

微積分習題詳解

(上册)

[美]托馬士 原著
陳富子 黃慶堂 古仁丁 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

微積分習題詳解

(上册)

[美]托馬士 原著
陳富子 黃慶堂 古仁丁 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

微积分习题详解 (上)

托马士 原著

陈富子、黄庆堂、古仁丁 译著

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1994 年 11 月第 一 版 开本: 711×1245 1/24

1994 年 11 月第一次印刷 印张: 28

印数: 0001—700 字数: 20万字

ISBN: 7-5062-1923-9/O·134

定价: 35.80元 (WB9403/4)

世界图书出版公司已向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

微積分習題詳解

(下冊)

[美]托馬士 原著

陳富子 黃慶堂 古仁丁 譯著

1423/10

曉園出版社
世界圖書出版公司

上冊目錄

第一章 函數的變化率 1

1. 卡氏座標系和直線方程式 1 / 2. 函數和函數圖形 9 / 3. 微積分與運算 18 /
4. 絕對值和靶值 18 / 5. 圓，拋物線的平移 24 / 6. 斜率，切線與導數 31 /
7. 函數的極限值 38 / 8. 無限與極值 52 / 9. 夾擠定理和 $\sin \theta / \theta$ 58 / 10.
連續函數 63 / 觀念複習 68 / 綜合問題 73

第二章 導數 89

1. 微分法則 89 / 2. 速度和其他變率 95 / 3. 三角函數的導數 104 / 4. 連鎖
法則 110 / 5. 隱函數與分數乘冪 120 / 6. 線性化與微分 128 / 7. 牛頓法
138 / 觀念複習 142 / 綜合問題 145

第三章 導數的應用 163

1. 相關變率 163 / 2. 極大、極小和均值定理 171 / 3. 運用 y' , y'' 描圖 176 /
4. 有理函數的繪圖——漸近線和支配項 188 / 5. 最佳化 193 / 6. 不定型與
L'Hôpital's 法則 208 / 7. 近似誤差平方與均值定理 212 / 觀念複習 217
/ 綜合問題 220

第四章 積分 235

1. 不定積分 235 / 2. 初值問題與數學模型 244 / 3. 定積分 251 / 4. 定積分
之計算 258 / 5. 微積分基本定理 266 / 6. 變數代換 276 / 7. 數值積分 291
/ 觀念複習 298 / 綜合問題 302

第五章 定積分的應用 321

1. 區域間的面積 321 / 2. 體積：切片、圓盤及洗衣捲筒法 331 / 3. 圓柱薄殼
法 342 / 4. 平面曲線的弧長 347 / 5. 旋轉體的表面積 354 / 6. 質心與力矩
361 / 7. 功 369 / 8. 流體之壓力與力 374 / 9. 模型之應用 378 / 觀念複習
385 / 綜合問題 388

第六章 超越函數的微積分 405

1. 反函數 405 / 2. 自然對數 410 / 3. 指數函數 423 / 4. 其他的指數和對數
函數 436 / 5. 成長與衰減 449 / 6. 函數的上升率 456 / 7. 反三角函數 463
/ 8. 反三角函數的導數及有關的積分 471 / 9. 雙曲線函數 481 / 10. 吊纜 493
/ 觀念複習 496 / 綜合問題 503

第七章 積分技巧 529

1. 基本積分公式 529 / 2. 部分積分 544 / 3. 三角函數的積分 555 / 4. 三角代換積分 566 / 5. 有理函數與部分分式 576 / 6. 積分表與遞回公式 589 / 7. 瑕積分 601 / 觀念複習 615 / 綜合問題 619

下冊目錄

第八章 無窮級數 663

1. 數列的極限 663 / 2. 無窮級數 679 / 3. 正項級數的比較審斂及積分審斂法 691 / 4. 比值審斂法和根值審斂法 702 / 5. 交錯級數與絕對收斂 708 / 6. 冪級數 722 / 7. 泰勒級數與馬克勞林級數 736 / 8. 泰勒級數的計算 750 / 觀念複習 759 / 綜合問題 762

第九章 圓錐截面，參數化曲線與極座標 797

1. 圓錐曲線 797 / 2. 二次曲線的圖形及其對原點的旋轉 811 / 3. 曲線之參數式 822 / 4. 參數曲線之微積分 829 / 5. 極座標 841 / 6. 極座標方程式的繪圖 848 / 7. 圓錐曲線的極座標方程式 854 / 8. 極座標的積分 863 / 觀念複習 874 / 綜合問題 879

第十章 向量與解析幾何 913

1. 平面向量 913 / 2. 卡氏座標及空間向量 918 / 3. 內積 926 / 4. 外積 934 / 5. 空間中的線與面 939 / 6. 三個或更多向量的乘積 945 / 7. 空間中的曲面 949 / 8. 圓柱座標及球座標 960 / 觀念複習 965 / 綜合問題 968

第十一章 值為向量的函數及三維運動 985

1. 值為向量的函數及空間中的曲線 985 / 2. 拋體運動 997 / 3. 有向距離及單位向量 1005 / 4. 曲率、扭率及Frenet座標 1009 / 5. 行星運動及衛星 1022 / 觀念複習 1025 / 綜合問題 1029

第十二章 多變數函數及導數 1051

1. 多變數函數 1051 / 2. 極限 1059 / 3. 偏導數 1066 / 4. 微分與線性化 1074 / 5. 連鎖法則 1082 / 6. 非獨立變數的偏導數 1094 / 7. 方向導數、梯度和切平面 1098 / 8. 極值與鞍點 1108 / 9. Lagrange 乘子法 1127 / 10. 泰勒公式、二次導數和誤差 1135 / 觀念複習 1138 / 綜合問題 1142

第十三章 多重積分 1169

1. 重積分 1169 / 2. 面積、力矩和質心 1182 / 3. 極座標形式之重積分 1196 / 4. 直角座標系的三重積分 1203 / 5. 三維之質量與力矩 1213 / 6. 柱面座標與球面座標之三重積分 1229 / 7. 多重積分的代換 1251 / 觀念複習 1257 / 綜合問題 1262

第十四章 向量場之積分 1279

1. 線積分 1279 / 2. 向量場、切、環場積和通量 1287 / 3. 格林定理 1297 / 4. 表面積與面積分 1310 / 5. 散度定理 1325 / 6. 史托克定理 1334 / 7. 路徑無關，位勢函數及保守場 1344 / 觀念複習 1356 / 綜合問題 1359

第十五章 微分方程式 1385

1. 可分離一階微分方程式 1385 / 2. 正合方程式 1391 / 3. 一階線性方程式 1400 / 4. 二階線性齊次方程式 1405 / 5. 二階方程式；降階法 1410 / 6. 振盪 1432 / 7. 冪級數解 1435 / 8. 方向場及Picard定理 1441 / 9. 數值方法 1446 / 觀念複習 1447 / 綜合問題 1448

附錄A 1461

A.4 第一章極限定理的證明 1461 / A.5 數學歸納法 1462 / A.7 Cauchy's 均值定理及L'Hôpital's法則 1467 / A.10 行列式與Cramer's法則 1467

第一章 函數的變化率

1.1 卡氏座標系和直線方程式

問題 1.~4. 中，一質點由 A 移動至 B ，試求在質點的座標上的增量 Δx 及 Δy 。

1. $A(-3, 2), B(-1, -2)$ 2. $A(-1, -2), B(-3, 2)$

解 $\Delta x = -1 - (-3) = 2$ 解 $\Delta x = -3 - (-1) = -2$
 $\Delta y = -2 - 2 = -4$ $\Delta y = 2 - (-2) = 4$

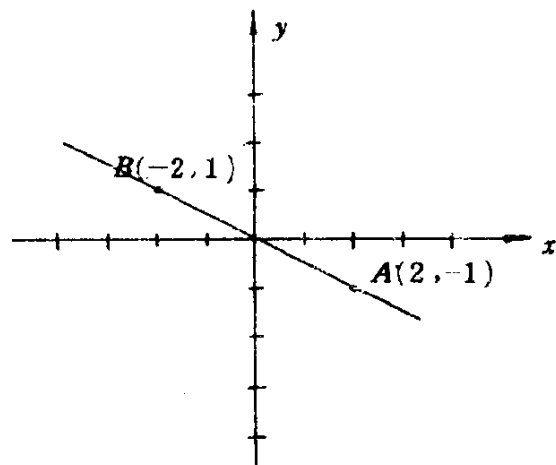
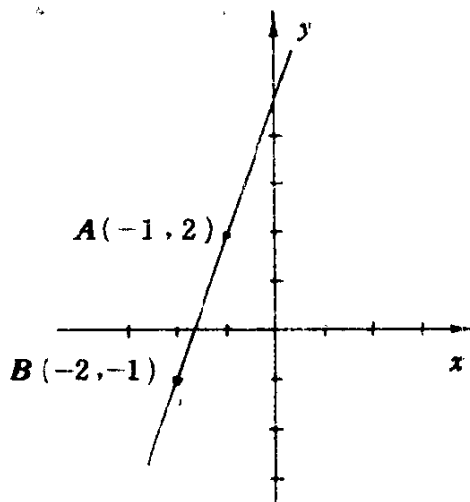
3. $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$ 4. $A(\sqrt{2}, 4), B(0, 1.5)$

解 $\Delta x = -8.1 - (-3.2) = -4.9$ 解 $\Delta x = 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$
 $\Delta y = -2 - (-2) = 0$ $\Delta y = 1.5 - 4 = -2.5$

問題 5.~8. 中，劃出點 A 及 B ，求出二點所決定的直線的斜率（若存在），及垂直此直線的直線的斜率（若存在）。

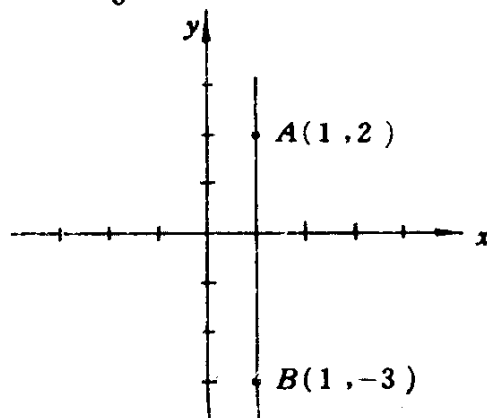
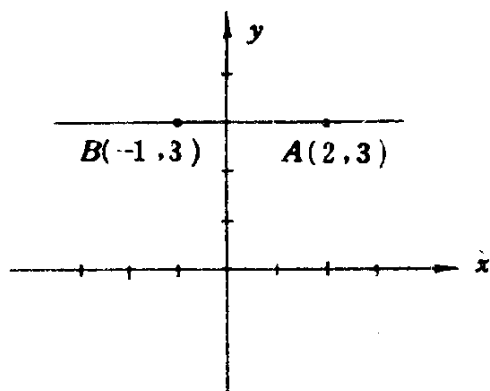
5. $A(-1, 2), B(-2, -1)$ 6. $A(2, -1), B(-2, 1)$

解 $m_1 = \frac{-3}{-1} = 3, m_2 = -\frac{1}{3}$ 解 $m_1 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, m_2 = 2$



7. $A(2, 3), B(-1, 3)$ 8. $A(1, 2), B(1, -3)$

解 $m_1 = \frac{0}{-3} = 0, m_2$ 不存在 解 $m_1 = \frac{-5}{0}$ 不存在, $m_2 = 0$



2 托馬士數積分習題詳解

問題 9.~12, 求通過一已知點(a)鉛垂線, (b)水平線的直線方程式。

9. $(-1, 4/3)$

解 (a) $x = -1$

(b) $y = 4/3$

11. $(0, -\sqrt{2})$

解 (a) $x = 0$

(b) $y = -\sqrt{2}$

10. $(\sqrt{2}, -1.3)$

解 (a) $x = \sqrt{2}$

(b) $y = -1.3$

12. $(-\pi, 0)$

解 (a) $x = -\pi$

(b) $y = 0$

問題 13~16, 求出通過 p 點, 斜率為 m 的直線方程式。

13. $p(-1, 1), m = 1$

解 $y = mx + b \Rightarrow 1 = -1 + b$

$\therefore b = 2 \quad \therefore y = x + 2$

15. $p(0, b), m = 2$

解 $y = mx + B \Rightarrow b = 2 \cdot 0 + B$

$\Rightarrow B = b$

$\therefore y = 2x + b$

16. $p(a, 0), m = -2$

解 $y = mx + b \Rightarrow 0 = -2a + b$

$\therefore b = 2a \quad \therefore y = -2x + 2a$

14. $p(-2, 2), m = 1/2$

解 $y = \frac{1}{2}x + b$

$\Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(-2) + b \Rightarrow b = 3$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3$

問題 17~20, 試求通過二已知點的直線方程式。

17. $(1, 1), (1, 2)$

解 m 不存在 \Rightarrow 垂直線 $\therefore x = 1$

18. $(-2, 0), (-2, -2)$

解 $x = -2$ (為什麼?)

19. $(0, 0), (2, 3)$

解 斜率 $m = \frac{3}{2} \therefore y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

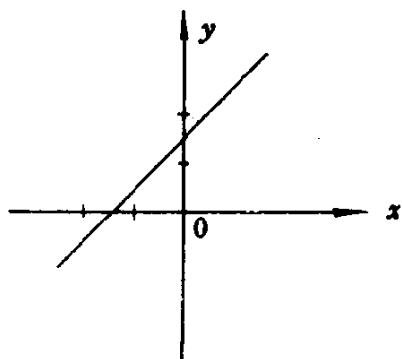
20. $(1, 3), (3, 1)$

解 $x + y = 4$ (為什麼不用算)

問題 21~24, 試求斜率 m 且 y 軸截距為 b 的直線方程式。

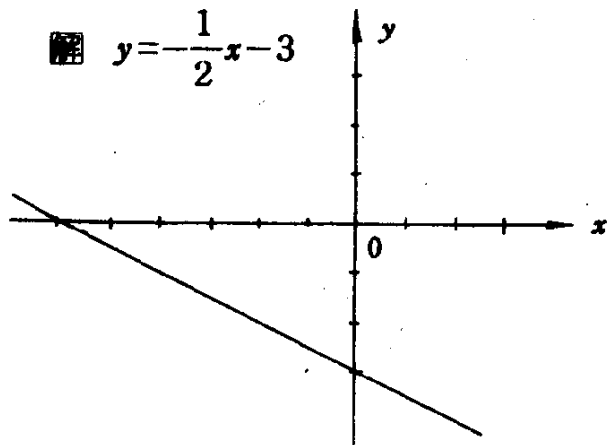
21. $m = 1, b = \sqrt{2}$

解 $y = x + \sqrt{2}$



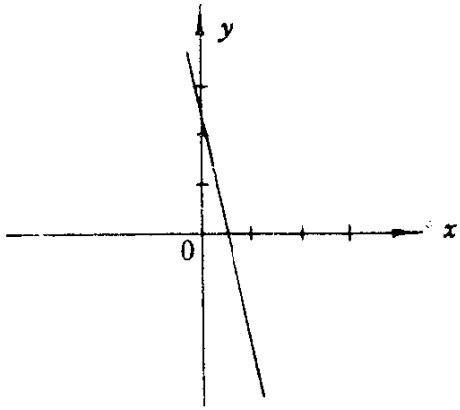
22. $m = -\frac{1}{2}, b = -3$

解 $y = -\frac{1}{2}x - 3$



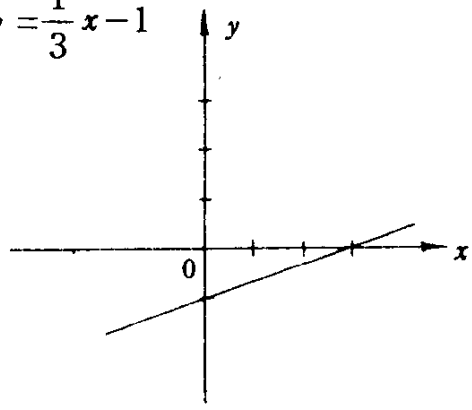
23. $m = -5, b = 2.5$

解 $y = -5x + 2.5$



24. $m = \frac{1}{3}, b = -1$

解 $y = \frac{1}{3}x - 1$

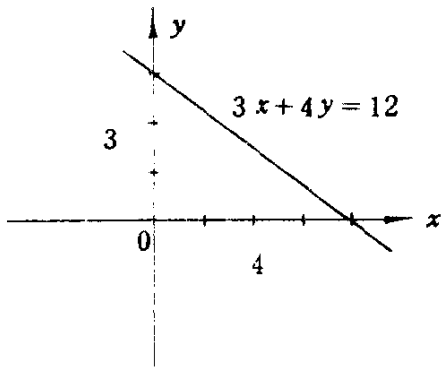


問題25~28, 以下列步驟畫出直線。

- (1) 設 $y = 0$ 求得 x 軸截距。
- (2) 設 $x = 0$ 求得 y 軸截距。
- (3) 劃出截距, 連成直線。

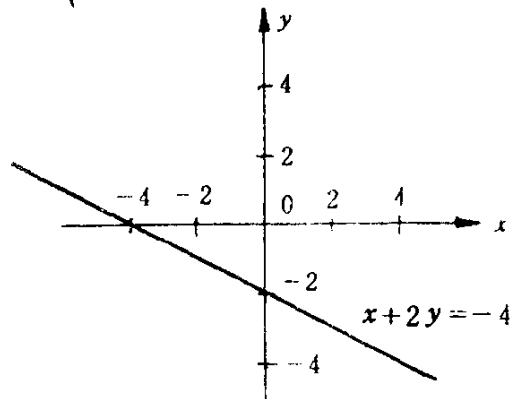
25. $3x + 4y = 12$

解 $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=3 \\ y=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$ 圖形為



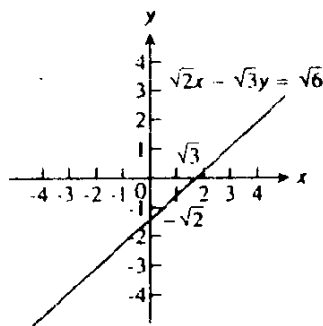
26. $x + 2y = -4$

解 $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-2 \\ y=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$ 圖形為



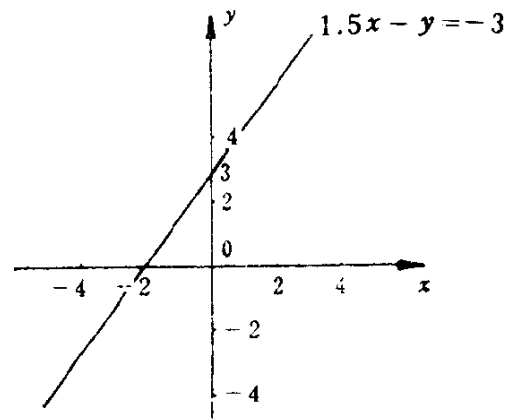
27. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$

解 $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y = -\sqrt{2} \\ y=0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$ 圖形為



28. $1.5x - y = -3$

解 $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=3 \\ y=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$ 圖形為



4 托馬士微積分習題詳解

問題29~34, 試求通過P點且(a)平行, (b)垂直, 已知直線的直線。

29. $P(2, 1), y = x + 2$

解 (a) 設該直線為 $y = x + b$, 則 $1 = 2 + b \quad \therefore b = -1 \quad \therefore y = x - 1$
 (b) 設該直線為 $y = -x + b$, 則 $1 = -2 + b \quad \therefore b = 3 \quad \therefore y = -x + 3$

30. $P(0, 0), 3x - y = 5$

解 (a) 設該直線為 $3x - y = b$, 則 $0 - 0 = b = 0 \quad \therefore 3x - y = 0$
 (b) 設該直線為 $x + 3y = b$, 則 $0 + 0 = b = 0 \quad \therefore x + 3y = 0$

31. $P(1, 2), x + 2y = 3$

解 (a) 設該直線為 $x + 2y = b$, 則 $1 + 2 \cdot 2 = b = 5 \quad \therefore x + 2y = 5$
 (b) 設該直線為 $2x - y = b$, 則 $2 \cdot 1 - 2 = b = 0 \quad \therefore 2x - y = 0$

32. $P(-2, 2), 2x + y = 4$

解 (a) $y = -2x + b \Rightarrow 2 = 4 + b \quad \therefore b = -2$
 $\therefore y = -2x - 2$

b) $y = \frac{1}{2}x + b \Rightarrow 2 - 1 + b \quad \therefore b = 3$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3$

33. $P(-2, 4), x = 5$

解 (a) 設 $x = b$, 則 $b = -2 \quad \therefore x = -2$
 (b) 設 $y = b$, 則 $b = 4 \quad \therefore y = 4$

34. $P(-3, -2), y = 3$

解 (a) 設 $y = b$, 則 $b = -2 \quad \therefore y = -2$
 (b) 設 $x = b$, 則 $b = -3 \quad \therefore x = -3$

35. 質點原位於 $A(-2, 3)$ 經 $\Delta x = 5, \Delta y = -6$ 之改變後, 新位置為何?

解 設 $B(x, y)$ 為其新位置, 則 $\begin{cases} \Delta x = x - (-2) = 5 \\ \Delta y = y - 3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

36. 質點原位於 $A(6, 0)$, 經 $\Delta x = -6, \Delta y = 0$ 之改變後, 新位置為何?

解 如上題 $(x, y) = (0, 0)$

37. 質點由 $A(x, y)$ 至 $B(3, -3)$ 座標變化 $\Delta x = 5, \Delta y = 6$, 求 x, y .

解 $\begin{cases} \Delta x = 3 - x = 5 \\ \Delta y = -3 - y = 6 \end{cases} \therefore (x, y) = (-2, -9)$

38. 質點原位於 $A(1, 0)$, 對原點反時鐘方向繞一圈回 $A(1, 0)$, 則座標淨變化為何?

解 $\Delta x = 1 - 1 = 0$
 $\Delta y = 0 - 0 = 0$

39. 測量圖 1.18 的斜率, 計算每英寸的溫度變化度數。

(a) 石膏牆板; (b) 玻璃纖維絕緣體; (c) 木板保護層。

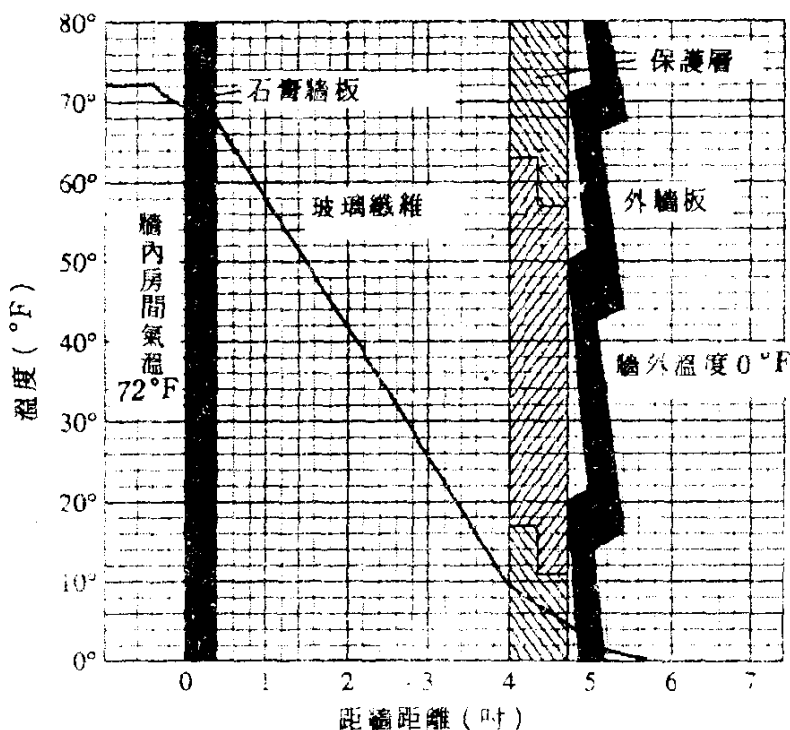


圖 1.18

解 (a) 見課本圖知約為 $= \frac{-1.2}{0.4} \approx -3$ 度/英吋

(b) $\frac{10-68}{4-0.4} \approx -16$ 度/英吋

(c) $\frac{5-10}{4.7-4} \approx -7$ 度/英吋

40. 參考圖 1.18，則問題 39 中何者為最佳絕緣體？何者最差？解釋之。

解 $-a$ 度/英吋表每英吋可降低溫度 a° ，故 $-16 < -7 < -3$
即玻璃纖維最佳。石膏板最差。

41. 潛水夫由經驗得水下深 d 之壓力 p 之關係式為 $p = kd + 1$ (k 為常數)，當 $d = 0$ 時為 1 大氣壓力，在 100 公尺處為 10.94 大氣壓，求在 50 公尺處之壓力。

解 $\begin{cases} p = 1 (d = 0) \\ 10.94 = 100k + 1 \Rightarrow k = 0.0994 \end{cases}$

$$\therefore p = 0.0994d + 1$$

$$d = 50 \Rightarrow p = 0.0994 \times 50 + 1 = 5.97 \text{ (大氣壓)}$$

42. 一光線由 x 軸上方沿 $x + y = 1$ 射入後反射，見圖 1.19，寫出新路徑之方程式。

解 \because 入射角 = 反射角

故必有一點對於 $x = 1$ 相對稱，即 $(2, 1)$

故新路徑過 $(1, 0)$ 及 $(2, 1)$

6 托馬士微積分習題詳解

$$y = \left(\frac{1-0}{2-1} \right) (x-1)$$

$$\Rightarrow y = x-1 \quad (x \geq 1)$$

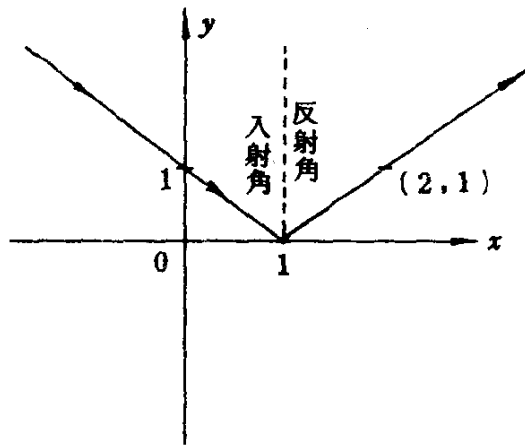


圖 1.19

43. 若繪一攝氏溫度對華氏溫度的圖，其圖總是為一直線，且經過 $(0, 32)$ 及 $(100, 212)$ ，則

(a) 畫出 CF-平面的圖。

(b) 試以 C 表示 F。

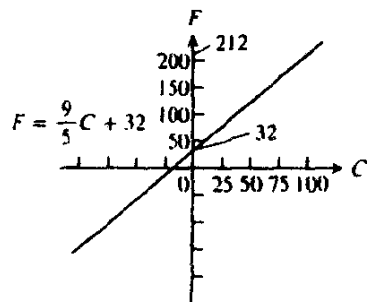
(c) 是否有一溫度，華氏溫度與攝氏溫度讀數同？若有，為何？

解 (a) 見右圖。

(b) 設 $F = mC + k$

$$\text{則 } \begin{cases} 32 = 0 + k \\ 212 = m \cdot 100 + k \end{cases}$$

$$\text{解得 } k = 32, m = \frac{9}{5} \quad \therefore F = \frac{9}{5}C + 32$$



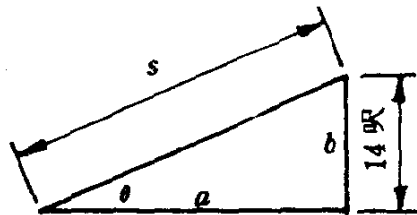
(c) 二者讀數相同，則 $F = C$

$$\text{即 } F = \frac{9}{5}F + 32 \Rightarrow F = -40$$

44. 新漢普夏的 Mt. Washington Cog 鐵路最陡峭的地方坡度為 37.1%，若在這路徑上，車前的旅客比車後的旅客高 14 呎，則前座和後座相對於車子地板的距離為多少？

解 $\tan \theta = \frac{b}{a} = 0.371 \Rightarrow \sin \theta = 0.3478$

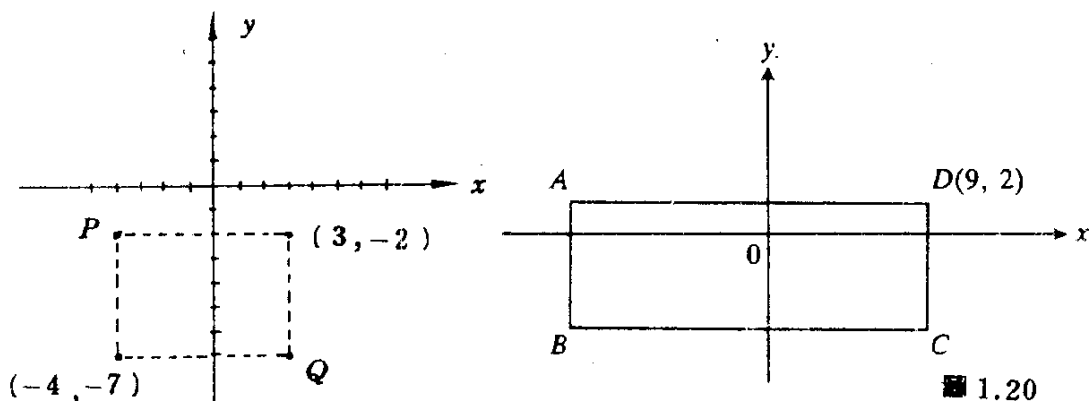
$$s = \frac{b}{\sin \theta} = 40.25 \text{ 呎}$$



45. 以 $(3, -2)$ 和 $(-4, -7)$ 為頂點且邊平行兩軸之長方形
- (a) 求其餘兩頂點座標。
- (b) 求其面積。

解 (a) $P(-4, -2)$

$Q(3, -7)$



46. 圖1.20之長方形邊平行兩軸，其長為寬之3倍，周長為56單位，求頂點A, B, C之座標。

解 設寬為 x 單位，則 $2(x+3x) = 56$ ，故 $x = 7$ (單位)，長為21單位
 $\therefore A(-12, 2), B(-12, -5), C(9, -5)$

47. 過(1, 1)及(2, 0)之直線過 y 軸於(0, b)，用相似三角形求 b 。

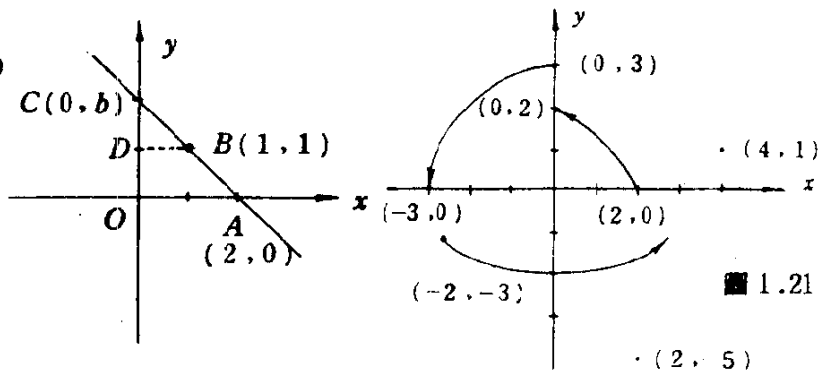
解 如下圖知 $D(0, 1)$

利用 $\triangle ACO \approx \triangle BCD$

$$\text{則 } \frac{BD}{AO} = \frac{CD}{CO}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b-1}{b}$$

$$\therefore b = 2$$



48. 對於原點反時鐘方向旋轉 90° ，將(2, 0)轉為(0, 2)，(0, 3)轉而(-3, 0)，如圖1.21所示，求下列旋轉後之點：

(a) (4, 1) (b) (-2, -3) (c) (2, -5) (d) (x, 0)

(e) (0, y) (f) (x, y) (g) 何點轉成(10, 3)?

解 (x, y) 經旋轉 θ 角(反時鐘)後為(x', y') 其關係為

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\theta = 90^\circ, \text{ 則 } \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}, \text{ 故}$$

(a) (4, 1) \rightarrow (-1, 4) (b) (-2, -3) \rightarrow (3, -2)

(c) (2, -5) \rightarrow (5, 2) (d) (x, 0) \rightarrow (0, x)

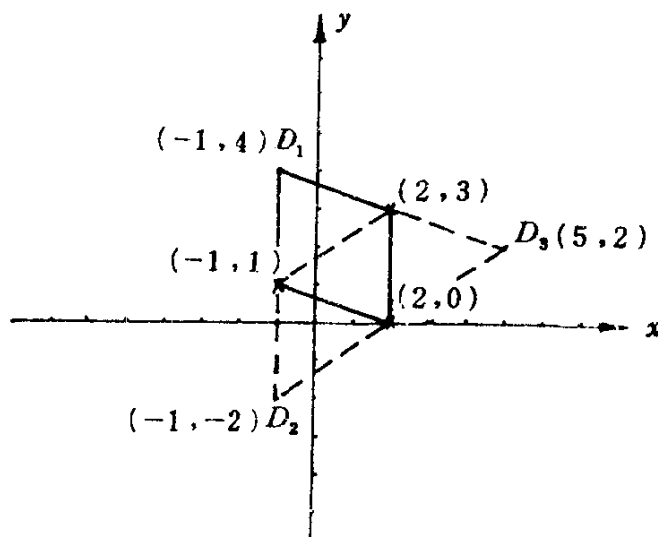
(e) (0, y) \rightarrow (-y, 0) (f) (x, y) \rightarrow (-y, x)

(g) $\begin{cases} x' = 10 = -y \\ y' = 3 = x \end{cases}$

$\therefore (x, y) = (3, -10)$ 經旋轉 90° 後為(10, 3)。

49. 三個相異的平行四邊形具有頂點(-1, 1), (2, 0)和(2, 3)，試繪出另一頂點並給定座標。

解 $D_1 = (-1, 4)$,
 $D_2 = (-1, -2)$,
 $D_3 = (5, 2)$



50. 你的計算機所能計算的最大斜率為何？請繼續範例 3 正切函數值的表。作者手中的計算機可達 $\tan(89.9999999999) = 572957795131$ 和 $\tan(90.0000000001) = -572957795131$ 。

解

 ϕ 由下逼近 90° ϕ 由上逼近 90°

$\tan 89.9 = 572.9572134$	$\tan 90.1 = -572.9572134$
$\tan 89.99 = 5729.577893$	$\tan 90.01 = -5729.577893$
$\tan 89.999 = 57295.77951$	$\tan 90.001 = -57295.77951$
$\tan 89.9999 = 572957.7951$	$\tan 90.0001 = -572957.7951$
$\tan 89.99999 = 5729577.951$	$\tan 90.00001 = -5729577.951$
$\tan 89.999999 = 57295779.51$	$\tan 90.000001 = -57295779.51$
$\tan 89.9999999 = 572957795.1$	$\tan 90.0000001 = -572957795.1$
$\tan 89.99999999 = 5729577951$	$\tan 90.00000001 = -5729577951$
$\tan 89.999999999 = 572957795131$	$\tan 90.000000001 = -572957795131$
"	"

51. k 為何值時 $2x + ky = 3$ 垂直直線 $x + y = 1$ ？又何值時平行。

解 $2x + ky = 3$ 斜率為 $-\frac{2}{k}$ ； $x + y = 1$ 斜率為 -1

垂直時 $-\frac{2}{k} \times (-1) = -1 \quad \therefore k = -2$

平行時 $-\frac{2}{k} = -1 \quad \therefore k = 2$

52. 求通過點 $(1, 2)$ 及 $x + 2y = 3$ 和 $2x - 3y = -1$ 交點的直線。

解 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ 解得 $x = 1, y = 1$

即直線通過 $(1, 2)$ 及 $(1, 1)$ ，由此觀察即可得直線方程式為 $x = 1$ 。