高等应用数学

习题册

主编　左艳芳　杨朝晖

云南大学出版社

高等应用数学习题册

主　编　左艳芳　杨朝晖
副主编　刘　伟　吴武琴

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学习题册/左艳芳，杨朝晖主编．—昆明：云南大学出版社，2008（2013 重印）

ISBN 978－7－81112－603－7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①左…②杨…　Ⅲ．应用数学—高等学校—习题　Ⅳ．O29－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 082064 号

高等应用数学习题册

左艳芳　杨朝晖　主编

组织策划：徐　曼
责任编辑：徐　曼　朱光辉
封面设计：刘　雨
出版发行：云南大学出版社
印　　装：昆明市五华区教育委员会印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：9
字　　数：219 千
版　　次：2008 年 7 月第 1 版
印　　次：2013 年 2 月第 7 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81112－603－7
定　　价：14.00 元

地　　址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内（邮编：650091）
发行电话：0871－5033244　5031071
网　　址：www. ynup. com
E－mail：market@ ynup. com

前　言

近年来，高职高专教育发展迅猛，差不多已占据了高等教育的半壁江山。随着专业课改革的不断深入，数学教材也必须做出更大幅度的调整，以适应形势的发展。首先，数学总课时有所削减，但这并不意味着高职高专系列中数学的重要性有所降低。实践证明，只有注重基础，学生才能有更多的就业渠道和更大的发展空间。因此我们削减了生癖的纯理论的内容，加强了对概念的理解及应用，突出有实用价值的主干知识，减少了逻辑推导，特别是那些无足轻重的机械的推导，增加了直观性描述，使数学课既服务于专业又具有自身的系统性。另一方面，由于培养目标的改变及生源的特点，我们必须加强实践性环节，精讲精练，在做题之中培养学生分析问题、解决问题的能力。为此，我们编写了这本习题册作为教材的补充，书中收录了部分考研题和大量的专升本试题，每章还有两套自测题。本书既注重了基本知识的掌握，又注重了能力的培养。

参加编写的人员有吴武琴、刘伟（第一章、第八章），雷燕（第二章），王荣（第三章），罗莹莹（第四章），何猛（第五章），王缨（第六章），杨朝晖、李庆芹、李润民（第七章、第九章），洪银胜（第十章），马丽娟（第十一章），左艳芳（第十二章），牛立昆（第十三章）；第一章至第七章由左艳芳统稿，第九章至第十三章由杨朝晖统稿。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不足，恳请读者批评指正，以利于以后进一步修改。

编　者

2008 年 3 月

目　　录

第一章　极限与连续 …… (1)
§1　极限的概念 …… (1)
§2　极限的运算 …… (2)
§3　无穷小与无穷大 …… (3)
§4　两个重要极限 …… (5)
§5　无穷小的比较 …… (6)
§6　函数的连续性 …… (7)
单元测验 (一) …… (9)
单元测验 (二) …… (10)

第二章　导数与微分 …… (11)
§1　导数的概念 …… (11)
§2　函数和、差、积、商的求导法则 …… (12)
§3　复合函数求导法则 …… (13)
§4　隐函数的导数、参数方程确定的函数的导数 …… (14)
§5　函数的微分 …… (16)
单元测验 (一) …… (17)
单元测验 (二) …… (18)

第三章　导数的应用 …… (19)
§1　中值定理 …… (19)
§2　罗比塔法则 …… (20)
§3　函数单调性的判定法 …… (21)
§4　函数的极值及其求法 …… (22)
§5　函数的最大值和最小值 …… (24)
§6　曲线的凹凸和拐点　函数图像的描绘 …… (25)
§7　曲线的曲率 …… (26)
§8　导数在经济中的应用 …… (28)
单元测验 (一) …… (29)

单元测验（二） …… (30)

第四章　不定积分 …… (31)
§1　不定积分的概念和性质 …… (31)
§2　换元积分法 …… (32)
§3　分部积分法 …… (35)
单元测验（一） …… (36)
单元测验（二） …… (37)

第五章　定积分及其应用 …… (39)
§1　定积分的概念及性质 …… (39)
§2　微积分基本公式 …… (40)
§3　定积分换元法和分部积分法 …… (41)
§4　无穷区间上的广义积分 …… (42)
§5　定积分的应用 …… (43)
单元测验（一） …… (44)
单元测验（二） …… (45)

第六章　微分方程 …… (46)
§1　微分方程的基本概念 …… (46)
§2　可分离变量的一阶微分方程 …… (47)
§3　一阶线性微分方程 …… (48)
§4　二阶常系数线性齐次微分方程 …… (49)
§5　二阶常系数线性非齐次微分方程 …… (50)
单元测验（一） …… (51)
单元测验（二） …… (51)

第七章　无穷级数 …… (53)
§1　常数项级数 …… (53)
§2　数项级数判敛法 …… (54)
§3　幂级数 …… (55)
§4　傅里叶级数 …… (57)
单元测验（一） …… (58)
单元测验（二） …… (59)

第八章　多元函数微分学 …… (60)
§1　空间直角坐标系及常见曲面 …… (60)
§2　向量代数 …… (61)
§3　二元函数的连续性 …… (63)

§4 偏导数 …… (65)
§5 全微分 …… (66)
§6 复合函数和隐函数求导法 …… (68)
§7 多元函数的极值 …… (71)
单元测验 (一) …… (73)
单元测验 (二) …… (74)

第九章 重积分及曲线积分 …… (75)
§1 二重积分的概念和性质 …… (75)
§2 二重积分的计算 …… (76)
§3 二重积分的应用 …… (78)
§4 三重积分简介 …… (78)
§5 曲线积分 …… (79)
单元测验 (一) …… (80)
单元测验 (二) …… (81)

第十章 线性代数 …… (82)
§1 行列式 …… (82)
§2 矩 阵 …… (84)
§3 线性方程组 …… (86)
单元测验 (一) …… (88)
单元测验 (二) …… (89)

第十一章 概率论初步 …… (91)
§1 随机事件 …… (91)
§2 随机事件的概率 …… (92)
§3 概率的加法公式与乘法公式 …… (93)
§4 事件的独立性 贝努里概型 …… (95)
§5 随机变量及其分布 …… (97)
§6 随机变量的数字特征 …… (99)
单元测验 (一) …… (101)
单元测验 (二) …… (101)

第十二章 数理统计初步 …… (103)
§1 基本概念…… (103)
§2 参数估计 …… (104)
§3 假设检验…… (105)
§4 一元回归分析…… (107)
单元测验 (一) …… (109)

单元测验（二） …… (110)

第十三章　拉普拉斯变换 …… (112)
§1　拉普拉斯变换的概念 …… (112)
§2　拉氏变换的性质 …… (114)
§3　拉氏逆变换 …… (116)
§4　拉氏变换的应用 …… (118)
单元测验（一） …… (120)
单元测验（二） …… (121)

2006 年普通高等学校选拔优秀专科生进入本科阶段考试试题　高等数学 …… (123)
2005 年普通高等学校选拔优秀专科生进入本科阶段考试试题　高等数学 …… (128)
2006 年成人高等学校专升本招生全国统一考试　高等数学（一）试题 …… (133)

第一章　极限与连续

§1　极限的概念

一、要点与考点

概念：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

性质：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\end{cases},\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\end{cases}$$

方法：观察法求极限(直接观察法，变形观察法，图表观察法)。

二、典型题详解

例 1：求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$。

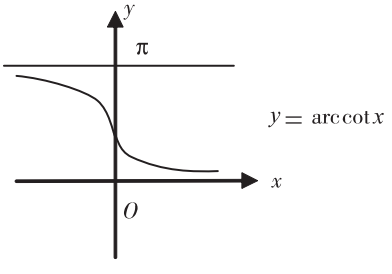
分析：$x\to1$ 是指 x 无限接近 1，但不等于 1。$x\to1$ 时虽然分子分母都趋于 0，但是商的变化方向却直接观察不出，需恒等变形后再观察。

解：$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)\quad(\because x\neq1,\ \therefore\text{可以约分})$$
$$=2$$

例 2：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$。

分析：求 $x\to\infty$ 时函数的极限通常需要利用图像，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，所以要先观察 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时函数的变化趋势再下结论。

解：



由图知求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在。

三、课堂练习

1. 观察并写出下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)$　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

2. 设$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，画出函数图像，求出$x\to 0$时$f(x)$的左右极限并说明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在。

四、课外作业

1. 用观察法求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$

2. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求出$x\to 0$时$f(x)$的左右极限并说明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在。

五、能力拓展

设$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x-2}, & x>2\\ kx, & x\leqslant 2\end{cases}$，若$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$存在，求$k$的值。

§2　极限的运算

一、要点与考点

性质: 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$　　$[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0]$

二、典型题详解

例 1: 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^2-4x+3}$。

分析: $x\to 1$时分子分母的极限都是0，不能用法则(4)解决，需约分简化后再计算商的极限，为此，分子应进行有理化，分母应因式分解。

解:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x+7}-3)(\sqrt{2x+7}+3)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{2x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-3)(\sqrt{2x+7}+3)}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

例 2：求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-4x-1}$。

分析：当分子、分母都是多项式，且自变量趋于无穷大，可先把分子分母同除 x 的最高次幂后，再求极限。

解：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-4x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-2x-1)/x^2}{(5x^2-4x-1)/x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}$$

三、课堂练习

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{x-3}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-1}{2x^3+2x+3}$　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{3n^2-3n+5}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

四、课外作业

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2(x-1)^3}{(2x-10)^5}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$　$(a>0)$

五、能力拓展

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$　　(考研题)

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots(n-1)}]$　(考研题)

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

§3　无穷小与无穷大

一、要点与考点

概念：无穷小　无穷大

性质：无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$（$\alpha$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小）

$f(x) \neq 0$ 时，$f(x)$ 为无穷小$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$为无穷大

二、典型题详解

例 1：求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$。

分析：$x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的极限不存在，但是 $\sin x$ 有界，而$\dfrac{\sin x}{x} = (\sin x)\cdot\dfrac{1}{x}$

解：$\because |\sin x| \leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} (\sin x)\cdot\frac{1}{x} = 0$$

例 2：求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x + 1}{x^2 + 3}$。

分析：凭直觉，$x\to\infty$ 时分子“增大”的速度明显快于分母，结果应为 ∞，但要将问题说清楚需要用无穷小与无穷大的关系。

解：$\because \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^4 - x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2 + 3)/x^4}{(x^4 - x + 1)/x^4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 3} = \infty$$

例 3：求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$。

分析：$x\to 1$ 时$\dfrac{1}{1-x}$和$\dfrac{2}{1-x^2}$都是无穷大，即这两个极限都不存在，不能直接用极限运算法则，需通分合并后再求极限。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{(1 - x)(1 + x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{2}$$

三、课堂练习

1. 函数在自变量怎样变化时是无穷小？无穷大？

（1）$y = \dfrac{x-1}{x}$　　（2）$y = \ln x$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\sin x}{x^2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$

四、课外作业

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^5(4x+2)^2}{32x^7+x^6-4x^3-6}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3}\right)$　　(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

五、能力拓展

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a、b 的值。

2. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$　　(考研题)

§4　两个重要极限

一、要点与考点

性质: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$　　$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$　　$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e$

方法: 换元法求极限

二、典型题详解

例: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x(x^2+6)}$。

分析: 此题需先换元再用重要极限解决，$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+6}=\dfrac{1}{6}\neq 0$，$\therefore$ 可先用乘积极限的运算法则将这一部分分离出去，以简化问题。

解:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x(x^2+6)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+6}\\&=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\\&=\frac{1}{6}\lim_{(4x)\to 0}4\frac{\sin(4x)}{(4x)}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

三、课堂练习

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 5t}{t}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x(x+5)}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}+1}$

四、课外作业

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

五、能力拓展

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x+x^2)^{\frac{1}{x}}$　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，求 a

§5　无穷小的比较

一、要点与考点

概念: 高阶　低阶　同阶　等价

性质: $u\to 0$ 时　$\sin u\sim u$，$\tan u\sim u$，$\arcsin u\sim u$

$1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2}$，$\ln(1+u)\sim u$，$e^u-1\sim u$

若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$

方法: 利用等价无穷小的替换求极限

二、典型题详解

例: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{3}}{x\sin 2x}$。

分析: 本题为无穷小的运算，若使用三角变形及重要极限，运算式会很繁，若使用等价无穷小替换，则会非常简单。

解: $\because x\to 0$ 时　$\dfrac{x}{3}\to 0$，$2x\to 0$，$\therefore 1-\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)\sim\dfrac{\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}{2}$，$\sin 2x\sim 2x$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{18}}{x\cdot 2x}=\dfrac{1}{36}$

三、课堂练习

1. 比较无穷小的阶的高低:

(1) $x\to 0$ 时，x^2-2x^3 与 x^2　　(2) $x\to 1$ 时，$1-x^3$ 与 $1-x^2$

(3) $x\to 0$ 时，x^2 与 $e^{-x^2}-1$

2. 利用等价无穷小的替换求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

四、课外作业

1. $x\to 0$ 时，下列无穷小与 x 相比是什么阶无穷小?

(1) $x+\sin x^2$　　(2) $\sqrt{x}+\sin x$　　(3) $\dfrac{(x+1)x}{4+\sqrt[3]{x}}$　　(4) $\ln(1+2x)$

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{1-\cos x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{2x}-1)\ln(1+x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)(1+\cos x)}$　　(考研题)

五、能力拓展

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a，b。(考研题)

2. 若 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{x+1}$，求 a，b，c。

§6　函数的连续性

一、要点与考点

概念: 函数的增量，$f(x)$ 在 x_0 处连续，左连续，右连续，$f(x)$ 在(a,b) 内连续 ，$f(x)$ 在$[a,b]$上连续。

性质: $f(x)$ 在 x_0 处连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

初等函数在其定义区间内连续。

若$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则

1. $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值 M，最小值 m。

2. $f(x)$ 能取得介于最大值和最小值之间的任何值。

3. 若$f(a)$ 与$f(b)$ 异号，则存在 $\xi\in(a,b)$ ，使$f(\xi)=0$。

二、典型题详解

例 1: 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-x+1}}$。

分析: $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-x+1}}$是初等函数，且在 $x=1$ 处有定义，所以在 $x=1$ 处连续，由连续的定义知极限值等于函数值，可用代入法求解。

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{e}{\sqrt{1^2-1+1}}=e$

例 2：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{2x} & x<0\\ 2 & x=0\\ 2x+b & x>0\end{cases}$，$a$ 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

分析：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $x=0$ 处的左极限 = 右极限 = 函数值，由此可得一个方程组并解出 a，b。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin ax}{2x}=\dfrac{a}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$，$f(0)=2$。

$\because f(x)$ 在 x_0 处连续，$\therefore \dfrac{a}{2}=b=2$。

$\therefore a=4$，$b=2$。

三、课堂练习

1. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$，$a$ 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

四、课外作业

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sin 2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{(1+\cos x)\tan^2 x}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & -\pi<x<0\\ b & x=0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a，b 的值。

五、能力拓展

1. 证明 $xe^x=2$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根。　　(专升本题)

单元测验(一)

一、选择题

1. 下列极限不正确的是(　　)。

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$

2. 当 $x\to 0$ 时,(　　) 是与 x 等价的无穷小。

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+3x)$　　C. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　D. $x^2(x+1)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{x}=$(　　)。

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+5}{x-1}=6$,则 $a=$(　　)。

A. 1　　B. 5　　C. 6　　D. -1

二、填空题

1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x-6}$的连续区间为_____。

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,$f(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$_____。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{5x}=$_____。

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=$_____。

5. $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & x>1\\ ae^x & x\leqslant 1\end{cases}$在 $x=1$ 处连续,则 $a=$_____。

三、求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2(e^{2x}-1)}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

四、设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+b & x<0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{x}\sin x+4 & x>0\end{cases}$,试确定 a,b 的值,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

五、证明方程 $x^5-3x=1$ 在 1 与 2 之间至少存在一个实根。