数学　3

温晓东　主编

江西高校出版社

教师教育专业系列教材

数学（三）

主　编　温晓东

副主编　蔡江华　李建斌

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.3/温晓东主编.—南昌:江西高校出版社，2014.1

ISBN 978-7-5493-2315-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①温… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-教材 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第011076号

出版发行	江西高校出版社
社址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)88504319
销售电话	(0791)88511422
网址	www.juacp.com
印刷	南昌市红星印刷有限公司
照排	江西太元科技有限公司照排部
经销	各地新华书店
开本	787mm×1092mm 1/16
印张	10.75
字数	170千字
版次	2015年7月第1版第2次印刷
书号	ISBN 978-7-5493-2315-9
定价	23.00元

赣版权登字-07-2014-16

教师教育专业数学系列教材编委会成员

（按姓氏笔画排列）

编写说明

五年制高等师范教育经过十多年的探索与实践，已经成为我省培养专科层次小学、幼儿园教师的骨干力量. 为进一步提高人才培养的规格与质量，我们组织编写了这套教师教育专业《数学》教材.

教师教育专业《数学》教材的编写，旨在新的教育形式下提高师范学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养师范生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应学校教育的能力，促进学生的全面发展，为基础教育输送合格的小学教师.

五年制高等师范教育教材的编写努力体现“五年一贯”的思想. 我们的基本构想是前二年以基础性为主，兼顾选择性，后三年以选择性为主，兼顾基础性. 前后衔接，融为一体.

这套教师教育专业《数学》教材共分四册，适用于招收初中毕业生的五年制高等专科学校学生前二年使用，每学期一册，每周 4 课时.

全套书在体例上有下列特点：

1. 每章开头均有目录和引言，以便学生了解本章的学习内容.

2. 书中习题分为两类：习题和复习参考题.

每一小节后都配有习题，便于学生作业选用，少数标有 * 号的题目有一定难度，可供学有余力的学生选用.

每章最后有 A、B 两组复习参考题，A 组题是基础题，供

复习全章使用；B 组题带有一定的灵活性，有一定难度，可供学有余力的学生使用.

3. 每章后面均安排了“本章小结”，供复习全章时使用.

4. 书中附有少量的阅读教材，力求体现师范性，使学生视野得到扩大，从而激发学生的学习兴趣，提高教师教育的质量.

我们在充分调研的基础上，聘请了师范院校具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人分别担任本教材的主编，从事教学的一线骨干教师参与编写. 在编写过程中，我们阅读了大量的资料，参考了国内同行的研究成果，注意把握新课程标准，并结合师范专科学校的教学实际，力求达到教材既适用又有特色的目的.

由于时间仓促，加上我们水平有限，难免存在不足之处，请在使用中提出宝贵意见，以待今后完善.

编者

2013 年 11 月

本书部分常用符号

k_l ,k_{AB}′	直线 l 的斜率 k,直线 AB 的斜率
k'	
AB 或 $\lvert AB \rvert$	线段 AB 的长度
C：$f(x, y)=0$	曲线 C,其方程是 $f(x, y)=0$, 方程是 $f(x, y)=0$ 的曲线 C
C：$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases}$（$t$ 为参数）①	曲线 C,其参数方程是①, 参数方程是①的曲线 C
$(\pm a, 0)$	$(a, 0)$、$(-a, 0)$两点
$(0, \pm b)$	$(0, b)$、$(0, -b)$两点
$\boldsymbol{N}$	非负整数集;自然数集
$\boldsymbol{N}^*$ 或 $\boldsymbol{N}_+$	正整数集
$\boldsymbol{Z}$	整数集
$\boldsymbol{Q}$	有理数集
$\boldsymbol{R}$	实数集
$\boldsymbol{C}$	复数集
$\boldsymbol{i}$	虚数单位
$a+bi$	复数
bi	纯虚数
$(a,b)=d$	a、b 的最大公约数为 d
$(a,b) \mid c$	a、b 的最大公约数整除 c

目　录

第一章　直线和圆的方程

1.1　直线的倾斜角和斜率

初中研究一次函数时，在平面直角坐标系中，画出的一次函数图像是一条直线，例如函数 $y=2x+1$ 的图像是直线 l(图 1－1)．这时，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值都是直线 l 上的点的坐标，例如数对(0，1) 满足函数式，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是(0，1)；而直线 l 上每一点的坐标都满足函数式，例如直线 l 上点 P 的坐标是(1，3)，数对(1，3)就满足函数式.

一般的，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，是由满足 $y=kx+b$的每一对 x、y 的值为坐标的点构成的. 由于函数式 $y=kx+b$ 也可以看作二元一次方程，所以我们也可以说，这个方程的解和直线上的点也存在这样的对应关系.

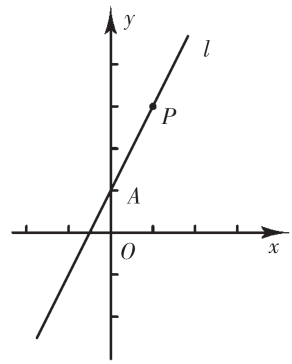

图 1–1

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点，反过来，这条直线上的点的坐标都是这个方程的解，这时，这个方程就叫做这条**直线的方程**，这条直线叫做这个**方程的直线**.

在平面直角坐标系中研究直线时，就是利用直线与方程的这种关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题. 为此，我们先研究直线的倾斜角和斜率.

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为 α，那么 α 就叫做直线的**倾斜角**. 如图 1－2 中的 α 是直线 l 的倾斜角. 当直线和 x 轴平行或重合时，我们规定直线的倾斜角为 0°. 因此，倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直线的**斜率**. 直线的斜率常用 k 表示. 即

$$k=\tan\alpha$$

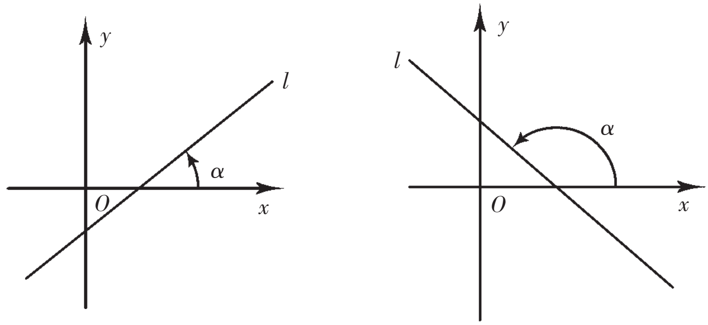

图 1-2

倾斜角是 90°的直线没有斜率；倾斜角不是 90°的直线都有斜率. 例如，倾斜角是 45°的直线的斜率是 tan45°，即等于 1. 由正弦、余弦的诱导公式可以得出

$$\tan(180° - \theta) = \frac{\sin(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta.$$

由此公式可以求倾斜角是钝角的直线的斜率. 例如倾斜角是 135°的直线的斜率

$$k = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1.$$

由正切函数的单调性，倾斜角不同的直线，其斜率也不同. 我们常用斜率来表示倾斜角不等于 90°的直线对于 x 轴的倾斜程度.

在坐标平面内，如果已知两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，那么直线 P_1P_2 就是确定的，当直线 P_1P_2 的倾斜角不等于 90°时，这条直线的斜率也是确定的. 下面我们来研究怎样用两点的坐标来表示直线 P_1P_2 的斜率.

设直线 P_1P_2 的倾斜角是 α，斜率是 k，向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向是向上的（如图 1 - 3（1）~（2））. 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. 过原点作向量$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_1P_2}$，则点 P 的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$，而且直线 OP 的倾斜角也是 α. 根据正切函数的定义，

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

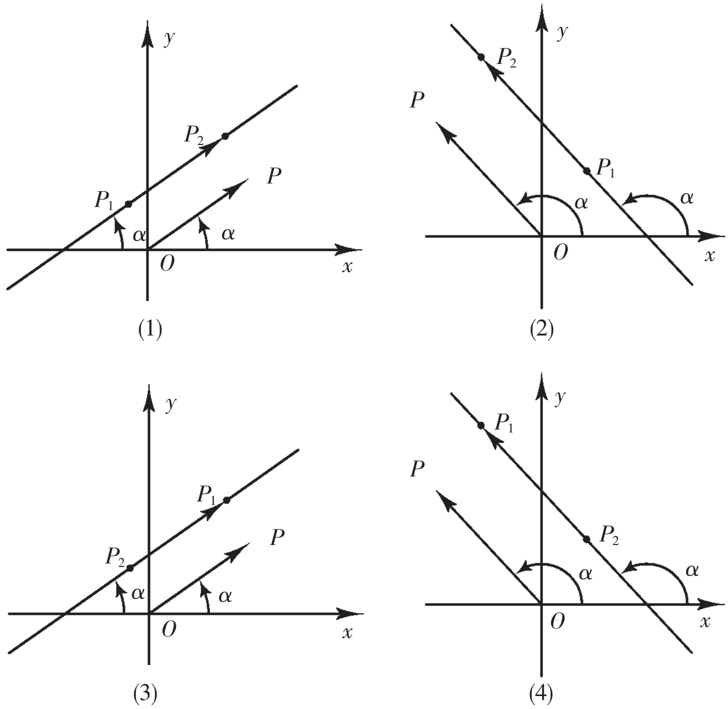

图 1–3

即
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

同样，当向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的方向向上时(如图 1－3(3)～(4))．

$$\tan\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

即
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

综上所述，我们得到经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的**直线的斜率公式**

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

直线上的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$及与它平行的向量都称为**直线的方向向量**. 直线 P_1P_2 的方向向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标是(x_2-x_1,y_2-y_1)． 当直线 P_1P_2 与 x 轴不垂直时，$x_1\neq x_2$. 此时，向量$\frac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{P_1P_2}$也是

直线 P_1P_2 的方向向量，且它的坐标是 $\frac{1}{x_2-x_1}(x_2-x_1, y_2-y_1)$，即 $(1, k)$. 其中 k 是直线 P_1P_2 的斜率.

例 1 如图 1－4，直线 l_1 的倾斜角 $\alpha_1=30°$，直线 $l_2 \perp l_1$，求 l_1、l_2 的斜率.

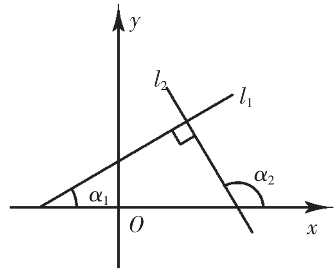

图 1–4

解: l_1 的斜率

$$k_1=\tan\alpha_1=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为 l_2 的倾斜角

$\alpha_2=90°+30°=120°$，

所以 l_2 的斜率

$$k_2=\tan 120°=\tan(180°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}.$$

例 2 求经过 $A(-2, 0)$、$B(-5, 3)$ 两点的直线的斜率和倾斜角.

解: $k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1$，就是 $\tan\alpha=-1$.

因为 $0° \leqslant \alpha < 180°$，所以 $\alpha=135°$.

因此，这条直线的斜率是 -1，倾斜角是 $135°$.

习题 1.1

1. 已知直线的倾斜角，求直线的斜率:

   (1) $\alpha=0°$; (2) $\alpha=60°$; (3) $\alpha=90°$; (4) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

2. 已知直线的倾斜角的取值范围，利用正切函数的性质，讨论直线斜率及其绝对值的变化情况:

   (1) $0°<\alpha<90°$; (2) $90°<\alpha<180°$.

3. 求经过下列每两个点的直线的斜率和倾斜角:

   (1) $C(10, 8)$、$D(4, -4)$;

   (2) $P(0, 0)$、$Q(-1, \sqrt{3})$;

   (3) $M(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$、$N(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

4. 已知 a、b、c 是两两不相等的实数，求经过下列每两个点的直线的倾斜角:

   (1) $A(a, c)$、$B(b, c)$; (2) $C(a, b)$、$D(a, c)$;

   (3) $P(b, b+c)$、$Q(a, c+a)$.

5. 已知三点 A、B、C，且直线 AB、AC 的斜率相同，求证这三点在同一条直线上.

6. 在同一坐标平面内，画出下列方程的直线:

   $l_1: y=x$; $l_2: 2x+3y=6$;

   $l_3: 2x+3y+6=0$; $l_4: 2x-3y+6=0$.

7. 已知直线斜率的绝对值等于1，求此直线的倾斜角.

8. 四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 3)$、$B(1, -1)$、$C(-1, -2)$、$D(-2, 2)$，求四条边所在直线的斜率和倾斜角.

9. (1) 当且仅当 m 为何值时，经过两点 $A(-m, 6)$、$B(1, 3m)$ 的直线的斜率是12?

   (2) 当且仅当 m 为何值时，经过两点 $A(m, 2)$、$B(-m, 2m-1)$ 的直线的倾斜角是 $60°$?

1.2　直线的方程

1.　点斜式

若直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且斜率是 k，求直线 l 的方程(图1－5).

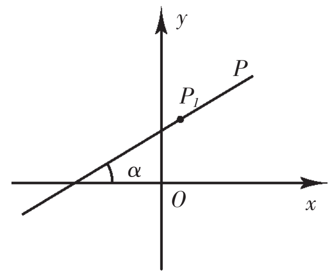

图 1–5

设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于 P_1 的任意一点. 根据经过两点的直线的斜率公式,得

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

可化为

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

可以验证: 直线 l 上的每个点的坐标都是这个方程的解; 反过来，以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上. 所以这个方程就是过点 P_1、斜率为 k 的直线 l 的方程.

这个方程是由直线上一点和直线的斜率确定的，所以叫做直线方程的**点斜式**.

当直线 l 的倾斜角为 0°时(图 1－6)，$\tan 0° = 0$，即 $k = 0$，这时直线 l 的方程就是 $y = y_1$.

当直线 l 的倾斜角为 90°时，直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示. 但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_1(图 1－7)，所以它的方程是 $x = x_1$.

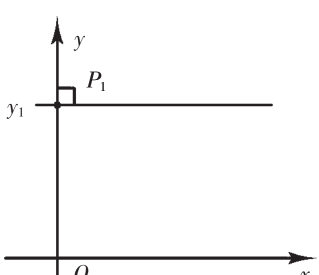

图 1–6

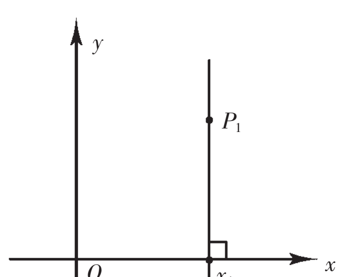

图 1–7