$$

之證

因其式能變爲

而

$$\frac{\text{角}}{\text{元}} = \text{周}$$

所

$$\frac{\text{餘弦角} \cdot (\text{餘弦角} \cdot \text{餘弦元} \cdot \text{餘弦底})}{\text{餘弦元} \cdot (\text{餘弦元} \cdot \text{餘弦角} \cdot \text{餘弦底})} = 1 \cdot \text{餘弦底}$$