



大学数学系列教材 >>>>>>

主 编 朱传喜 范丽君
副主编 徐保根 邱淑芳
段五朵

高等数学

GAODENG SHUXUE

(上册)



江西高校出版社
JIANGXI UNIVERSITIES AND COLLEGES PRESS

图书在版编目(C I P) 数据

高等数学. 上册/朱传喜,范丽君主编. —南昌:江西高校出版社, 2011.8

ISBN 978 -7 -5493 -0383 -0

I. ①高... II. ①朱... ②范... III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 167086 号

出版发行	江西高校出版社
社 址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮 政 编 码	330046
总编室电话	(0791) 88504319
销 售 电 话	(0791) 88513417
网 址	www. juacp. com
印 刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照 排	江西太元科技有限公司照排部
经 销	各地新华书店
开 本	787mm × 960mm 1/16
印 张	21.5
字 数	386 千字
版 次	2012 年 7 月第 1 版第 2 次印刷
书 号	ISBN 978 -7 -5493 -0383 -0
定 价	27.8 元

赣版权登字 -07 -2011 -201

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”(高等数学部分),我们编写了针对 21 世纪理工科数学教学内容和符合课程体系改革基本精神的大学教材《高等数学》。本套教材分上、下册,上册包括一元函数微积分以及附录 I(几种常用的曲线)、附录 II(积分表),下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程以及附录 III(Mathematica 软件使用入门和数学实验)。每节配有习题,书末附有习题参考答案。

本套教材可供普通高校及成人高校理、工、管等各专业学生使用,也可作为教师教学和工程技术人员的自学参考书。

前 言

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”(高等数学部分),我们编写了针对 21 世纪理工科数学教学内容和符合课程体系改革基本精神的大学教材《高等数学》。本书可作为高等学校理、工、管等各专业“高等数学”课程的教材。本套教材分上、下册,共 12 章,每节配有习题,书末附有习题参考答案。根据我们的教学经验,大约 160 课时(含习题课)可以讲授完本套教材的基本内容。

我们在过去编写和使用多年的江西高校出版社出版的大学数学系列教材《高等数学》的基础上,结合长期的教学实践和教学经验重新编写了本套教材。参加本套教材编写的人员有:南昌大学的朱传喜、黄先玖、陈春芳、尹建东、陈涛,江西理工大学的范丽君、匡奕群、张师贤,东华理工大学的邱淑芳、李琪,华东交通大学的盛梅波、蒋志勇、王广超。由朱传喜、范丽君进行统稿和最后审定。

因为编者的水平有限,本套教材的疏漏之处在所难免,敬请专家、同行和广大读者批评指正,我们万分感谢。

编 者
2011 年 2 月

目 录

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数

一、集合与区间

二、变量与函数

三、函数的初等性质

四、函数的运算

五、初等函数

习题 1-1

第二节 数列的极限

一、数列极限的概念

二、数列极限的性质

三、数列极限的四则运算法则

习题 1-2

第三节 函数的极限

一、自变量趋于有限值时函数的极限

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

三、函数极限的四则运算法则

习题 1-3

第四节 极限存在准则

一、极限存在准则 I

二、重要极限 I

三、极限存在准则 II

四、重要极限 II

* 五、柯西极限存在准则

习题 1-4

第五节 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小的比较

习题 1-5

第六节 连续函数

一、函数的连续性

二、连续函数的运算与初等函数的连续性

三、函数的间断点

习题 1-6

第七节 闭区间上连续函数的性质

一、闭区间上连续函数的性质

* 二、一致连续性

习题 1-7

第二章 导数与微分

第一节 导数概念

一、切线问题与速度问题

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的左、右导数

五、函数可导与函数连续的关系

习题 2-1

第二节 导数的运算

一、函数和、差、积、商的导数

二、复合函数的导数

三、反函数的导数

四、初等函数的求导及其杂例

习题 2-2

第三节 高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、高阶导数

二、隐函数的导数

三、由参数方程所确定的函数的导数

习题 2-3

第四节 导数的简单应用

一、曲线的切线、法线问题

* 二、极坐标系中极径至切线的转角

三、相关变化率

四、导数在经济学中的应用

习题 2-4

第五节 微分及其应用

一、微分的定义

二、微分的几何意义

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

* 四、高阶微分

五、微分的应用

习题 2-5

第三章 中值定理与导数应用

第一节 中值定理

一、罗尔 (Rolle) 定理

二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

三、柯西 (Cauchy) 中值定理

习题 3-1

第二节 洛必达法则

一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式

二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

习题 3-2

第三节 泰勒公式

习题 3-3

第四节 函数单调性的判别法

习题 3-4

第五节 最大值最小值问题

一、函数的极值及其求法

二、函数的最大值与最小值

习题 3-5

第六节 曲线的凹凸性与拐点

一、曲线的凹凸性

二、曲线的拐点

习题 3-6

第七节 函数图形的描绘

习题 3-7

第八节 曲率

一、弧微分

二、曲线的曲率及其计算公式

三、曲率圆、曲率中心

习题 3-8

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

二、基本积分表

三、不定积分的性质

习题 4-1

第二节 换元积分法

一、第一类换元法

二、第二类换元法

习题 4-2

第三节 分部积分法

习题 4-3

第四节 几种特殊类型函数的积分

一、有理函数的积分

二、三角函数有理式的积分

三、简单无理函数的积分

习题 4-4

第五节 积分表的使用

习题 4-5

第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、两个实际问题

二、定积分的概念

三、定积分的几何意义

四、定积分的性质

习题 5-1

第二节 微积分基本公式

一、积分上限的函数及其导数

二、微积分基本公式

习题 5-2

第三节 定积分的换元法与分部积分法

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

习题 5-3

* 第四节 定积分的近似计算

一、矩形法

二、梯形法

三、抛物线法

习题 5-4

第五节 广义积分

一、无穷限的广义积分

二、无界函数的广义积分

习题 5-5

第六章 定积分的应用

第一节 定积分的微元法

第二节 平面图形的面积

一、直角坐标情形

二、极坐标情形

习题 6-2

第三节 体积

一、平行截面面积为已知的立体的体积

二、旋转体的体积

习题 6-3

第四节 平面曲线的弧长

一、直角坐标情形

二、参数方程情形

习题 6-4

第五节 定积分的物理应用

一、变力沿直线做功

二、力

三、质量

四、平均值

习题 6-5

第六节 定积分的经济应用举例

习题 6-6

附录 I 几种常用的曲线

附录 II 积分表

习题参考答案



第一章

函数、极限与连续

高等数学是研究变量间依赖关系的一门数学课程. 它的内容包括一元及多元函数微积分学、空间解析几何、无穷级数和微分方程. 本章将介绍函数、极限和连续等基本概念, 以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合与区间

集合是现代数学中一个最基本的概念. 研究任何对象都不可避免地要用到集合. 例如, 一个书柜中的书构成一个集合, 一个教室里的学生构成一个集合, 全体实数构成一个集合, 等等. 一般的, 具有某种特定性质的对象的总体称为集合或集, 其中的对象称为该集合的元素. 通常以大写字母 A, B, M 等表示集合, 而以小写字母 a, b, x 等表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素, 则记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 否则记作 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A). 只含有有限多个元素的集合叫做有限集合, 含有无限多个元素的集合叫做无限集合.

如果集合 A 是由具有某种特定性质 P 的元素 x 的全体所组成的, 这时集合 A 可表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特性 } P\}.$$

例如, 全体偶数所成的集合 E 可以表示为

$$E = \{x \mid x = 2n, n \text{ 为正整数}\};$$

又如, xOy 平面上以原点为中心、半径为 1 的圆周上的点的全体所组成的集合 M

可记为

$$M = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数} \}.$$

对于有限集合还可以用列举法来描述. 例如, 由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A , 可记为

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}.$$

本书用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 N , 全体整数的集合记作 Z , 全体有理数的集合记作 Q , 全体实数的集合记作 R .

给定集合 A, B , 若当 $x \in A$ 时必定有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A). 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

不含任何元素的集合叫做空集, 记为 $\varnothing$, 且约定空集是任何集合的子集.

把集合 A 的元素与集合 B 的元素合在一起所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}.$$

把集合 A 的元素与集合 B 的公共元素取出来所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}.$$

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$. 数集

$$\{ x \mid a < x < b \}$$

称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$. 数集

$$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$.

类似地可定义

$$[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a)、(b) 所示.

此外还有所谓无限区间, 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)、(d) 所示.

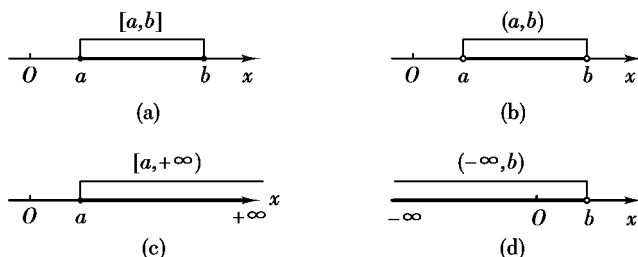


图 1-1

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 就简单地称它为区间, 且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念, 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心, δ 称为这邻域的半径 (图 1-2).

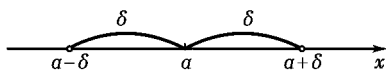


图 1-2

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

因为 $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示: 与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $U^\circ(a, \delta)$, 即

$$U^\circ(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

二、变量与函数

在观察自然现象或技术过程中, 常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中不起变化, 也就是始终保持一定的数值, 这种量叫做常量; 还有一些量在过程中是变化着的, 也就是可以取不同的数值, 这种量叫做变量.

例如, 观察一重物自由下落, 在重物达到地面前, 它的速度越落越快, 随着下落时间的增长, 下落距离也越来越大. 所以, 在重物下落的过程中(着地之前), 速度、时间、距离都是变量, 而重力加速度和重物的质量看做常量.

一个量是常量还是变量, 要根据具体情况作出具体分析. 例如, 就小范围地区来说, 重力加速度可以看做常量, 但就广大地区而言, 重力加速度则是变量.

通常用字母 a, b, c 等表示常量, 用字母 x, y, t 等表示变量.

在同一种自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着, 这几个变量并不是孤立地在变化, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 这里先就两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第八章介绍) 举几个例子.

例 1 自由落体运动, 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t = 0$, 那么两个变量 s 与 t 之间的依赖关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

确定, 其中 g 为重力加速度(常量). 假定物体着地时刻为 $t = T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 2 设有半径为 R 的圆, 考虑内接于该圆的正 n 边形面积 S_n , 易知 S_n 与 n

之间的依赖关系由公式

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

给出,当边数 n 在3、4、5、 $\cdots$ 自然数中任意取定一个数值时,由上式便可确定面积 S_n 的相应数值.

例3 某气象站用自记温度计自动地画出夜间零时到早晨6时的气温变化图(图1-3).它清楚地表明气温 T 对时间 t ($0 \leq t \leq 6$) 的依赖关系.当变量 t 在闭区间 $[0, 6]$ 上任取一个值 $t = t_0$ 时,从图形便可确定出变量 T 在 t_0 时刻的气温值 T_0 .

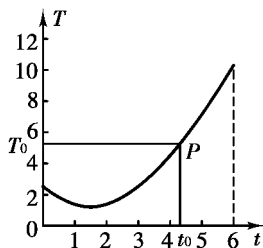


图1-3

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义,它们都表达了两个变量之间的相依关系,这种关系给出

了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应,两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集.如果当变量 x 在 D 中任意取定一个数值时,变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$.数集 D 叫做这个函数的定义域,记作 D_f , x 叫做自变量, y 叫做因变量.记号 f 表示从变量 x 到变量 y 的对应关系.

当 x 取数值 $x_0 \in D_f$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$.当 x 遍取 D_f 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

在不会混淆的情形,定义域也可简记为 D ,值域简记为 W .

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,如 φ 、 F 等.这时函数就记作 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$,等等.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例1中,定义域为 $D = [0, T]$;在例2中,定义域为 $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$;在例3中,定义域 $D = [0, 6]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数.

这时约定: 函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如, 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

如果自变量在定义域任取一个数值时, 对应的函数值总是只有一个, 这种函数叫做单值函数; 否则叫做多值函数. 例 1、例 2、例 3 中的函数都是单值函数. 下面举一个多值函数的例子.

例 4 在直角坐标系中, 半径为 r 、圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 这方程在闭区间 $[-r, r]$ 上确定一个以 x 为自变量、 y 为因变量的函数. 当 x 取 $-r$ 或 r 时, 对应的函数值都只有一个, 但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 内的任一个数值时, 对应函数值就有两个. 所以这函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明时, 函数都是指单值函数.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D . 对于任意取定的 $x \in D$, 对应的函数值为 $y = f(x)$. 这样, 以 x 为横坐标、 y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 (x, y) , 当 x 取遍 D 的每一个数值时, 就得到点 (x, y) 的一个集合 C :

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$

这个点集 C 称为函数 $y = f(x)$ 的图形. 在很多情况下(但并非总是如此), 函数 $y = f(x)$ 的图形是一条平面曲线. 在这种情况下, 通常简单地说“曲线 $y = f(x)$ ”.

下面举几个函数的例子.

例 5 函数 $y = 2$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{2\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1-4 所示.

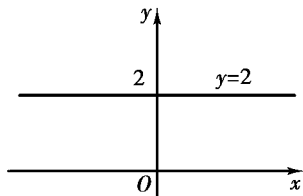


图 1-4

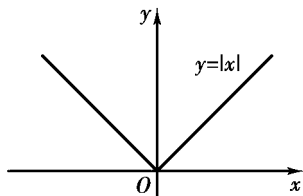


图 1-5

例 6 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-5 所示. 这个函数称为绝对值函数.

例 7 函数

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 通常记为 $\operatorname{sgn} x$, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1-6 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

例 8 对任给实数 x , 以 $[x]$ 记不超过 x 的最大整数, 例如, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\pi] = -4$, $[0] = 0$. 称 $f(x) = [x]$ 为取整函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 W 是整数集, 图形如图 1-7 所示.

对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$[x] \leq x < [x+1], \quad [x+1] = [x] + 1.$$

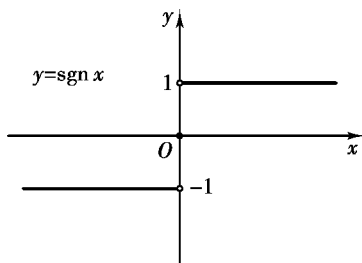


图 1-6

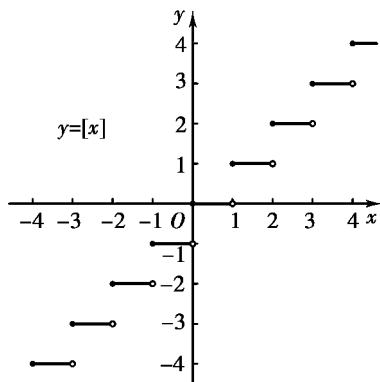


图 1-7

例 9 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

这个函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{0, 1\}$, 其图形是分布于直线 y