数理方法题解

——习题集

毕复志　张令孔　于万征编

上

辽宁师范学院

前　　言

考虑教学的需要，我们将梁昆淼先生编著的《数学物理方法》（第二版）一书内的全部习题作了解答，并选编了相当数量的习题，以作为同学练习之用。每章都扼要地作了理论和方法上的介绍以备查考。我们将工程数学的《数学物理方程与特殊函数》一书的全部习题的略解编于下册，供同学们在学习中参考。

本书上册为第一篇复变函数论和第二篇傅里叶级数和积分的题解和习题，下册为第三篇数学物理方程的题解和习题。

本书在编辑中得到了院系领导及有关同志的大力支持，河北师范大学和辽宁师范学院两院校的物理系、数学系的同志给予了许多帮助，在此谨向他们表示感谢。

限于水平，错误难免，望予批评指正。

编　　者

一九八〇年六月

目　　录

第一篇　复　变　函　数　论

第一章　复变函数

一、复数与复数运算

1. 复数 $z=x+iy$ ——代数式($R_e z=x$, $I_m z=y$),

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$——三角式,

$z=\rho e^{i\varphi}$——指数式。

模 $|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 辐角 $\arg z=\varphi+2\pi n$

$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

复数 z 的共轭复数 z^*:

$$z^*=x-iy=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi}.$$

直角坐标与极坐标的代换关系:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases},\quad \begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\operatorname{arc}\,tg\dfrac{y}{x}\end{cases}.$$

2. 复数运算

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$$

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\\&=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\\&=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad ;$$

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho^n e^{in\varphi} \quad ;$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\varphi/n} \ .$$

二、复变函数

欧拉公式 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

指数函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，有虚 $2\pi i$ 周期；

三角函数 $\left.\begin{aligned}\sin z&=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\\ \cos z&=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\end{aligned}\right\}$有实$2\pi$周期；

双曲线函数 $\left.\begin{aligned}\mathrm{sh}z&=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})\\ \mathrm{ch}z&=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})\end{aligned}\right\}$有$2\pi i$周期；

对数函数 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$.

三、解析函数

1. 导数的定义：设$f(z)$是在区域G中定义的单值函数，如果在G内的某点z，极限存在且与$\Delta z\to0$方式无关，即

$$\frac{df}{dz}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \quad ,$$

则称$f(z)$在点z是可导的。

2. 解析函数定义： 在某区域上处处可导的复变函数叫作该区域上的解析函数。函数在某点及其邻域内是可导的，称为在该点是解析的。

3. 科西——里曼方程

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 G 内为解析的必要条件是 u 和 v 满足科西——里曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} .$$

科西——里曼方程的极坐标表示为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho} .$$

4. 调和函数

在区域 G 中连续并有连续的一、二阶偏导数的实变函数 $u(x,y)$，如果满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 ,$$

则称为（二维）调和函数。

解析函数的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都满足二维的拉普拉斯方程，都是调和函数。只要对科西——里曼方程求导就可以证明。

解析函数的实部和虚部只要知道其一，根据科西——里曼方程就能求出另一个。或者说由任一个调和函数可以构造出一个解析函数。

解析函数在平面场问题中有着重要的应用。

§1. 复数与复数运算

【题一】 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

(1) $|z|\leqslant 2$;

［解］ 是以 0 为园心 2 为半径的闭园内各点。

(2)　$|z-a|=|z-b|$ （a,b 为复常数）；

［解］　等式左、右各表示平面上点到定点 a 、b 的距离，故此等式为到两定点等距离的轨迹，即联接 a 、 b 两点垂直平分线上各点。

(3)　$R_e z>\frac{1}{2}$ ；

［解］　设 $z=x+iy$，$R_e z=x>\dfrac{1}{2}$，为$x>\dfrac{1}{2}$的右半平面。

(4)　$|z|+R_e z\leqslant 1$ ；

［解］　设 $z=x+iy$，$\sqrt{x^2+y^2}+x\leqslant 1$，

即　$y^2\leqslant 1-2x=-2(x-\frac{1}{2})$。图形为抛物线及其内部（图 1-1 ）。

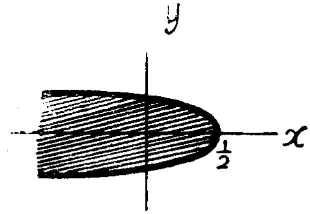


图1－1

(5)　$\alpha<\arg z<\beta$,

$a<R_e z<b$ （α,β,a和 b 为实常数）；

［解］ $z=\rho e^{i\varphi}$，$\alpha<\varphi<\beta$；

$R_e z=x$，$a<x<b$.

即为两射线 $\varphi_1=\alpha$，$\varphi_2=\beta$和两直线 $x_1=a$，$x_2=b$ 所围的图形（图1-2 ），不包含边界。

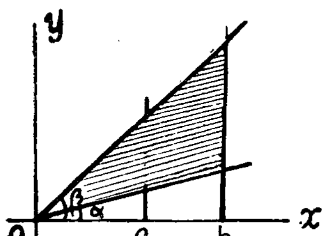


图1－2

(6)　$0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$ ；

［解］　$\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$

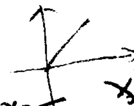
$z=x+yi$

$=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$,

而 $\arg\dfrac{z-i}{z+i}=\varphi=\operatorname{arc}tg\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}$,

从而 $0<\operatorname{arc}tg\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<\dfrac{\pi}{4}$,

即 $0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$,



$x^2+(y+1)^2>0$

于是 $\begin{cases}0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1} \\ \dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1\end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases}x<0 \\ (x+1)^2+y^2>2\end{cases}$. $\underline{-2x>0}$ $\Leftarrow$

此乃表示在园 $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ 外且以 y 轴为上界的左开平面（图1-3）。

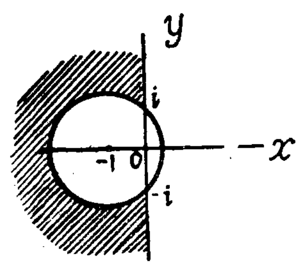


图1－3

(7) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$;

［解］ 设 $z=x+iy$,

$|z-1|\leqslant|z+1|$, 则有

$|(x-1)+iy|\leqq|(x+1)+iy|$, 即

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\leqq\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, 整理可得 $x\geqslant 0$.

此乃表示以 y 轴为下界的右半闭平面。

(8) $R_e\left(\dfrac{1}{z}\right)=2$;

［解］ 设 $z=x+iy$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.

$R_e\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}=2$, $x^2+y^2=\dfrac{x}{2}$,

此为园 $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ 上诸点。

(9) $R_e z^2 = a^2$（a 是实常数）；

［解］ 设 $z = x + iy$，$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$，

$\therefore$ $R_e z^2 = x^2 - y^2 = a^2$， 此乃双曲线$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{a^2} = 1$上诸点。

当 $a = 0$ 时，是两条直线 $x = y$ 和 $x = -y$。

(10) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$；

［解］ 设 $z_1 = x_1 + iy_1$，

$z_2 = x_2 + iy_2$，

$$|z_1 + z_2|^2 = |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)|^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$
$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2),$$

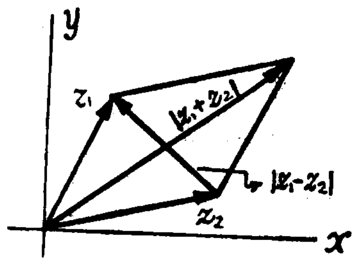


图1－4

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2).$$

$\therefore |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。此乃表示平行四边形对角线的平方和等于相邻两边平方和的二倍（图1-4）。

【题二】 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i；

［解］ $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$，$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$。

(2) -1；

〔解〕 $-1=\cos\pi+i\sin\pi$， $-1=e^{i\pi}$.

(3) $1+i\sqrt{3}$；

〔解〕 $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(4) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$（α 是实常数）；

〔解〕 $\because \rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$，

$$\varphi=\operatorname{arc}\,tg\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{arc}\,tg\left(ctg\frac{\alpha}{2}\right),$$

而 $tg\varphi=ctg\frac{\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$，则有 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

$\therefore\ z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i(\pi/2-\alpha/2)}$.

另解：$z=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\,\pi/2-\alpha/2}$$.

(5) z^3；

〔解〕 设 $z=x+iy$，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\arg z=\frac{y}{x}$.

$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$，

$\therefore z^3=(\rho e^{i\varphi})^3=\rho^3e^{i3}$，又 $z^3=\rho^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$.

(6) e^{1+i}；

〔解〕 $e^{1+i}=e\cdot e^{i}=e(\cos1+i\sin1)$.

(7) $\dfrac{1-i}{1+i}$ ；

［解］ $z=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{\pi}{2}$。

或者 $z=-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}=e^{i3\pi/2}$ 。

【题三】 计算下列数值（a、b 和 φ 为实常数）。

(1) $\sqrt{a+ib}$；

［解］ 设 $z=a+ib=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$。

cosφ

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\underline{\sin\varphi}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ （图 1-5）。

$$w=z^{\frac{1}{2}}=|z|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi+2\kappa\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\kappa\pi}{2}\right),$$

$$w_1=\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

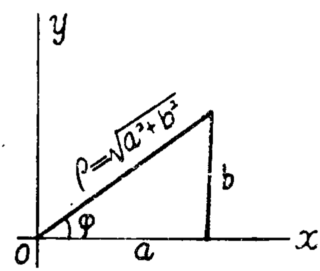


图1－5

$$w_2=\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}\cdot\left[\cos\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$=-\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

而 $\sin\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{2}}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}-a}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}}$，

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}+a}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}}.$$

$$\therefore\ w_{1,2}=\pm\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}}}$$
$$\cdot\left(\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}+a}+i\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}-a}\right)$$
$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}+a}+i\sqrt{(a^2+b^2)^{1/2}-a}\right).$$

√另解：设$\sqrt{a+ib}=x+iy$，则有

$a+ib=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$，比较系数

$\begin{cases}a=x^2-y^2\\ b=2xy\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{b}{2y}$，由此有$y^4+ay^2-\dfrac{b^2}{4}=0\Rightarrow$

$y^2=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，取正根，于是

$$y=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}},\quad x=\frac{b}{2y}=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\sqrt{a+ib}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).$$

(2) $\sqrt[3]{i}$；

［解］ $\sqrt[3]{i}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{(1+4k)\pi}{6}+i\sin\frac{(1+4k)\pi}{6}\ (k=0,1,2),$$

$k=0$，$\sqrt[3]{i}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

$k=1$，$\sqrt[3]{i}=\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

$k=2$， $\sqrt[3]{i}=\cos\frac{9}{6}\pi+i\sin\frac{9}{6}\pi=-i$.

$\therefore\sqrt[3]{i}$有三个值：$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$， $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$， $-i$.

(3) i^i；

［解］ $i^i=\left[e^{i\pi/2+2k\pi i}\right]^i=e^{i^2(\pi/2+2k\pi)}=e^{-(\pi/2+2k\pi)}$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

$k=0$ 得其主值为 $e^{-\pi/2}$.

(4) $\sqrt[i]{i}$；

［解］ $\sqrt[i]{i}=e^{(i\pi/2+2k\pi i)/i}=e^{\pi/2+2k\pi}$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(5) $\cos5\varphi$；

(6) $\sin5\varphi$；

［解］ 应用棣美弗公式：

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

令 $n=5$，则有

$$\cos5\varphi+i\sin5\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5$$
$$=\cos^5\varphi+5\cos^4\varphi(i\sin\varphi)+10\cos^3\varphi(i\sin\varphi)^2$$
$$+10\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^3+5\cos\varphi(i\sin\varphi)^4+(i\sin\varphi)^5.$$

等式两边的实部与虚部对应相等，得

$$\cos5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$

(7) $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$；

(8) $\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$；

［解］ 令(7)$=a$，(8)$=b$，$W=a+ib$. 于是

$$W = a + ib = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots + $$
$$+ (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
$$= e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \cdots + e^{in\varphi} ,$$
$$We^{i\varphi} = e^{i2\varphi} + e^{i3\varphi} + \cdots + e^{i(n+1)\varphi},$$
$$We^{i\varphi} - W = e^{i(n+1)\varphi} - e^{i\varphi},$$
$$W = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i\varphi/2}[e^{i(n+1/2)\varphi} - e^{i\varphi/2}]}{e^{i\varphi/2}(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}$$
$$= \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}}{2\,i\sin\varphi/2} ,$$

即 $$a + ib = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\varphi/2} + i\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\varphi/2}.$$

等式两边的实部与虚部对应相等，得

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\varphi/2},$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\varphi/2}.$$

另解：(8) $\times i +$ (7)可得

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \cdots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,$$

应用等比级数求和公式可得出 n 项和，比较实部与虚部则有同样的结果。

§2. 复 变 函 数

【题一】 验证下列函数的周期性及等式。

[解] (1) $e^{z+2\pi i}=e^z$. 指数函数有纯虚周期$2\pi i$.

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+i(y+2\pi)}=e^x[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)]$$
$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^z.$$

(2) $\sin(z+2\pi)=\sin z$, $\cos(z+2\pi)=\cos z$. 三角函数有实周期2π。

$$\because e^{i(z+2\pi)}=e^{iz+2\pi i}=e^{iz},$$
$$e^{-i(z+2\pi)}=e^{-iz-2\pi i}=e^{-iz}.$$

$$\therefore \sin(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z,$$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

(3) $\mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z$. 双曲函数有纯虚周期 $2\pi i$.

$\because \mathrm{sh}z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, 由于指数函数有周期 $2\pi i$, 当 z 用 $(z+2\pi i)$ 代换，则上两式右端的值不变，即可验证。

[解] (4) 验证 $|\sin z|=\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2x-\cos^2x)}$.

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\frac{1}{2i}(e^{ix-y}-e^{-ix+y})$$
$$=\frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^y(\cos x-i\sin x)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{-y}\cos x-e^{y}\cos x+i(e^{-y}\sin x+e^{y}\sin x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\ (e^{-y}+e^{y})+\frac{i}{2}\cos x(e^{y}+e^{-y}),$$

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 x(e^{-y}+e^{y})^2+\cos^2 x(e^{y}-e^{-y})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2 x-\cos^2 x)}\ .$$

同理 $|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}$.

【题二】 计算下列数值（a 和 b 为实常数，x 为实变数）.

(1) $\sin(a+ib)$;

［解］ $\sin(a+ib)=\frac{1}{2i}\left[e^{i(a+ib)}-e^{-i(a+ib)}\right]$

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{ia}e^{-b}-e^{-ia}e^{b}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[(\cos a+i\sin a)e^{-b}-(\cos a-i\sin a)e^{b}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[(e^{-b}-e^{b})\cos a+i(e^{-b}+e^{b})\sin a\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})\sin a+\frac{i}{2}(e^{b}-e^{-b})\cos a\ .$$

(2) $\cos(a+ib)$;

［解］ 同上题作法。∵ $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$，则

$$\cos(a+ib)=\frac{1}{2}(e^{ia-b}+e^{-ia+b})$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-b}(\cos a+i\sin a)+e^{b}(\cos a-i\sin a)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})\cos a+\frac{i}{2}(e^{-b}-e^{b})\sin a\ .$$