# 数理经济学与经济控制论基础

## 下　册

杨 小 凯　编

武汉大学经济管理系

一九八二年六月

# 数理经济学与经济控制论基础

## 目　录

## 下册　经济控制论

82—953

# 第一章 经 济 系 统

## §1 经济耦合

**经济耦合是指各经济因素或子系统之间的因果关系链。**最常见的经济耦合就是分工协作造成的投入产出关系。对于一个没有分工协作的自给自足社会来说，各个子系统之间互相独立，没有联系。这种经济系统叫做相对独立系统，如图1—1所示。图中有三个独立的子系统$A, B, C$，分别表示三个自给自足的家庭，$x_1, x_2, x_3$分别表示三个家庭对自然界的劳动输出，而$y_1, y_2, y_3$分别表示三个家庭从自然界得到的收获（输入）。一般而言，**输出是系统对外界的作用，而输入是外界对系统的作用。**严格地说，图1—1中的三个家庭与自然界之间有一定的耦合关系，它表现为输入输出之间的某种因果关系。其中$S_i$将输入$y_i$变换成输出$x_i$，而$R_i$将输出变换成反馈输入。但是三个家庭互相之间是独立的，没有耦合。

图1—2中是三个分工协作的人，$A$为专门生产粮食的农民，$B$为专门生产纺织品的手工业者，$C$为专门生产肉食的牧民。$x_1, x_2, x_3$分别为粮食、布匹和肉食的产量。图1—2叫

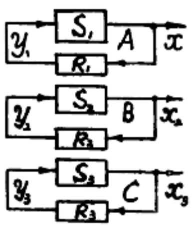



图 1—1

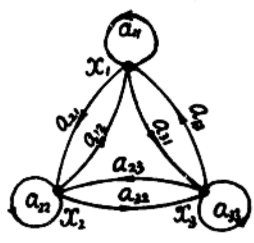



图 1—2

**信号流图**，其中$A, B, C$三点叫结点，结点标有变量$x_1, x_3, x_3$，$a_{ij}$叫**传输系数**。图中的网络是下列联立方程组之拓扑图形：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad (1—1) \\
x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned}
$$

易知，这就是封闭的投入产出模型，可见投入产出关系正是分工协作造成的输入、输出耦合关系，这种耦合网络可以用图1—3中等价的**方框图**表示。图中$x_{11} = a_{11}x_1$, $x_{12} = a_{12}x_2$, $x_{13} = a_{13}x_3$; $x_{21} = a_{21}x_1$, $x_{22} = a_{22}x_2$, $x_{23} = a_{23}x_3$; $x_{31} = a_{31}x_1$, $x_{32} = a_{32}x_2$, $x_{33} = a_{33}x_3$. 而$A$, $B$, $C$

的传输系数都是1，式(1-1)，图1-2，图1-3这三个系统之间可以用一一对应的变换将一个系统化为另一个系统，这在控制论中叫做**同构**。

如果我们有二次收益函数

$$R=px=p(ap+b)=ap^2+bp \quad a<0,\ b>0 \tag{1-2}$$

其中 $x=ap+b$ 为线性需求函数，于是边际收益为

$$\frac{dR}{dp}=2ap+b \tag{1-3}$$

它与物理中的均加速（或减速）运动微分方程

$$\frac{dS}{dt}=2a't+b' \tag{1-4}$$

就是完全同构的。我们只要用一一对应的变换，令总收益 $R$ 等于距离 $S$，令价格 $p$ 等于时间 $t$，且 $a=a'$，$b=b'$，则(1-3)就能变换成(1-4)。对于同构的系统，我们可以在一个系统中**模拟**另一个系统。

耦合分为串联耦合，并联耦合，以及开环耦合、闭环耦合（反馈耦合）。

从图1-4的方框图和信号流图可知，系统的初始输入为 $x_1$，第一个子系统之传输系数

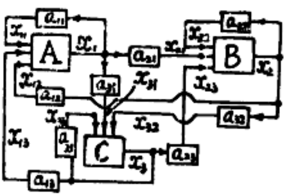



图 1-3

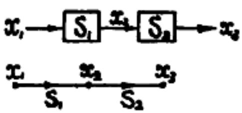



图 1-4

为 $S_1$，它的输出 $x_2=S_1x_1$ 就是第二个子系统的输入，**一个系统之输出是与之耦合的系统之输入**，这就是**串联耦合**。从图中不难看出，最终输出 $x_3=S_2x_2$，将 $x_2=S_1x_1$ 代入，则

$$\begin{aligned} x_3&=S_2x_2\\ &=S_2S_1x_1 \end{aligned} \tag{1-5}$$

**即串联系统的总传输系数等于子系统传输系数之积。**

图1-5中的方框图和等价的信号流图，**两个子系统将输入 $x$ 变换成两个并行的输出** $y_1$，

$y_2$，这就叫**并联耦合**。从图中可以看出：

$$
\begin{aligned}
y_1 &= S_1 x, \\
y_2 &= S_2 x, \\
y &= y_1 + y_2 \\
&= S_1 x + S_2 x \\
&= (S_1 + S_2) x \qquad (1\text{—}6)
\end{aligned}
$$

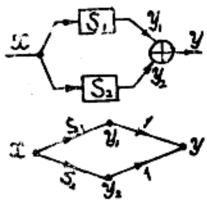


图　1—5

即，**并联耦合系熵之总传输系数等于子系统传输系数之和。**

回顾(1－1)，图1—2，图1—3，不难看出分工协作的投入产出系统正是既有串联耦合又有并联耦合的系统。(1—1)中的多项求和正显含并联耦合。对于此式我们还可以进行无穷次迭代，例如将三式代入一式中的 $x_1, x_2, x_3$，则有

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
&= a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + a_{13}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\
&= a_{11}a_{11}x_1 + a_{11}a_{12}x_2 + a_{11}a_{13}x_3 \\
&\quad + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}a_{23}x_3 \\
&\quad + a_{13}a_{31}x_1 + a_{13}a_{32}x_2 + a_{13}a_{33}x_3 \\
&= (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32})x_2 + (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33})x_3
\end{aligned}
$$

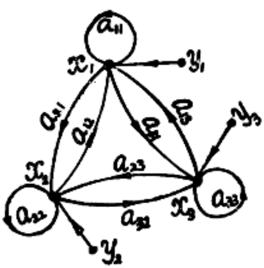


图　1—6

从以上推导的结果不难看出系数乘积反映了串联耦合，系数求和反映了并联耦合。在图1—2和图1—3中我们不断重复子系统相互之间的投入产出关系，很容易对照上式理解这种既有串联耦合又有并联耦合的特点。

图1—4和图1—5中的耦合叫做**开环耦合**。而图1—2，图1—3中 $A$ 之输出 $x_1$，通过**反馈传输系数** $a_{11}$ 变换成 $A$ 之输入 $x_{11} = a_{11}x_1$，这种**把输出变换成输入馈回系统的耦合叫反馈耦合，即闭环耦合。**

设我们有下列开放型投入产出系统，其拓扑图形如图1—6所示。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
x_2 &= y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad (1\text{—}7) \\
x_3 &= y_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned}
$$

上式可写成矩阵形式　　$X = Y + AX$　　(1—8)

其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

从(1—8)可解得

$$X=\frac{1}{I-A}Y=(I-A)^{-1}Y \tag{1—9}$$

相应于(1—8)和(1—9)之信号流图如图1—7所示。这就是反馈耦合，图中的系统将输出 $X$ 通过反馈传输系数 $A$ 变换成输入。而(1—9)就是反馈系统的基本公式。$(I-A)^{-1}$ 为**反馈因子**，它就是著名的列昂节夫逆阵。

(1—9)可展开成无穷级数

$$X=(I-A)^{-1}Y=(I+A+A^2+\cdots)Y$$

其中 $A^2=AA$，$A^3=AAA\cdots$，这些传输系数之乘积反映了串联耦合的特点，而无穷级数反映了反馈耦合的特点，它说明了闭环回路中输入输出的无穷次交互影响。将矩阵与矢量的乘积展开后，又可从求和式中看出并联耦合的特点。我国过去采用的计划平衡重复法就是用无穷级数的头一二项近似(1—9)。可见投入产出分析的重大意义在于它反映了分工协作的经济系统中串联耦合、并联耦合和反馈耦合的错综复杂网络关系。

图 1—7

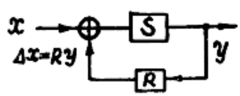


图 1—8

一般而言，设输入为 $x$，输出为 $y$，**被调节系统的传输系数**为 $S$，**反馈传输系数**为 $R$，则反馈输入

$$\Delta x=Ry \tag{1—11}$$

总输出 $y$ 为初始输入 $x$ 和反馈输入 $\Delta x$ 之和乘上传输系数 $S$：

$$y=S(x+\Delta x) \tag{1—12}$$

将(1—11)代入，则

$$y=Sx+SRy$$

$$y=\frac{S}{1-SR}x \tag{1—13}$$

这就是一般的反馈调节公式，反馈因子为 $\frac{1}{1-SR}$，而 $\frac{y}{x}=\frac{S}{1-SR}$ 为**调节系统之传输系数**，(1—13)就是经典控制论中的**传递函数**。

反馈耦合的另一个例子是凯恩斯乘数原理。设国民收入为 $Y$，消费为 $C$，投资为 $I$，则

$$Y=C+I \tag{1—14}$$

又设消费函数为

$$C=cY \tag{1—15}$$

其中 $c$ 为消费倾向，它满足 $0<c<1$，将上式代入(1—14)，则

$$Y=cY+I$$

$$Y=\frac{1}{1-c}I \tag{1—16}$$

$\frac{1}{1-c}$ 就是反馈因子，它就是著名的凯恩斯乘数。相应的方框图如图1—9。

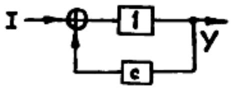
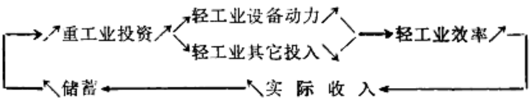



图 1—9

在经济分析中，我们常常假设系统内部结构为未知的“黑箱”，而只研究输出对输入的反应，通过这种研究来了解系统特性，是谓**“黑箱原理”**。宏观经济学中的总量分析就大量运用了这一原理。

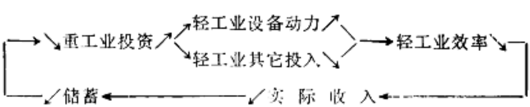
## §2 经济反馈

经济反馈分为**正反馈**和**负反馈**。若**系统输出与反馈输入符号相同，则为正反馈，若系统输出与反馈输入符号相反，则为负反馈**。我们用下列**动态图**描述反馈特性。

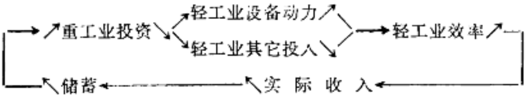



这个动态图描述了重工业投资效果很好时，轻工业与重工业之间的耦合。如果重工业投资增多，这一方面使轻工业设备、动力增多，另一方面由于资金有限，使轻工业的其它投入下降，投资效果很好，则前一种影响大于后一种影响，因此两个并联的总输出为正，使轻工业效率上升，人民实际收入增加，又使储蓄上升，反过来使重工业投资来源增多。这就是轻重工业之间的良性循环，它是经济起飞的原因之一。“良性循环”，“起飞”，这就是正反馈，即动态图中“重工业投资”两边的箭头方向相同。初始输入符号为正（动态图中箭头向上）的正反馈叫**正向正反馈**，若初始输入符号为负（动态图中箭头向下）的正反馈叫**负向正反馈**，负向正反馈就是恶性循环。

如果重工业投资效果不好，则有下列动态图：



也就说投资效果差时，重工业投资增加挤轻工业的坏影响大于使轻工业设备动力增加的好影响，于是使轻工业效率下降，实际收入下降，重工业投资来源也减少，因此动态图中“重工业投资”两边的箭头相反，即系统处于一种负反馈的停滞状态，重工业投资上去了又会掉下来。重工业投资减少时，又会形成如下动态图：




这个动态图与前一个动态图的差别是，所有箭头方向掉了头，其后果又会使重工业投资升上来，这就是左右摇摆的**振荡**，如果这种振荡是收敛的，则重工业投资停滞在一定水平上，不能实现良性循环和经济起飞。

在一般工程控制中正反馈是坏事，稳定性负反馈才是好事，而经济控制中，很多正向正反馈是人们所希望的，而某些停滞性负反馈却是人们企图避免的。另外经济系统中有大量非线性元件，可以将负反馈变成正反馈，或把正反馈变成负反馈，例如重工业投资效果就是这类参数，投资效果提高，就可以将负反馈变成正反馈。

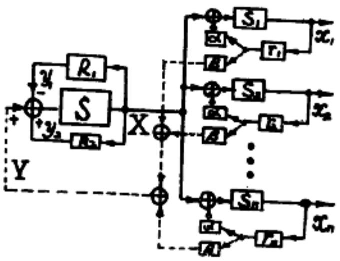


图 1—10

下面我们用方框图来描述正反馈与负反馈的差别。图 1—10 中的实线部分是没有专利制度时科技发明活动中，发明人与使用人之间的耦合。加上虚线部分后，就是在专利制度调节下科技发明活动中的耦合。图中的 $S$ 为从事科技发明的人将科技发明的总输入（收入与费用之代数和）变换成科技发明成果（输出）$X$ 之传输系数。在没有专利制度时，科技发明对于发明人的直接收益，即发明人使用这一成果的直接好处（例如发明电的人使用电得到的好处）一般来说是相对较小的，这一正反馈通过反馈传输系数 $R_2$ 将输出 $X$ 变换成正的反馈输入 $y_2$。科技发明往往要付出巨大代价，这种负反馈通过反馈传输系数 $R_1$ 将输出 $X$ 变换成负的输入 $-y_1$。科技发明传给他人后，创造的收益通过反馈传输系数 $\alpha r_i$（这时 $\alpha=1$）变成使用这种技术的各个单位之收益，，而没有反馈到发明人那里，因此发明人与使用人之间为开环回路。这时发明人的输入为 $-y_1$ 与 $y_2$ 之代数和，由于 $y_1\gg y_2$，所以 $-y_1+y_2<0$。也就是说在没有专利制度时，科技发明是种负反馈系统。若输出 $X>0$，则输入 $-y_1+y_2<0$； 若 $X<0$，则 $-y_1=-R_1X>0$，$y_2=R_2X<0$，$\therefore -y_1+y_2>0$。这种反馈振荡的结果，使输出 $X$ 保持在一定水平，这就表现为科技水平的停滞。如果实行专利制度，使用专利的人产生的收益为 $r_iy_i(i=1,\cdots,n)$，其中一部分由使用人得，其比例为 $\alpha(0<\alpha<1)$，另一部分由发明人得，其比例为 $\beta(\beta=1-\alpha)$。所以发明人得到的正收益就不仅有 $y_2$，还有

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\beta r_i x_i.$$

一般 $Y\gg y_1$，所以总输入 $Y-y_1+y_2>0$，系统为闭环的正反馈，输出 $X$ 与输入 $Y-y_1+y_2$ 符号相同。这种正反馈使科技能加速发展。发明人希望自己的成果尽量推广，因为掌握这种新技术的人越多，则发明人的收入也越多，收入越多，发明人更有资金和积极性创造发明，这种良性循环造成人材辈出，群星灿烂的局面。

## §3 稳定性

若经济系统有平衡状态，**当外界对系统的干扰使系统背离平衡状态时，系统是否能消除干扰恢复平衡**，这就是所谓**稳定性问题**。

我们通过市场反馈调节的**"蛛网定理"**来说明稳定性问题。

设市场对某种商品的需求函数为

$$x_t=a-bp_t,\qquad a,b>0, \tag{1—17}$$

其中 $p_t, y_t$ 分别为 $t$ 时刻之价格和需求量，又设 $t$ 时刻此种商品的供给量 $x'_t$ 是由 $t-1$ 时刻的价格决定，因为生产要对价格作出反应有一时间滞后，于是供给函数为

$$y'_t=\alpha+\beta p_{t-1},\qquad \alpha,\beta>0 \tag{1—18}$$

在供求均衡的情况下

$$x_t=x'_t, \tag{1—19}$$

这时价格也不再变动，即

$$p_t=p_{t-1}=\overline{p} \tag{1—20}$$

其中 $\overline{p}$ 表示均衡价格，联立(1—17)，(1—18)，(1—19)和(1—20)，则可解出均衡价格和均衡供求量分别为

$$\overline{p}=\frac{a-\alpha}{b+\beta}\qquad \overline{x}=\alpha+\beta\overline{p}=\frac{\alpha b+a\beta}{b+\beta} \tag{1—21}$$

其中 $\overline{x}$ 为均衡供求量。

如果市场机制使供求量在非均衡值上达到瞬态相等，即

$$x_t=a-bp_t=\alpha+\beta p_{t-1}=x'_t \tag{1—22}$$

而均衡供求量为

$$\overline{x}=a-b\overline{p}=\alpha+\beta\overline{p} \tag{1—23}$$

(1—22)与(1—23)之差为

$$\overline{x_t}-\overline{x}=-b(p_t-\overline{p})=\beta(p_{t-1}-\overline{p}) \tag{1—24}$$

令 $\hat{x}_t = x_t - \bar{x}$ 为 $t$ 时刻需求量与均衡供求量之偏差，且 $\hat{p}_t = p_t - \bar{p}$，$\hat{p}_{t-1} = p_{t-1} - \hat{p}$ 分别 $t$ 和 $t-1$ 时刻市场价格与均衡价格之偏差，代入(1—24)，我们有：

$$\hat{x}_t = -b\hat{p}_t = \beta\hat{p}_{t-1}, \qquad (1-25)$$

所以

$$\hat{p}_t = A\,\hat{p}_{t-1}$$

其中 $A = -\dfrac{\beta}{b}$，这是一个一阶齐次线性差分方程，设 $\hat{p}_0 = p_0 - \bar{p}$ 为初始时刻价格与均衡价格之差，则

$$\hat{p}_1 = A\,\hat{p}_0,$$

$$\hat{p}_2 = A\hat{p}_1 = A(A\hat{p}_0) = A^2\hat{p}_0$$

……

$$\hat{p}_t = A\,\hat{p}_{t-1} = A^2\hat{p}_{t-2} = \cdots = A^t\hat{p}_0 \qquad (1-27)$$

上式给出了线性蛛网模型之通解，求解的迭代过程可表为图 1—11 中的蛛网图和时间序列图，由于 $b>0$，$\beta>0$，所以 $A = -\dfrac{\beta}{b} < 0$，当 $t$ 不断从偶数变为奇数，又从奇数变为偶数

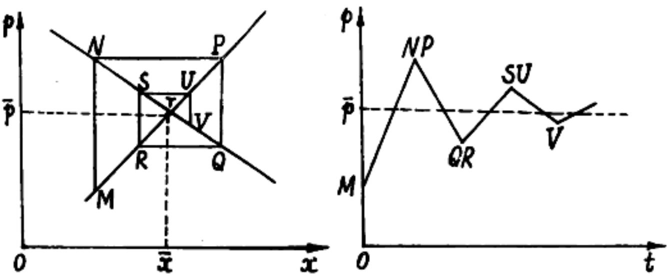



图 1—11

时，，$A^t$ 就不断从正数变为负数，又从负数变为正数，因而 $\hat{p}_t$ 一会儿为正，一会儿为负，即 $p_t$ 一会儿高于 $\bar{p}$ 一会儿低于 $\bar{p}$。所以实际价格在均衡价格上下振荡。当价格处于图中 $M$ 点时，实际价格低于均衡价格 $\bar{p}$，实际供给量也低于均衡供求量 $\bar{x}$，而实际需求却大于 $\bar{x}$，所以供不应求，迫使价格从 $M$ 点上升至 $N$ 点，在此点，价格高于均衡价格 $\bar{p}$，需求量低于 $\bar{x}$，供给量由 $P$ 点确定，它高于 $\bar{x}$，所以供过于求，这又使价格从 $P$ 点下跌到 $Q$ 点，

这时价格低于均衡价格 $\overline{p}$，需求量大于 $\overline{x}$，供给量由 $R$ 确定，它小于 $\overline{x}$，所以出现供不应求，又使价格上升到 $S$ 点，如此循环下去。图中右部为这一振荡的时间轨迹，如果 $\beta<b$，则 $|A|=\left|-\frac{\beta}{b}\right|<1$，当 $t\to\infty$ 时，$|A^t|=\left|\left(-\frac{\beta}{b}\right)^t\right|\to 0$，因而 $\widehat{p_t}=A^t\,\widehat{p_0}\to 0$，即 $p_t\to\overline{p}$。这种市场调节的负反馈时程是种减幅振荡，它最终使价格稳定在均衡价格上，因而供求量也趋于均衡。不管干扰使初始价格处于何种状态，例如干扰使初始价格不是在$M$点，而是在$K$点或其它点，系统还是能通过减幅振荡的负反馈调节恢复均衡状态，因此这种市场反馈调节系统是稳定的。我们可以用猪肉的市场价格说明这种系统的特点，猪肉的当前价格直接决定了需求量，但猪的繁殖育肥有一个时间滞后（例如一年），猪肉价格变化会引起下一阶段猪肉供给量变化，如果初始时刻猪肉价格太低，造成供不应求，以后价格又提得过高，出现供过于求，这时出现正式或变相降价，于是人们杀母猪，减少小猪繁育，但由于供给有时滞，已生产的猪肉仍很多，使市场供过于求的现象不能马上消失，于是猪肉继续变相降价，例如收购时压级压价，拒不收购，使养猪实际收入下降，这都使猪肉实际价格低于均衡价格，因而使母猪和小猪数量低于均衡量，下一年又造成猪肉供不应求，不过这种振荡一般是收敛的，$|A|$越小，收敛过程越快。

如果 $|A|=\left|-\frac{\beta}{b}\right|>1$，则当 $t\to\infty$时，$|A^t|=\left|\left(-\frac{\beta}{b}\right)^t\right|\to\infty$ 相应的蛛网图和时间序列图如图 1—12 所示。从图中可看出这是种增幅振荡的负反馈，一旦有干扰使系统脱离均衡状态，则这种反馈不能使系统回复到均衡状态，所以这种系统是不稳定的。

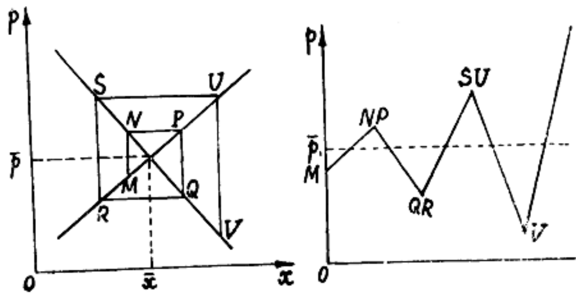



图 1—12

如果 $|A|=\left|-\frac{\beta}{b}\right|=1$，则当 $t\to\infty$时，恒有 $|A^t|=\left|\left(-\frac{\beta}{b}\right)^t\right|=1$，所以当 $t$ 为奇数时，$\widehat{p_t}=-\widehat{p_0}$，当 $t$ 为偶数时 $\widehat{p_t}=\widehat{p_0}$，相应的蛛网图和时间序列图如图 1—13 所示，这种系统在外界干扰下没有能力恢复供求均衡，但是它在不产生新的干扰时总是保持等幅振荡。

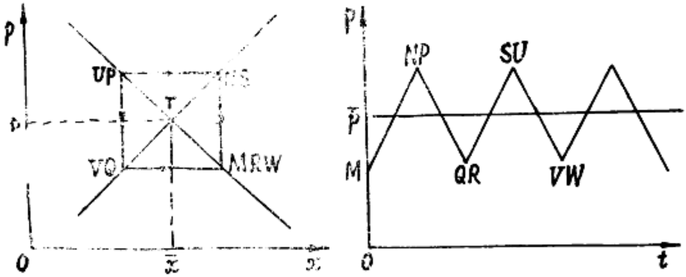



图　1—13

以上三种情况中，由于 $A<0$，所以对于系统 $\widehat{p_t}=A\widehat{p_{t-1}}$ 来说，输入 $\widehat{p_{t-1}}$ 与输出 $\widehat{p_t}$ 符号总是相反，因此是种负反馈调节。如果 $A>0$，则 $\widehat{p_t}$ 与 $\widehat{p_{t-1}}$ 符号相同，则系统是正反馈调节。

$A>0$ 意味着 $-\dfrac{\beta}{b}>0$，则 $\beta$ 与 $b$ 的符号相反，因此以前关于 $b>0$，$\beta>0$ 的假定不再都成立。若 $b<0$，$\beta<0$，则意味着商品价格 $p$ 越高，需求量 $x=a-bp$ 越大；若 $\beta>0$，$b>0$，则意味着价格 $p$ 越高，供给量 $x'=\alpha+\beta p$ 反而越少，这两种情况对于正常商品来说不会出现。不过对于某些特殊商品，也可能出现两种情形中的一种。

$A>0$ 的正反馈与负反馈类似，也分为三种类型。

当 $A=-\dfrac{\beta}{b}<1$，则正反馈如图 1—14 所示，这是种**收敛的正反馈**，这种正反馈总是使系统趋于均衡状态，因而它是稳定的。

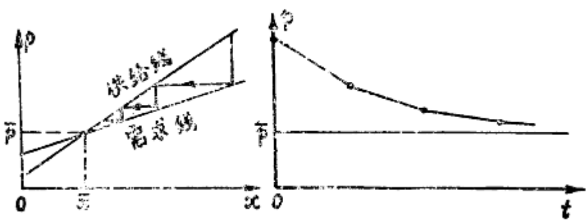



图　1—14

若 $A=-\dfrac{\beta}{b}>1$，则正反馈如图 1—15 所示，这是种**发散正的反馈**，这种正反馈系统在

于扰下只会使实际格价格和供求量与均衡价格和均衡供求量之差距越来越大，因此系统是不稳定的。

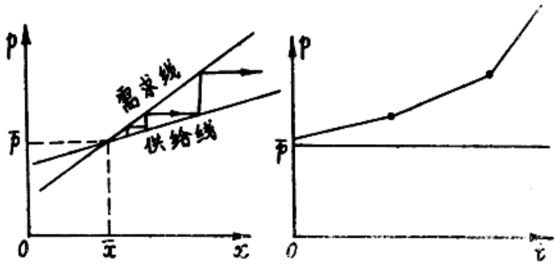



图 1—15

若 $A=-\frac{\beta}{b}=1$，则正反馈如图 1—16 所示， 这时可能 供给函数与需求函数 互相平行（如图左），这类系统根本没有均衡点；也可能供给函数和需求函数完全重合（如图右），这是种随处平衡系统，这两种情况一般都不可能出现。

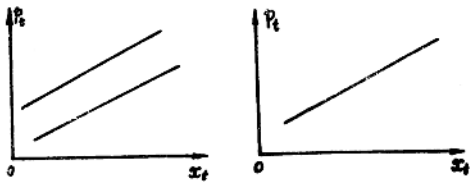



图 1—16

对于上述线性需求函数和线性供给函数的市场反馈调节我们可作如下总结：

**$A$ 之符号决定了反馈是正反馈还是负反馈，当 $A<0$ 时，系统为负反馈，当 $A>0$ 时，系统为正反馈；**

**$A$ 之绝对值小于 1 还是大于 1 决定了反馈是收敛的还是发散的。若 $|A|<1$，则反馈是收敛的，系统具有稳定性，若 $|A|>1$，则反馈是发散的，系统不具备稳定性。若 $|A|=1$，则系统或为等幅振荡（当 $A<0$ 时）或为随处平衡或无均衡点（当 $A>0$ 时）。**

### §4 状态空间描述

以兰格为代表的经典经济控制论主要是采用传递函数分析法，而现代经济控制论主要采用的是状态空间方法。

一个经济控制过程通常由**控制器**和**被控过程组成**，而被被过程包括**执行机构、被控系统**和**量测机构**，如图 1—17 所示。其中系统输入相当于经济计量学中的政策变量、工具变量或可控外生变量，系统干扰相当于不可控外生变量，而状态变量和输出变量相当于内生变量。

经济系统的**状态**是完整地描述系统之时域行为的最小一组变量， 如果给定 $t=t_0$ 时刻此组变量的值和 $t\geqslant t_0$ 时输入的时间函数，那么系统在 $t\geqslant t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了。

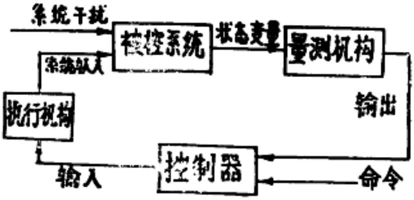



图 1—17

这一组变量称为**状态变量**，多个状态变量组成的矢量，叫**状态矢量**，设这一状态矢量为

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (1-30)$$

当 $t_0\leqslant t<\infty$，$\boldsymbol{x}(t)$ 由 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 和 $t\geqslant t_0$ 时的输入函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 唯一地确定， 而与 $t_0$ 前时刻的 状态和输入无关。

以 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 为坐标构成的欧氏空间称为**状态空间**， 状态空间中的 每一点都代表了状态变量的唯一和特定的一组值，即系统的一个状态。 若给定 $t_0$ 瞬时系统的状态及 $t\geqslant t$ 时的输入，则 $t\geqslant t_0$ 各瞬时系统的状态，就构成状态空间中的一条轨线，

状态空间描述不但便于计算，而且在处理非线性系统时比传递函数或频率特性更具优越性。 一个 $n$ 阶系统， 有且仅有 $n$ 个状态变量 可以 选择， 但状态变量组的 选择 不是 唯一的。

经济系统之动态特性一般可表为 $n$ 个一阶常微分方程构成的方程组：

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, \cdots, x_n;\ u, \cdots, u_r;\ t),\ i=1, \cdots, n \qquad (1-31)$$

而经济系统之输出特性，可表为

$$y_j=g_j(x_1, \cdots, x_n;\ u_1, \cdots, u_r;\ t) \quad j=1, \cdots, m \qquad (1-32)$$

上两式可简记为矢量形式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \qquad (1-31')$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{1—32'}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{1—33}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n;\ u_1, \cdots, u_r;\ t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n;\ u_1, \cdots, u_r;\ t) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{pmatrix} g_1(x_1 \cdots, x_n;\ u_1, \cdots, u_r;\ t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, \cdots, x_n;\ u_1, \cdots u_r;\ t) \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1—34}$$

(1—31′)叫系统之**状态方程**，而(1—32′)叫系统之**输出方程**，这两个 方程构成了系统在状态空间的描述，若 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ 为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$ 的非线性函数， 则这类经济系统叫**非线性系统**， 若被控过程是线性的，则叫**线性系统**，其状态方程和输出方程可表为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1—35}$$

其中

$$A(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) \cdots a_{1n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}(t) \cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix}, \qquad B(t) = \begin{vmatrix} b_{11}(t) \cdots b_{1r}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_{n1}(t) \cdots b_{nr}(t) \end{vmatrix}$$

$$C(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) \cdots c_{1n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_{m1}(t) \cdots c_{mn}(t) \end{vmatrix}, \qquad D(t) = \begin{vmatrix} d_{11}(t) \cdots d_{1r}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ d_{m1}(t) \cdots d_{mr}(t) \end{vmatrix}$$

上述非线性和线性系统中 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ 或 $A, B, C, D$ 的元素显含时间因素 $t$，这种系统叫做**时变系统**或**非定常系统**，而 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$，或 $A, B, C, D$ 中不显含时间因素 $t$ 的系统叫 时不变或定常系统，其状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{1—36}$$

或

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1—37}$$

连续型经济系统之时域模型，可用单变量高阶微分方程表为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{1—39}$$

则我们可以通过适当的变换，将其写成线性时不变状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1—39}$$

若(1—38)中等式右边没有 $u$ 之导数项，则时域模型变为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu \tag{1—40}$$

我们按照下列步骤进行变换：

(1)选择状态变量，由于 $n$ 阶系统有 $n$ 个状态变量，若给定 $y(0), \dot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ 和 $t \geqslant 0$ 的输入 $u(t)$ 时，系统在 $t \geqslant 0$ 时的运动就完全确定了，因此可取 $y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ 为系统的一组状态变量，且令

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \cdots\cdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \tag{1—41}$$

(2)利用以上定义，我们可将(1—40)中的所有高阶导数化为新引入变量的一阶导数，因而可以将高阶系统变换成一阶系统。从(1—40)和(1—41)可导出

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1}\dot{y} - a_n y + bu \\ \quad = -a_1 x_n - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu \end{cases} \tag{1—42}$$

而系统之输出方程式为

$$y = x_1 \tag{1—43}$$

(3)令

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = [u], \quad y = [y], \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = [1 \ 0 \cdots 0]$$