GAODENG SHUXUE

高等数学

主 编 郝连军 高 焱 陈继业

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高 等 数 学

主　编　郝连军　高　焱　陈继业
副主编　张宏斌　王达开　杨　迪
参　编　刘　君　赵书慧　王晓玲　穆德恒
主　审　孙玉明　田春尧

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书按照高职高专教学大纲编写，全书共八章，主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，拉普拉斯变换，行列式、矩阵和线性方程组。每节末尾配有一定数量的习题，每章末配有复习题。本书最后附有部分习题参考答案。

本书考虑到高等职业技术教育是专科层次的职业教育，以应用为目的，以必需、够用为度为原则。取舍适宜，教材内容衔接自然，叙述深入浅出，编排上不落俗套，不过分强调理论推导和证明的严谨性，着重基本运算技能的训练，不追求过分复杂的计算，难易程度适合目前的生源状态。

本书可作为高职高专理工类各专业以及普通高等院校的基础课教材，也可作为广大自考学生及工程技术人员的自学及参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 郝连军，高焱，陈继业主编．-- 北京 ：北京邮电大学出版社，2014.9
ISBN 978-7-5635-4083-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①郝…　②高…　③陈…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 176103 号

书　　名：高等数学
著作责任者：郝连军　高　焱　陈继业　主编
责 任 编 辑：满志文
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：13.5
字　　数：333 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版　2014 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4083-9　　定　价：29.80 元

前　言

《高等数学》是高职院校相关专业的一门重要的基础课程，在培养高素质、复合型、应用型人才方面起着重要的作用。根据教育部颁发的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，遵循“以服务为宗旨，以应用为目的，以实用、必需为主，理论够用为度”的原则，在认真总结归纳教学实践经验、探索更为贴近高职学生实际的教育教学方法的基础上，针对当前高职学生应知应会的高等数学基础性知识内容，编写了《高等数学》实用教材。本教材充分考虑高职院校学生实际情况，注重了高等数学与初等数学的衔接，使学生在学习初等数学的基础上进一步学习和掌握高等数学的基础知识和思维方式，为学生学习专业基础课和相关专业课程提供必需的数学基础知识和数学应用工具，本教材对学生数学思维、推理论证、解题技巧和计算技能进行培养，旨在强化学生的高等数学基础性知识的掌握及运用，为学生继续深造打下坚实的基础。

本书的主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，拉普拉斯变换，行列式、矩阵和线性方程组八部分。本书在每章节后都配有一定数量的习题、复习题，并附有部分习题参考答案。

本书由辽宁石化职业技术学院郝连军老师主编，第二主编高焱、陈继业，副主编张宏斌、王达开、杨迪，参加编写的人员有刘君、赵书慧、王晓玲、穆德恒。孙玉明、田春尧认真审阅了全稿并提出了宝贵意见。在编写过程中，得到曲伟等诸多老师的支持和帮助，在此表示感谢。

由于时间较仓促及编者水平有限，书中难免有缺点和不妥之处，敬请专家、同行及广大读者批评指正。

编　者

2014 年 6 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念，高等数学主要的研究对象也是函数，我们将在函数知识的基础上，研究变量的变化趋势，从而导出函数的极限. 通过极限的知识进而学习导数、微分与积分. 可见函数的极限在高等数学中的地位是多么的重要. 这一章在原有函数知识的基础上，进一步加深对函数知识的学习，进而掌握极限思想，求极限的方法，函数的连续性等.

第一节　初 等 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1.1　设 D 是一个非空数集，如果对于 D 上变量 x 的每一个确定值，按照某种对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，称 y 为定义在数集 D 上 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域. 当 x 取遍定义域 D 中的每一个值时，对应函数值的全体组成的集合称为函数的值域，一般用 M 表示.

例如，反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域和值域分别为 $D:\{x\,|\,x\neq 0\}$；$M:\{y\,|\,y\neq 0\}$.

在函数的定义中，如果对每一个 x 值，对应的 y 值是唯一的，我们称 y 是 x 的单值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为单值对应；否则，称函数为多值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为多值对应. 上述定义的函数是单值函数. 例如，反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 就是单值函数；而 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是多值函数.

2. 函数的表示法及函数值

(1) 函数的表示法

表示函数的方法常用的有：解析法、列表法、图像法三种.

1) 解析法　把两个变量的函数关系用一个等式来表示，这个等式称为函数的解析表达式，简称解析式. 解析式是表示函数的主要形式. 除了用符号 $f(x)$ 表示外，还常用 $g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等符号表示. 例如，

$$g(x)=ax^2+bx+c,\qquad F(x)=|x|$$

用解析法表示的函数还有以下几种形式：

① 分段函数

在不同区间内用不同解析式表示的函数称为分段函数.例如

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

分段函数的定义域是函数的各个定义区间的并集.

② 隐函数

由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为隐函数.例如，$2x-y+3=0$，$xy=e^{x+y}$都是隐函数.

为了区别，我们前面讨论的函数称为显函数.如 $y=2x$，$y=e^x$ 等都是显函数，分段函数也是显函数.注意，一部分隐函数能够化为显函数，也有一部分隐函数不能够化为显函数.

例如，$2x-y+3=0$ 可化为显函数 $y=2x+3$，而 $xy=e^{x+y}$无法化为显函数.

2）列表法　用列出的表格来表示两个变量的函数关系.

例如，数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表，还有银行里常用的“利息表”等都是用列表法来表示函数关系的.

3）图像法　用函数图像表示两个变量之间的关系.

例如，气象台用自动记录器，描绘温度随时间变化的曲线就是用图像法表示函数关系的.

（2）函数值与函数表达式的求法

定义 1.1.2　当自变量 x 在其定义域内取一个确定的值 a 时，函数 $f(x)$的对应值称为函数 $f(x)$在 $x=a$ 处的函数值，记作 $f(a)$.

$f(a)$是由 a 代替函数表达式中的 x 而得到的.

例 1.1.1　设 $\varphi(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$，求 $\varphi(0)$，$\varphi(a)$.

分析：此函数带有绝对值.所以，求 $\varphi(a)$时要根据 a 的情况进行讨论.

解

$$\varphi(0)=\frac{|0-1|}{0^2-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\varphi(a)=\frac{|a-1|}{a^2-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a+1}, & a>1\\ -\dfrac{1}{a+1}, & a<1\text{ 且 }a\neq -1\end{cases}$$

例 1.1.2　已知

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0,+\infty)\\ 1, & x=0\\ -x+1, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解　因为$-1\in(-\infty,0)$，所以，$f(-1)=(-x+1)\Big|_{x=-1}=-(-1)+1=2$；$f(0)=1$；

因为$\dfrac{1}{2}\in(0,+\infty)$，所以，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=x+1\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.1.3　设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$的表达式.

解 令 $x+1=u$，$x=u-1$，得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$$

所以，$f(x)$ 的表达式为：$f(x)=x^2+x+3$.

3. 函数定义域的求法

我们在研究函数时，只有在其定义域内进行才有意义，因此，研究函数首先要确定其定义域. 在实际问题中，函数的定义域是由其实际意义确定的.

例如，圆的面积 A 与半径 r 的函数关系是 $A=\pi\cdot r^2$，此函数的定义域是 $(0,+\infty)$.

如果所讨论的函数是由一个解析式 $y=f(x)$ 确定的，那么，函数的定义域是使解析式 $y=f(x)$ 有意义的所有实数的集合. 确定函数的定义域通常有以下几种情况：

(1) 在分式函数中，分母不能为零；

(2) 在偶次根式函数中，根号里的表达式不能为负；

(3) 在对数函数式中，真数部分必须大于 0，底数大于 0 且不等于 1；

(4) 在三角函数式中，$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 不能取正切，$k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 不能取余切；

(5) 在反三角函数式中，绝对值大于 1 的代数式不能取反正弦和反余弦；

(6) 如果函数表达式是由几个代数式经过加、减运算组合而成，则其定义域应取各代数式定义域的交集.

例 1.1.4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x-2}$；　　(2) $y=\ln(x^2+x-6)$；

(3) $y=\dfrac{1}{|x+1|-2}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$；　　(4) $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, x>1\end{cases}$.

解 (1) 要使函数有意义，需

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$x>2$$

所以，函数的定义域为 $(2,+\infty)$；

(2) 要使函数有意义，需

$$x^2+x-6>0$$

即

$$(x+3)(x-2)>0$$

$$x<-3 \text{ 或 } x>2$$

所以，函数的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$；

(3) 要使函数有意义，需

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\ |x+1|-2\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\ x\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$$

所以,函数的定义域为$[-4,-3)\cup(-3,1)\cup(1,6]$;

(4) 因为分段函数的定义域是函数的各个定义区间的并集,$[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$,所以,函数的定义域为$[0,+\infty)$.

4. 函数的两个要素

一个函数是由其定义域和对应关系确定的,而函数的值域一般称为派生要素,由定义域和对应法则确定.所以,定义域和对应关系构成了函数的两个要素.对于两个函数,当且仅当它们的定义域和对应关系分别相同时,这两个函数才相同.

例 1.1.5 判断下列各组中函数是否相同:

(1) $y=x,y=\sqrt{x^2}$;　　(2) $y=x,y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$;　　(4) $y=C,y=Cx^0$.

解 (1) $y=x,y=\sqrt{x^2}$定义域都是实数集 $\mathbf{R}$,但是,它们的对应关系不同,$y=x$ 中 f:$x\to x$,而 $y=\sqrt{x^2}$中 f:$x\to\sqrt{x^2}=|x|$. 因此,$y=x,y=\sqrt{x^2}$是不同的函数.

(2) $y=x,y=(\sqrt{x})^2$ 中,$y=x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是非负实数集,它们的定义域不同.所以,$y=x,y=(\sqrt{x})^2$ 是不同的函数.

(3) $y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$定义域都是实数集 $\mathbf{R}$,对应关系相同.所以,$y=x,y=\sqrt[3]{x^3}$是相同函数.

(4) $y=C,y=Cx^0$ 中,$y=C$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,$y=Cx^0$ 的定义域是非零实数集,它们的定义域不同.所以,$y=C,y=Cx^0$ 是不同的函数.

二、函数的特性

函数的四种特性是指函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性,列表归纳如表 1-1-1 所示.

表 1-1-1 函数的四种特性

特性	定　义	几何特性
奇偶性	若 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,且 (1) $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数; (2) $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数; 否则,称 $f(x)$为非奇非偶函数	奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$且 $x_1<x_2$ 有 (1) $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$在(a,b)内单调增加; (2) $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$在(a,b)内单调减少	单调增加函数图像趋势为"从左向右呈上升状"; 单调减少函数图像趋势为"从左向右呈下降状"
有界性	若存在常数 $M>0$,使对一切 $x\in(a,b)$有 $\|f(x)\|\leqslant M$,则称 $f(x)$在(a,b)内有界	有界函数的图像在(a,b)内全部夹在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间
周期性	若对于任意的 $x\in D$,存在正数 l,使 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为 D 上的周期函数,称 l 为 $f(x)$的周期,称 l 的最小正值为 $f(x)$的最小的正周期	周期函数的图像每隔一个周期重复出现一次

上述四种特性中,奇偶性和周期性是函数的整体特性.所以,所对应等式中的 x 是定义

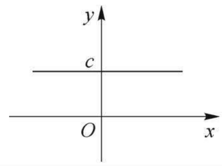
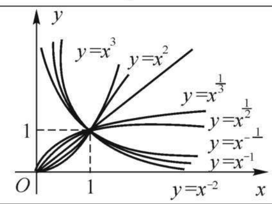
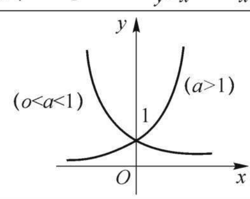
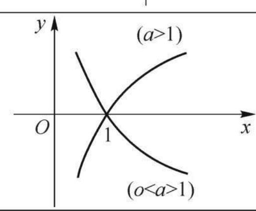
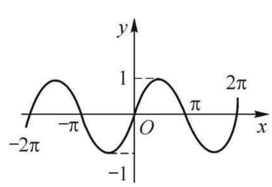
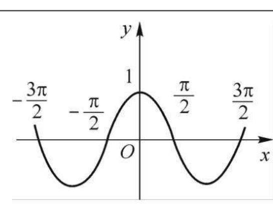
域中的任意值；而单调性和有界性是函数的局部特性（如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界，而在整个定义域上无界），它们所对应的区间可能是定义域的全部，也可能是定义域的一部分.

三、基本初等函数

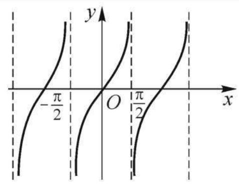
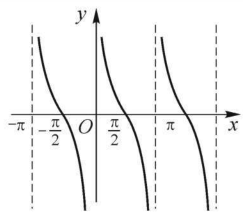
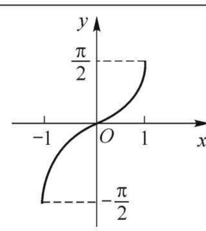
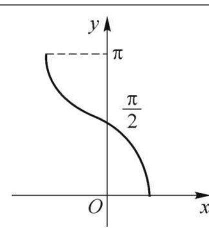
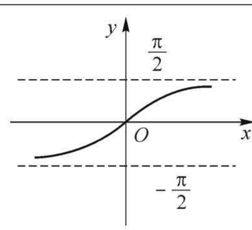
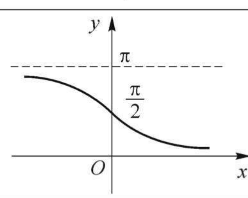
定义 1.1.3　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

基本初等函数的定义域、图像及性质，如表 1-1-2 所示.

表 1-1-2　基本初等函数的定义域、图像及性质

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
常数函数	$y=c$（c 为常数）	$(-\infty,+\infty)$		图像过点 $(0,c)$，为平行于 x 轴的一条直线
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为实数）	随 α 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		1. 图像过点 $(1,1)$； 2. 若 $\alpha>0$，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；若 $\alpha<0$，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y=a^x$（$a>0,a\neq1$）	$(-\infty,+\infty)$		1. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少； 2. 图像在 x 轴上方，且都过点 $(0,1)$
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）	$(0,+\infty)$		1. 当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少； 2. 图像在 y 轴右侧，且都过点 $(1,0)$
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		1. 是奇函数，周期为 2π，是有界函数； 2. 在 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加；在 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		1. 是偶函数，周期为 2π，是有界函数； 2. 在 $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 内单调增加；在 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）

续 表

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$		1. 是奇函数,周期为 π,是无界函数; 2. 在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$		1. 是奇函数,周期为 π,是无界函数; 2. 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		1. 奇函数,单调增加函数,有界; 2. $\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		1. 非奇非偶函数,单调减少函数,有界; 2. $\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$
	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		1. 奇函数,单调增加函数,有界; 2. $\arctan(-x)$ $=-\arctan x$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		1. 非奇非偶函数,单调减少函数,有界; 2. $\operatorname{arccot}(-x)$ $=\pi-\operatorname{arccot} x$

四、复合函数

定义 1.1.4 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=g(x)$,如果对于函数 $u=g(x)$ 定义域内的每一个 x 对应的 u 都能使函数 $y=f(u)$ 有意义. 那么,y 就是 x 的函数,这个函数称为

$y=f(u)$，$u=g(x)$的复合函数，记为 $y=f(g(x))$. u 称为复合函数 $y=f(g(x))$的中间变量.

例如，由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 可复合成 $y=\sin^2 x$，由 $y=\ln u$ 和 $u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$可复合成$y=\ln\sin\sqrt{x}$.

例 1.1.6　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=e^{\sin x^2}$；　　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{1+x^2}$；

(3) $y=2^{\ln(x^2+1)}$；　　(4) $y=\cos^2(3x+1)$.

解　(1) $y=e^{\sin x^2}$是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成；

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{1+x^2}$是由 $y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{v}$，$v=1+x^2$ 复合而成；

(3) $y=2^{\ln(x^2+1)}$是由 $y=2^u$，$u=\ln v$，$v=x^2+1$ 复合而成；

(4) $y=\cos^2(3x+1)$是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$ 复合而成.

五、初等函数

定义 1.1.5　由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的，且用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=\sin^2 x+\ln x$，$y=\dfrac{3x-1}{e^x}$都是初等函数，分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$不是初等函数，因为它不是用一个式子表示的函数.

注意，不是所有的分段函数都不是初等函数，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 就是初等函数.

以后，我们所讨论的函数一般都是初等函数.

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否相同？并说明理由.

(1) $y=\ln|x|$，$y=\ln x$　　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$y=x-1$

(3) $y=1$，$y=\sec^2 x-\tan^2 x$　　(4) $y=\ln x^3$，$y=3\ln x$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$　　(3) $y=\lg(x^2-3x+2)$

(4) $y=\dfrac{x}{\tan x}$　　(5) $y=\dfrac{x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$　　(6) $y=\sqrt{25-x^2}-\lg\cos x$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & 0<x\leqslant 4\end{cases}$

求函数 $f(x)$的定义域和 $f(-1)$，$f(3)$的值，并作出它的图像.