普通高等教育"十二五"规划教材
公共基础课程教材系列

高等数学

下册

◎ 主编：曹南斌 段生贵 彭建平

电子科技大学出版社

高等数学

（下册）

主　编　曹南斌　段生贵　彭建平

本书编写组（按姓氏笔画为序）：

弓小影　田雪玲　刘晓姗

李文汉　辛玉东　宋建民

陈金萍　陈敏江

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册 / 曹南斌，段生贵，彭建平主编．
—成都：电子科技大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5647-1852-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①曹… ②段… ③彭… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 204060 号

高等数学（下册）

主编　曹南斌　段生贵　彭建平

出版发行： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦
邮编：610051）
策划编辑： 曾　艺
责任编辑： 袁　野
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 三河市文阁印刷厂
成品尺寸： 170mm×230mm　印张 18.5　字数 349 千字
版　　次： 2013 年 9 月第 1 版
印　　次： 2013 年 9 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5647-1852-7
定　　价： 37.00 元

前　言

高等数学(微积分)是高等院校经管类专业的一门理论基础课程,它处于基础阶段,起着奠基的作用,对培养学生的逻辑思维能力、计算能力和分析判断能力有着极为重要的作用。特别是使经管类学生初步掌握一些基本的数量经济分析方法,对学生后续课程的深入学习具有重大意义。

根据当前高等学校经管类专业学生的人才培养方案和所开设的"高等数学"或"微积分"等课程的实际情况,为了适应国家的教育教学改革,符合高等学校本科层次的教学要求,更好地培养经济、管理等应用型人才,提高学生的实际工作能力与综合素质,以保证理论基础、注重应用、彰显特色为基本原则,我们根据教育部颁布的《高等学校财经类专业核心课程"经济数学基础——微积分"教学大纲》和数学与统计学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》,同时参考近年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有关高等数学部分的规定,结合多年从事高等数学教学工作的经验编写了这部教材。本教材在保证知识的科学性、系统性和严密性的基础上,具有如下特点。

1. 注重基础,兼顾深入。在编写上本书注重基本概念、基本理论和基本技巧的介绍,同时在课后题中加入了部分难度较高的考研题目以满足层次较高的学生,在叙述上力求简洁,坚持直观理解与严密性的结合,深入浅出,在引入概念时,尽可能从实际问题出发,便于学生接受。

2. 将数学建模的思想渗透到课程的体系中。本书内容上尤其重视高等数学在经济管理中的应用,同时,在例题和习题的选配上,重视培养学生的数学意识和应用数学的能力,特别是在内容上穿插了数学模型的相关题目,力求把数学建模的思想渗透到学生的学习过程中。

3. 习题配备层次分明。本书中配备了较多的例题和习题,习题分为(A)、

(B)两组,(A)组是反映课程基本要求的题目,(B)组题中选编了部分难度较大的综合性题目,以适应教师教学和学生准备研究生入学考试的需要。

本书分为上、下两册出版,主要内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数、微分方程等。参与本书编写工作的有弓小影、田雪玲、刘晓姗、李文汉、辛玉东、宋建民、陈金萍、陈敏江、段生贵、曹南斌、彭建平。全书的统稿和审校工作由段生贵、曹南斌、彭建平完成。

由于编者水平有限,本书难免有错误和不妥之处,恳请各位专家、读者批评指正。

编　者
2013 年 8 月

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 17 世纪上半叶,法国数学家笛卡尔和费马对此做出了开创性的工作. 我们知道,代数学的优越性在于推理方法的程序化,鉴于这种优越性,人们产生了用代数方法研究几何问题的思想,这就是解析几何的基本思想. 要用代数方法研究几何问题,就必须弄清代数与几何的联系,而代数和几何中最基本的概念分别是数和点. 于是,首先要找到一种特定的数学结构来建立数与点的联系,这种结构就是坐标系. 通过坐标系,建立起数与点的对应关系,就可以把数学研究的两个基本对象——数和形结合起来、统一起来,使得人们既可以用代数方法来解决几何问题(这是解析几何的基本内容),也可以用几何方法来解决代数问题.

本章中我们先介绍向量的概念及向量的某些运算,然后再介绍空间解析几何,其主要内容包括平面和直线方程,一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题. 这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的,正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样. 本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用. 在实际生活当中,本章的内容同样也有广泛的应用. 比如说,夏季人们钟爱的一种运动就是游泳,如何选取适合自己体重的游泳圈来确保人身安全呢? 根据物理学原理,该问题可转化为求浮力,进而可转化为求解游泳圈体积的问题. 首先,我们需要确定游泳圈的方程,显然,它的截面是一个圆,利用该圆绕定轴旋转一周便得到相应的图形. 那么我们如何根据已知圆方程得到旋转体的方程呢? 带着这个问题,我们开始本章的学习与研究.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

1. 向量

既有大小，又有方向的量称之为向量. 数学上用一条有方向的线段(即有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.

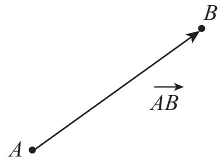

图 7-1

如图 7-1 所示，以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$. 有时也用上面加有箭头的字母或黑体字母表示向量，如向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等等.

2. 自由向量

实际问题中，有些向量与起点有关，而有些向量与起点无关，但一切向量的共性是：它们都有大小和方向. 因此，在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量，简称向量.

当遇到与起点有关的向量时(例如质点运动的速度)，在一般原则下可依向量相等的概念作特殊处理.

3. 向量相等

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等，并记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

显然，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则经过平行移动之后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 能完全重合在一起. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点，向一点 M 引向量，这个向量$\overrightarrow{OM}$称作点 M 对于原点 O 的向径，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

4. 向量的相关概念

向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$与$|\boldsymbol{a}|$. 特别地，模等于 1 的向量称作单位向量. 模等于 0 的向量称作零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，并规定零向量的方向为任意的.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

据力学实验的结果，两个力的合力可根据平行四边形法则求出，我们对向量加法运算规定如下：

(1)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$为邻边作一平行四边形 $ABCD$，取对角线向量$\overrightarrow{AC}$，记$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$，称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 7-2).

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量之和的方法称作向量加法的平行四边形法则.

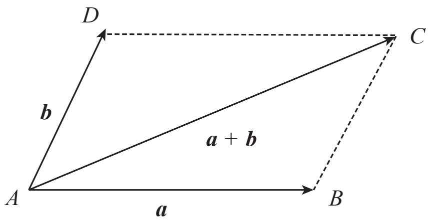

图 7-2

(2)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线

规定它们的和是这样一个向量：

若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$的指向相同，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量的模之和.

若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$的指向相反，和向量的模等于两向量的模之差，其方向与模值较大的向量方向一致.

由于平行四边形的对边平行且相等，可以这样来作出两向量的和向量：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{AB}$的终点 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$. 该方法称作向量加法的三角形法则(如图 7-3).

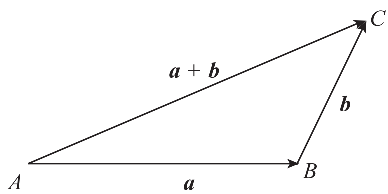

图 7-3

说明 向量加法的三角形法则的实质是：将两向量首尾相接，则以第一个向量的起点为起点，以第二个向量的终点为终点的向量就是两向量的和向量.

根据向量加法的定义，可以证明向量加法具有下列运算规律：

①交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

②结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(如图 7-4).

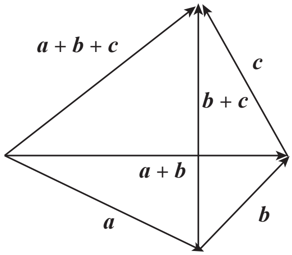

图 7-4

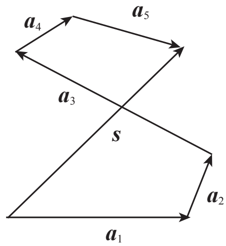

图 7-5

按向量加法的三角形法则，可得向量的加法法则：以前一个向量的终点为下一向量的起点，相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 那么，以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量 $\boldsymbol{s}$，向量 $\boldsymbol{s}$ 即为这 n 个向量的和(图 7-5 以$n=5$ 为例).

与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$. 我们规定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由三角形法则可看出：$\boldsymbol{b}$ 减去 $\boldsymbol{a}$，只需把与 $\boldsymbol{a}$ 长度相同而方向相反的向量$-\boldsymbol{a}$加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上去. 由平行四边形法则，可作出向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(如图 7-6).

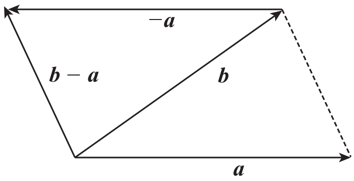

图 7-6

2. 向量与数的乘法

设 λ 是一个实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量.

(1)当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，其模等于$|\boldsymbol{a}|$的 λ 倍；

(2)当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(3)当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，其模等于$|\boldsymbol{a}|$的$|\lambda|$倍；

特别地，我们有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

根据向量与数乘积的定义，可知数乘向量运算符合下列运算规律：

(1)结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$

这是因为，显然向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向一致，且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\mu(\lambda\boldsymbol{a})| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu||\boldsymbol{a}|$$

(2)分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 由于 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 同方向，从而 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 亦同方向，而且 $||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a| = |\boldsymbol{a}|$，所以 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

我们规定，若 $\lambda \neq 0$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$，于是 $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

这表明，一个非零向量除以它的模是一个与原向量同方向的单位向量.

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)\\ =&(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}\\ =&-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

根据向量性质，我们可以得到如下结论：

定理 1　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行 $\Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.（证明略）

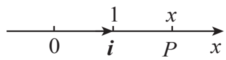

图 7-7

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点，一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，只需给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，对于轴上的任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}$ 与向量 $\boldsymbol{i}$ 平行，根据定理 1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫做轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是点 $P \longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow$ 实数 x，从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应关系. 由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件为 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$.

三、空间直角坐标系

平面直角坐标系使我们建立了平面上的点与一对有序数组之间的一一对应关系,架起了平面图形与数之间沟通的桥梁.为了进行空间图形与数之间关系的研究,我们用类似于平面解析几何的方法,通过引进空间直角坐标系来实现.

1.空间直角坐标系的建立

过空间一定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点.这样的三条具有相同的原点且互相垂直的数轴,就构成了一个空间直角坐标系.这三条数轴分别叫 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),且统称为坐标轴(如图 7-8).

当我们把 x 轴与 y 轴放置在水平面上时,则 z 轴垂直于水平面.若规定它们的正方向符合右手规则,即:右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.则这样规定的空间直角坐标系称为右手系,O 点叫做坐标原点(如图 7-9).

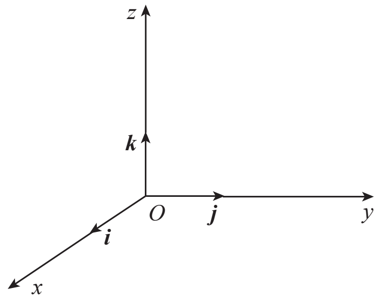

图 7-8

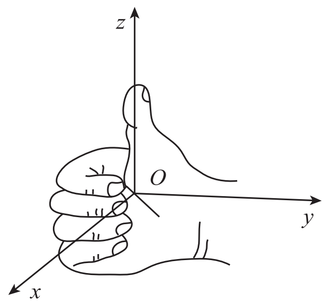

图 7-9

说明 为使空间直角坐标系画得更富于立体感,通常把 x 轴与 y 轴间的夹角画成 $135°$.当然,它们的实际夹角还是 $90°$.

2.坐标面、卦限

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面.由 x 轴与 y 轴所决定的坐标面称为 xOy 面,另外还有 yOz 面与 zOx 面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限.分别称第一卦限,…,第八卦限.

这八个卦限分别用字母Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示(如图 7-10).

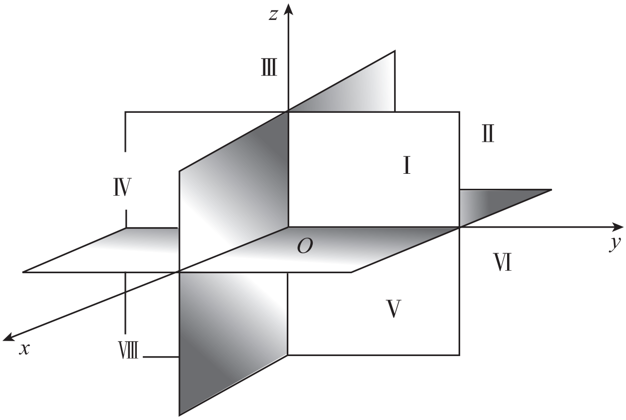

图 7-10

3. 空间点的直角坐标

确定空间直角坐标系之后，我们就可以建立起空间点与有序数组之间的对应关系. 如图 7-11 所示，设 M 为空间的一已知点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P，Q，R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x，y，z，于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z)，称为点 M 的坐标. 依次称 x，y，z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

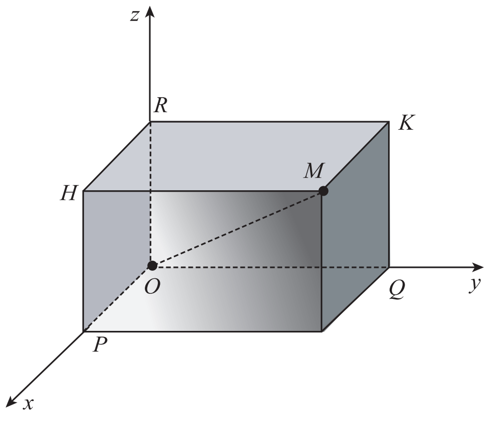

图 7-11

反之，若已知一有序数组(x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后过 P，Q，R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面的交点 M 就是以有序数组(x,y,z)

为坐标的空间点.

这样，通过空间直角坐标系，建立了空间点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

说明 空间点的位置可以由空间直角坐标系中的三个坐标唯一确定，因此，常称我们生活的空间为三度空间或三维空间.

4. 向量的坐标

记 x 轴的单位向量为 $\boldsymbol{i}$，y 轴的单位向量为 $\boldsymbol{j}$，z 轴的单位向量为 $\boldsymbol{k}$. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应向径为 $\overrightarrow{OM}$，M 的坐标为 (x,y,z)，由

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

得
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴方向的分向量. 显然，空间中的点 M、向量 $\boldsymbol{r}$、三个有序数 x、y、z 之间有着一一对应的关系(如图7-12). 即

$$M\longleftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z),$$

因此可定义有序数 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，也记为 (x,y,z)，即 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

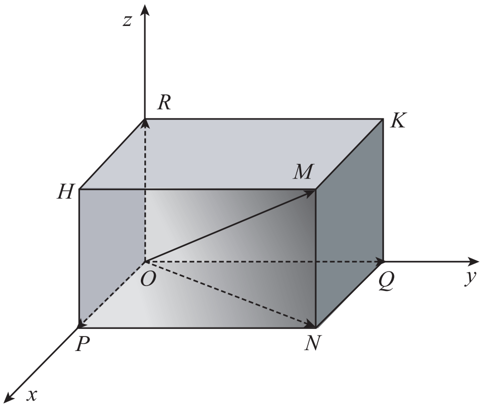

图 7-12

说明 若向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标为 (x,y,z)，则记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；若点 M 的坐标为 (x,y,z)，则记 M 为 $M(x,y,z)$.

四、利用坐标作向量的线性运算

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$