# 非线性算子不动点逼近理论及应用

唐艳

重庆大学出版社

# 非线性算子不动点
# 逼近理论及应用

唐　艳　闻道君　陈义安　丁宣浩　著



重庆大学出版社

## 内容提要

本书主要在不同的空间架构下,对不动点的迭代逼近问题,其迭代算法设计、算法的收敛性以及它们的集值变分包含问题中的应用进行研究。在研究中对于迭代算法的构造及收敛性条件、算法中控制序列是否易于选取,算法是否具某种稳定性,算法的收敛速率等还不太成熟的问题进行了讨论。

本书是作者近几年来从事非线性算子的逼近理论和不动点理论研究过程中总结出的成果,结合了前辈的相关专著,逐渐探索出适合非线性泛函分析方向的研究生了解该方向相关理论的历史发展、必要的理论准备以及了解该方向的最新发展所需要的内容,并不断修改、完善和充实。它包含了非压缩型映像不动点理论及其发展,非扩张映像的不动点理论和随机空间,花了较大篇幅介绍了不动点或零点迭代逼近的一些最新成果。希望本书的出版,对本方向的研究生和从事相关研究的教师都有一定的帮助。

**图书在版编目(CIP)数据**

非线性算子不动点逼近理论及应用 / 唐艳,闻道君,陈义安,丁宣浩著. —重庆:重庆大学出版社,2015.3

ISBN 978-7-5624-8575-9

Ⅰ.①非… Ⅱ.①唐… ②闻… ③陈… ④丁… Ⅲ.①非线性算子—不动点—迭代逼近—研究 Ⅳ.①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 198010 号

**非线性算子不动点逼近理论及应用**

唐 艳 闻道君 陈义安 丁宣浩 著

策划编辑:杨粮菊

责任编辑:文 鹏 版式设计:杨粮菊

责任校对:秦巴达 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@ cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

POD:重庆书源排校有限公司

*

开本:787×1092 1/16 印张:11 字数:142千

2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-8575-9 定价:48.00 元

---

# 序言

近年来,分析学研究对象和方法的发展,表明泛函分析的地位日益重要。科学技术的进步,要求分析和控制客观现象的数学能力向更高要求发展,从而使得非线性泛函分析的成果不断累积。

非线性算子不动点理论是正在迅速发展的非线性泛函分析理论的重要组成部分。它与近代数学的许多分支有着紧密的联系。不动点定理不仅可以判断不动点的存在性和唯一性,还可以构造迭代序列逼近不动点到任何的精确程度。它提供了线性方程组解的最佳逼近程序,给出了近似解的构造,在常微分方程、积分方程等领域中也有着广泛的应用,在现代数学发展中有着重要的地位和作用。另一方面,不动点理论作为现代管理学与经济学理论研究的重要工具,在均衡理论中得以广泛应用,对经济管理领域中均衡问题的研究做出了巨大的贡献。

1983 年度诺贝尔经济学奖获得者 Debreu 教授论一般经济均衡的存在性,1994 年度诺贝尔经济学奖获得者 Nash 教授论证博弈论纳什均衡的存在性,靠的都是不动

点定理。因此，用不动点的方法研究经济中的决策问题是具有重要的理论意义和较高的应用价值的。

在这些相关领域中，关于构造不动点迭代序列的收敛问题以及在控制、非线性算子和微分方程等方面的理论结合及应用成为研究的主流问题，对这方面问题的研究和解决会在实际运用中起到至关重要的作用。

不动点理论及应用受到国内外众多学者的关注和研究，每年都有大量的研究论文发表，丰富和发展着不动点理论（见参考文献［1］—［20］）。不动点理论研究主要在两大方面：一是算子不动点的存在性、唯一性及解集的性态研究；二是算子不动点的逼近理论研究。而在这些研究中，对不动点的迭代逼近问题，其迭代算法设计、算法的收敛性以及它们在集值变分包含问题中的应用均是涉及较少的。迭代算法的构造及收敛性条件、算法中控制序列是否易于选取，算法是否具某种稳定性，算法的收敛速率等研究都是还不太成熟的。相对而言，国内从事不动点理论研究的人员较少，对不动点定理进行理论和迭代收敛性方面的研究，很少涉及不动点迭代格式的研究以及非线性算子的不动点定理在算法最优化方面（收敛速度、运算复杂度）的应用研究。

19 世纪末的数学家切比雪夫提出并讨

论了有理函数的一致逼近问题,开辟了非线性逼近问题的先河。但是他处理问题的方式仍然偏向于多项式逼近。20 世纪 60 年代,非线性逼近问题在本质上取得了重大的突破,此后便以迅猛的势头发展。为了在不同的空间结构下解决各种类型和不同性质的算子的不动点逼近问题,相应地产生了众多的逼近算法,如典型的 Halpern 迭代算法、Mann 类迭代算法、Ishikawa 类迭代法和 Noor 类撒怒迭代算法、CQ 类算法、带误差项的算法、隐式形法的算法、带粘滞逼近的算法等。利用这些算法去逼近非线性算子的不动点,克服了简单迭代算法的某些缺陷,且去掉了加在非线性算子上的而一些过强的限制,因此具有较大的优越性。近年来,许多学者在用 Mann 和 Ishikawa 迭代法去逼近非线性算子的不动点方面取得了大量的成果。

此外,人们也研究了非线性算子方程解的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列的收敛性问题。由于计算的不精确性会带来误差,因此研究具有误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代法的收敛问题是很有必要的。在很多文献中,作者都讨论了 Mann 和 Ishikawa 迭代序列。可见国内外作者对 Mann 和 Ishikawa 迭代序列的研究还在进行,并对此类问题表现出很大的兴趣。对算子不动点的逼近问题的研究,密切相关于空间的几何机构与性质,如要求空间的凸性、光滑性、满足

Opial 条件、具有 Frechet 或 Gateaux 可微范数等,密切相关于算子的定义域、值域和其他性质,如要求算子的定义域或值域为紧凸集、有界闭凸集或闭凸集;算法产生的迭代序列有节;算子是次闭的;等等。

本书介绍了作者近几年关于非线性算子的逼近理论和不动点理论研究过程中的成果,并讨论了不动点理论和变分不等式之间的关系和一些相关的结论。主要内容包括:不动点理论和逼近理论的发展概况;在不同的空间架构下构造了非扩张型映象的迭代序列并研究了序列的收敛性与算子不动点之间的关系;在不同的空间结构下构造了伪压缩型映象的迭代序列并研究了序列的收敛性与算子不动点之间的关系;同时,介绍了变分不等式系统并构造了迭代序列且说明迭代序列的收敛性和变分不等式的解的关系。

由于编者水平所限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

# 目录


第 1 章　引言 ································ 1

1.1　什么是不动点问题················ 1

1.2　什么是函数逼近理论·············· 3

1.3　不动点逼近理论发展简介 ······ 10

1.4　常见的不动点定理及相关概念 ·································· 14

1.5　非线性算子的一些性质 ········ 17

第 2 章　伪压缩型不动点定理 ········ 20

2.1　Hilbert 空间伪压缩映象的不动点定理 ······················ 20

2.2　Banach 空间伪压缩映象的不动点定理 ······················ 53

2.3　渐近伪压缩映象的相关若干不动点定理 ······················ 90

第 3 章　非扩张型不动点定理 ……… 99
3.1　非扩张型映象的分类 ………… 99
3.2　Hilbert 空间非扩张映象的
不动点定理…………………… 103
3.3　Banach 空间非扩张映象的
不动点定理…………………… 106

第 4 章　不动点和变分不等式 ……… 148
4.1　变分不等式…………………… 148
4.2　不动点和变分不等式………… 153

参考文献 ………………………… 161

# 第 1 章 引言

## 1.1 什么是不动点问题

数学里到处要解方程，诸如代数方程、函数方程、微分方程等，种类繁多，形式各异.但是它们常能改写成$f(x)=x$的形状，这里$x$是某个适当的空间$X$中的点，$f$是从$X$到$X$的一个映射或运动.把每一点$x$移到点$f(x)$，方程$f(x)=x$的解恰好就是在$f$这个运动之下被留在原地不动的点，故称不动点.即这个函数映射到其自身一个点.于是，解方程的问题就转化成了找不动点这个几何问题.不动点问题实际上就是各种各样的方程（如代数方程、微分方程、积分方程等）的求解问题，在数学上非常重要，也有很多的实际应用.不动点理论研究不动点的有无、个数、性质与求法.研究方法主要是拓

扑的和泛函分析的[1,2,3](见非线性算子).

**定理**　如果$f$是$n+1$维实心球$B_{n+1}=\{x\in R_{N+1}, |x|\leqslant 1\}$到自身的连续映射($n=1,2,3,\cdots$),则$f$存在一个不动点$x_0\in B_{n+1}$即满足$f(x_0)=x_0$.

此定理是L.E.J.布劳威尔在1911年证明的.这个定理表明:在二维球面上,任意映到自身的一一连续映射,必定至少有一个点是不变的.他把这一定理推广到高维球面.尤其是,在$n$维球内映到自身的任意连续映射至少有一个不动点.在定理证明的过程中,他引进了从一个复形到另一个复形的映射类,以及一个映射的映射度等概念.有了这些概念,他就能处理一个流形上的向量场的奇点.

康托尔揭示了不同的$n$与空间$R^n$的一一对应关系.G.皮亚诺(Peano)则实现了把单位线段连续映入正方形,这两个发现启示了在拓扑映射中维数可能是不变的.1910年,布劳威尔对于任意的$n$证明了这个猜想 — 维数的拓扑不变性.在证明过程中,布劳威尔创造了连续拓扑映射的单纯逼近的概念,也就是一系列线性映射的逼近.他还创造了映射的拓扑度的概念 —— 一个取决于拓扑映射连续变换的同伦类的数.实践证明,这些概念在解决重要的不变性问题时非常有用.例如,布劳威尔就借助它界定了$n$维区域;J.W.亚历山大(Alexander)则用它证明了贝蒂数的不变性.这些都是不动点定理的一种延伸.

不动点理论已经成为非线性分析的重要组成部分,该问题的研究已经在偏微分方程、控制论、经济平衡理论及对策理论等领域获得了极为成功的应用.

这个定理可以通过一个经典例子也是一个很实际的例子来理解.比如:取两张一样大小的白纸,在上面画好垂直的坐标系以及纵横的方格.将一张纸平铺在桌面,而另外一张随意揉成一个形状(但不能撕裂),放在第一张白纸之上,不超出第一张的边界.那么第二张纸上一定有一点正好就

在第一张纸的对应点的正上方.一个更简单的说法是:将一张白纸平铺在桌面上,再将它揉成一团(不撕裂),放在原来白纸所在的地方,那么只要它不超出原来白纸平铺时的边界,那么白纸上一定有一点在水平方向上没有移动过.这个断言的根据就是布劳威尔不动点定理在二维欧几里得空间(欧几里得平面)的情况,因为把纸揉皱是一个连续的变换过程.另一个例子是大商场等地方可以看到的平面地图,上面标有"您在此处"的红点.如果标注足够精确,那么这个点就是把实际地形射到地图的连续函数的不动点.不妨再来看一个三维空间中的情况:如果我们用一个密封的锅子煮水,那么总有一个水分子在煮开前的某一刻和煮开后的某一刻处于同样的位置.另外地球绕着它的自转轴自转,自转轴在自转过程中不变,也就是自转运动的不动点.

## 1.2 什么是函数逼近理论

逼近理论是如何将一函数用较简单的函数来找到最佳逼近,且所产生的误差可以有量化的表征,以上提及的"最佳"及"较简单"的实际意义都会随着应用而不同.函数逼近论是函数论的一个重要组成部分,涉及的基本问题是函数的近似表示问题.函数逼近问题的提法具有多样的形式,其内容十分丰富[4,5,6,7].函数论的一个重要组成部分,涉及的基本问题是函数的近似表示问题.在数学的理论研究和实际应用中经常遇到下类问题:在选定的一类函数中寻找某个函数 $g$,使它是已知函数 $f$ 在一定意义下的近似表示,并求出用 $g$ 近似表示 $f$ 而产生的误差.这就是函数逼近问题.在函数逼近问题中,用来逼近已知函数 $f$ 函数类可以有不同的选择;即使函数

类选定了,在该类函数中用作 $f$ 的近似表示的函数 $g$ 的确定方式仍然是各式各样的;$g$ 对 $f$ 的近似程度(误差)也可以有各种不同的含义.下面介绍函数逼近理论中涉及的概念和研究中使用的方法:

**(1)逼近函数类**

给定函数$f(x)$,用来逼近$f(x)$的函数一般要在某个较简单的函数类中找,这种函数类叫做逼近函数类.逼近函数类可以有多种选择,比如 $n$ 次代数多项式,$n$ 阶三角多项式,这些是最常用的逼近函数类.其他如由代数多项式的比构成的有理分式集,由正交函数系的线性组合构成的(维数固定的)线性集,按照一定条件定义的样条函数集等也都是很有用的逼近函数类.在一个逼近问题中选择什么样的函数类作逼近函数类,这要取决于被逼近函数本身的特点,也和逼近问题的条件、要求等因素有关.

**(2)逼近方法**

给定$f$并且选定了逼近函数类之后,如何在逼近函数类中确定作为$f$的近似表示函数 $g$ 的方法是多种多样的.例如,插值就是用以确定逼近函数的一种常见方法.所谓插值,就是要在逼近函数类中找一个 $g(x)$,使它在一些预先指定的点上和$f(x)$有相同的值,或者更一般地要求 $g(x)$ 和$f(x)$在这些指定点上某阶导数都有相同的值.利用插值方法来构造逼近多项式的做法在数学中已有相当长的历史.微积分中著名的泰勒多项式便是一种插值多项式.

此外,在各种逼近问题中,线性算子也是广泛应用的一大类逼近工具.所谓线性算子,是指某种逼近方法,对于被逼近函数 $f$,$g$ 在逼近函数类中有$(f)$,$(g)$近似表示它们,并且对于任意实数$\alpha$,$\beta$都有$(\alpha f+\beta g)=\alpha(f)+$

$\beta(g)$.线性算子逼近方法构造方便.一个典型的例子是 $2\pi$ 周期的连续函数 $f(x)$ 的 $n$ 阶傅里叶部分和 $S_n(f,x)$,它定义了一个由 $2\pi$ 周期的连续函数集到 $n$ 阶三角多项式集内的线性算子 $S_n$.$S_n(f,x)$ 可以用来近似表示 $f(x)$.

除了线性算子,在逼近问题中还发展了非线性的逼近方法.这方面最基本的工作是19世纪中叶由俄国数学家切比雪夫提出的最佳逼近.1859年,切比雪夫结合机械设计问题的研究提出并讨论了下述类型的极值问题:已知 $[a,b]$ 区间上的连续函数 $f(x)$,$P(x,c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 是依赖于参数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 的初等函数(如多项式,有理分式),用 $P(x,c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 来近似表示 $f(x)$,要求选择一组参数使误差最小.这就是寻求极小问题的解.当参数给出最小误差时,就把 $P(x,a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*)=P^*(x)$ 叫做 $f(x)$ 在 $P(x,c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 所构成的函数类中的一个最佳逼近元;数值 $P^*(x)$ 叫做 $f(x)$ 借助于函数 $P(x,c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 来逼近时的最佳逼近值.这里的最佳逼近元依赖于 $f$,但不是线性依赖关系.所以说切比雪夫的最佳逼近是一种非线性的逼近.

误差又称逼近度.为了衡量函数 $g$ 对 $f$ 的近似程度(逼近度),在逼近论中广泛应用抽象度量空间内的度量概念.

对于在逼近问题中经常遇到的一些函数类,包括以下几种常用到的度量:

① 定义在 $[a,b]$ 上的全体连续函数 $C[a,b]$ 中任何两个函数 $f(x)$,$g(x)$ 的接近程度可以按公式 $\|f-g\|_C=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$ 来规定.按这种度量引出的逼近度叫做一致逼近度;

② 定义在 $[a,b]$ 上的全体平方可积函数 $\int[a,b]$ 内任何两个函数 $f(x)$,$g(x)$ 的接近程度可按公式 $\|f-g\|_2=\left[\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$ 来规定,这便是平方逼近度;

③ 定义在 $[a,b]$ 上的全体 $p(p\geqslant 1)$ 次幂可积函数,在 $[a,b]$ 内可以取

$\| f - g \|_p = [\int_a^b [f(x) - g(x)]^p \mathrm{d}x]^{\frac{1}{p}}$ 作为度量,由它产生的逼近度叫做 $p$ 次幂逼近度.

### (3) 函数逼近论的产生和发展概貌

从 18 世纪到 19 世纪初期, 在 L. 欧拉、P.S. 拉普拉斯、J.B.J. 傅里叶、J.V.彭赛列等数学家的研究工作中已涉及一些个别的具体函数的最佳逼近问题. 这些问题是从诸如绘图学、测地学、机械设计等方面的实际需要中提出的. 在当时没有可能形成深刻的概念和统一的方法. 切比雪夫提出了最佳逼近概念,研究了逼近函数类是 $n$ 次多项式时最佳逼近元的性质,建立了能够据以判断多项式为最佳逼近元的特征定理. 他和他的学生们研究了与零的偏差最小的多项式的问题,得到了许多重要结果. 已知 $[a,b]$ 区间上的连续函数 $f(x)$,假定 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,$(n \geqslant 0)$ 叫做 $f(x)$ 的 $n$ 阶最佳一致逼近值,也简称为最佳逼近值,简记为 $E_n(f)$.

1885 年德国数学家 K.(T.W.) 外尔斯特拉斯在研究用多项式来一致逼近连续函数的问题时证明了一条定理,这条定理在原则上肯定了任何连续函数都可以用多项式以任何预先指定的精确度在函数的定义区间上一致地近似表示,但是没有指出应该如何选择多项式才能逼近得最好. 如果考虑后一个问题,那么自然就需要考虑在次数不超过某个固定整数 $n$ 的一切多项式中如何来选择一个与 $f(x)$ 的一致误差最小的多项式的问题,而这正好是切比雪夫逼近的基本思想. 所以可以说切比雪夫和外尔斯特拉斯是逼近论的现代发展的奠基者.

20 世纪初, 在一批杰出的数学家, 包括 C.H. 伯恩斯坦、D. 杰克森、C.dela 瓦莱 - 普桑、H.L.勒贝格等人的积极参加下,开创了最佳逼近理论蓬勃发展的阶段. 这一理论主要在以下几个方面取得了很大进展:

1）最佳逼近的定量理论

在逼近论中系统地阐明函数的最佳逼近值 $E_n(f)$（借助于代数多项式来逼近，或者对 $2\pi$ 周期函数借助于三角多项式来逼近，或借助于有理函数来逼近等）的数列当 $n\to\infty$ 时的性态和函数 $f(x)$ 的构造性质（可微性、光滑性、解析性等）之间内在联系的理论统称为定量理论．下面叙述的定理比较典型地反映出函数的构造性质与其最佳逼近值之间的深刻联系．

杰克森、伯恩斯坦等人的工作对逼近论的发展所产生的影响是深远的．沿着他们开辟的方向继续深入，到 20 世纪 30 年代中期出现了 J.A.法瓦尔、A.H.柯尔莫哥洛夫关于周期可微函数类借助于三角多项式的最佳逼近的精确估计以及借助于傅里叶级数部分和的一致逼近的渐近精确估计的工作．这两个工作把从杰克森开始的逼近论的定量研究提高到一个新的水平．从那时起，直到 60 年代，以 C.M.尼科利斯基、A.N.阿希耶泽尔等人为代表的很多逼近论学者在定量研究方面继续有许多精深的研究工作．

2）逼近论的定性理论

切比雪夫发现了连续函数的最佳逼近多项式的特征，提出了以切比雪夫交错点组著称的特征定理．最佳逼近多项式是唯一存在的．最佳逼近多项式的存在性、唯一性及其特征定理都是定性的结果，对这些问题的深入研究构成了逼近论定性研究的基本内容．匈牙利数学家 A.哈尔在 1918 年首先研究了用广义多项式在 $[A,B]$ 上对任意连续函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式的唯一性问题．在 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个线性无关的连续函数 $\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$．作为逼近函数类可取 $P(x,a_0,a_1,\cdots,a_n)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$，式中，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是任意参数．这样的 $P(x)$ 称为广义多项式．哈尔证明，为了对每一连续函数 $f$，唯一，必须而且只须任一不恒等于零的广义多项式 $P(x,a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 在 $[a,b]$ 内至多有 $n$ 个不同的根．在 20 世纪 20—30 年代，伯恩斯坦、M.Γ.克列因等人对满足哈尔条件的函

数系做过很多深入的研究.它在逼近论、插值论、样条分析、矩量论、数理统计中有着比较广泛的应用.

关于最佳逼近多项式的切比雪夫特征定理也有很多进一步的研究和推广.其中,最重要的一个推广是柯尔莫哥洛夫在1948年做出的,它涉及复平面的闭集上的复值连续函数借助于复值广义多项式的一致逼近问题(见复变函数逼近).

对于$\int[a,b]$,$(1 \leqslant p < +\infty)$内的函数$f$借助于广义多项式在$p$次幂尺度下的逼近问题也建立了类似的一套定性理论.到20世纪五六十年代,经过一些学者的努力,抽象逼近的定性理论建立起来.

3)线性算子的逼近理论

最佳逼近多项式和被逼近函数间的关系除了平方逼近的情形外一般都不是线性关系.线性关系比较简单,线性算子比较容易构造.所以在逼近论发展中,人们一直非常重视对线性逼近方法的研究,形成了逼近论中一个很重要的分支——线性算子的逼近理论.针对特定的函数类、特定的逼近问题设计出构造简便、逼近性能良好的线性逼近方法与研究各种类型的线性逼近方法(算子)的逼近性能,一直是线性算子逼近理论的中心研究课题.在这一方面,几十年来取得了十分丰富的成果.比较著名的经典结果有E.B.沃罗诺夫斯卡娅、G.G.洛伦茨等对经典的伯恩斯坦多项式的研究;柯尔莫哥洛夫、尼科利斯基等对周期可微函数的傅里叶级数部分和的逼近阶的渐近精确估计.20世纪40—60年代,许多逼近论学者对作为逼近方法的傅里叶级数的线性求和过程逼近性能的研究(包括对傅里叶级数的费耶尔平均、泊松平均、瓦莱·普桑平均等经典的线性平均方法的研究).50年代初期,Π.Π.科罗夫金深入研究了线性正算子作为逼近方法的特征,开辟了单调算子逼近理论的新方向(见线性正算子逼近).40年代中期,法瓦尔在概括前人对线性算子逼近的研究成果的基础上,提出了线性算子的饱和性