GXJH 工学结合新思维高职高专财经类
"十二五"规划教材

GAODENG SHUXUE JICHU

高等数学基础

田慧竹 贾俊礼 王建刚 主编

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

工学结合新思维高职高专财经类“十二五”规划教材

高等数学基础

田慧竹　贾俊礼　王建刚　主编

对外经济贸易大学出版社
中国·北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础 / 田慧竹，贾俊礼，王建刚主编. —
北京：对外经济贸易大学出版社，2013
工学结合新思维高职高专财经类“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5663-0732-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①田… ②贾… ③王… Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 150723 号

高等数学基础

田慧竹 贾俊礼 王建刚 **主编**
责任编辑：郭华良 高 卓 姜 昊

对 外 经 济 贸 易 大 学 出 版 社
北京市朝阳区惠新东街 10 号 邮政编码：100029
邮购电话：010－64492338 发行部电话：010－64492342
网址：http://www.uibep.com E-mail：uibep@126.com

唐山市润丰印务有限公司印装 新华书店北京发行所发行
成品尺寸：185mm×260mm 15.25 印张 361 千字
2013 年 8 月北京第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5663-0732-3
印数：0 001－3 000 册 定价：28.00 元

出 版 说 明

工学结合新思维高职高专财经类“十二五”规划教材是对外经济贸易大学出版社贯彻教育部教高［2006］16号《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》精神，联合天津商务职业学院、天津职业大学、河北工业职业技术学院、北京工业职业技术学院、天津国土资源和房屋职业学院、天津海运职业学院等国家、省（直辖市）级示范性高等职业院校推出的一套面向高职高专层次、涵盖不同专业的立体化教材。本系列教材包括国际经贸、财会金融、工商管理、物流管理、电子商务、旅游与酒店管理六个专业。

根据教高［2006］16号文件关于“高等职业院校要积极与行业企业合作开发课程，根据技术领域和职业岗位（群）的任职要求，参照相关的职业资格标准，改革课程体系和教学内容，建立突出职业能力培养的课程标准，规范课程教学的基本要求，提高课程教学质量”的要求，本套教材以提高学生专业实际操作能力和就业能力为宗旨，采取情景模块、案例启发、任务驱动、项目引领、精讲解、重实训的编写方式，让学生在理论够用的基础上，在专业技能培养环节，特别是“教学做一体化”方面有所突破，“确保优质教材进课堂”。

根据国家职业教育的指导思想，目前我国高职高专教育的培养目标是以能力培养和技术应用为本位，其教材建设突出强调应用性和适用性，既要满足专业教育，又能适应就业导向的“双证书”（毕业证和技术等级证）的人才培养目标需要。根据教育部提出的高等职业教育“与行业企业共同开发紧密结合生产实际的实训教材”的要求，本套教材的作者不仅具有丰富的高等职业教育教学经验，而且具有企业第一线实践经历，主持或参加过多项应用技术研究。这是本套教材编写质量与高等职业特色的重要保证。

此外，本套教材配有教师用PPT文稿，方便教师教学参考。

愿本套教材的出版对“十二五”期间我国高等职业教育的创新发展和高职人才培养质量的稳步提升有所助益!

对外经济贸易大学出版社

2010年2月

前　言

高等数学课程是各类专业必修的一门重要基础课。根据教育部最新制定的“十二五”人才培养目标，我们总结多年的高职高专高等数学的教学经验，根据目前高职高专教育发展现状，既考虑应用型人才的培养特点，又考虑学生的可持续发展，编写了《高等数学基础》，教材的编写由实例引入数学概念，再将数学理论应用到实际问题中去；教材内容力求简洁易懂，不过多强调灌输定理及其推理，不牵涉过分复杂的计算和变换，学生能更好地理解相关知识点，符合学生的认知规律和接受能力；注重学生数学素养的培养，充分体现以“应用”为目的，通过本教材的学习能够达到建立数学模型解决实际问题的能力；具备灵活运用数学这一工具分析问题、解决问题的能力，为学生后继课程的学习及生活工作中解决问题提供必要的数学基础。

《高等数学基础》内容分三个部分，第一部分包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、行列式、矩阵，编写体例为每章通过案例或企业的实际问题引入基本概念、正文、课后练习、训练；第二部分为各章的系统复习辅导，包括知识目标、技能目标的内容提要及体现能力迁移的综合范例解析；第三部分为附录，给出常用数学公式和积分表。本教材适合于高职院校、专科院校、成人高校及民办高校各类专业使用。

《高等数学基础》由田慧竹、贾俊礼、王建刚主编。贾俊礼编写第 1-3 章，田慧竹编写第 4-8 章，王建刚编写习题训练，参加本书编写的还有白瑞云、马凤敏、强琴英、节存来、王书田、王力加、宋从芝、李娟和赵会引。由于时间仓促，也限于编者的水平，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2013 年 3 月

目　录

第 1 章　极限与连续

极限是高等数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习函数有关知识的基础上讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

1.1　函　　数

1.1.1　函数概念

1. 函数的定义

定义　设 D 是一个实数集. 如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，y 都有确定的值和它对应，$y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数，x 是自变量，D 为定义域，当 x 取遍 D 中一切实数值时与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域.

如果对于每一个 $x\in D$ 都有唯一的 $y\in M$ 与之对应，那么这种函数称为单值函数，否则就称为多值函数. 若无特殊说明，我们研究的函数都是指单值函数.

两个函数只有当它们定义域和对应关系完全相同时，认为它们是同一函数.

2. 函数的定义域

研究函数时，必须注意函数的定义域. 用数学式子表示的函数的定义域可由函数表达式来确定，要使运算有意义.

例如：

（1）在分式中，分母不能为零；

（2）在根式中，负数不能开偶次方根；

（3）在对数式中，真数大于零；

（4）在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域；

（5）如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域.

3. 函数与函数值的记号

在同一个问题的研究中，如需要讨论几个不同的函数，为清楚区别起见，就要用不同的函数记号来表示. 如 $g(x)$，$h(x)$，$\varphi(x)$ 等.

函数 $y=f(x)$，在 $x=x_0\in D$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$.

4. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有三种：公式法、表格法、图象法.

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图像如图 1-1 所示.

$$f(4)=\sqrt{4}=2\;;\quad f(-4)=-(-4)=4\,.$$

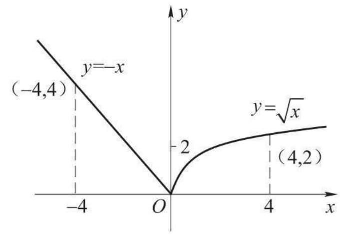


图 1-1

5. 反函数

设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么就建立以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，习惯上表示为 $y=f^{-1}(x)$，称之为 $y=f(x)$ 的反函数，定义域为 M，值域为 D.

$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

6. 函数的几种特性

（1）函数的奇偶性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于 $\forall x\in D$，都有 $f(x)=f(-x)$，则称为偶函数. 否则称为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，如 $y=\sin x$ 是奇函数；偶函数的图像关于 y 轴对称，如 $y=\cos x$ 是偶函数.

（2）函数的单调性.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内随 x 的增大而增大，即对于 $(a,\ b)$ 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内单调增加，区间 $(a,\ b)$ 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间. 单调增加的函数图像从左向右是上升的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内随 x 的增大而减小，即对于 $(a,\ b)$ 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内单调减少，区间 $(a,\ b)$ 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间. 单调减少的函数图像从左向右是下降的.

单调增加或单调减少的函数都称为单调函数，相应的区间称为函数的单调区间.

（3）函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间内的一切 x 值，对应的函数值 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 为在区间 I 内有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 为在区间 I 内无界.

（4）函数的周期性.

对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 T，使得对于定义域内的一切 x，等式

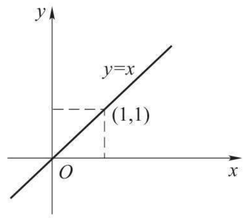
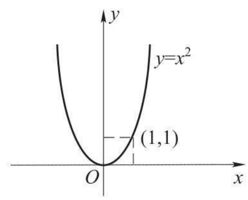
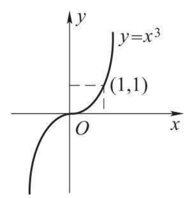
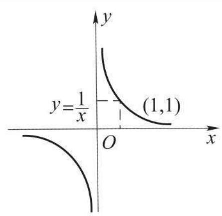
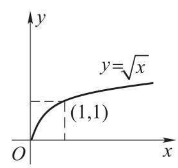
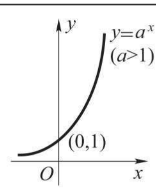
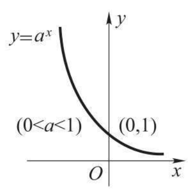
$f(x+T)=f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 叫做这个函数的周期.

如果函数 $f(x)$ 以正数 T 为周期，则 $2T$，$3T$，…，nT $(n\in N)$ 也是它的周期，通常最小的正数 T 称为周期函数的最小正周期.

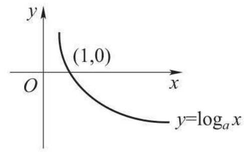
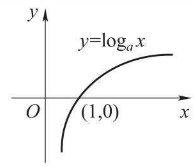
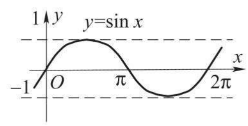
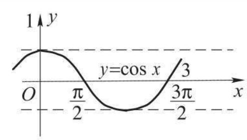
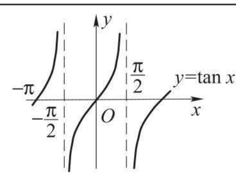
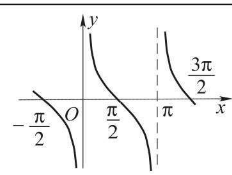
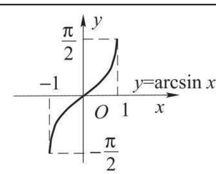
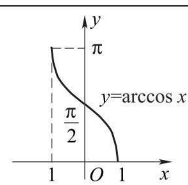
1.1.2 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

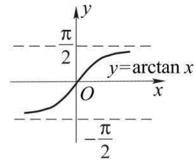
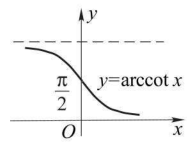
表 1-1　　**基本初等函数**

类别	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上 单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

续表

类别	函数	定义域与值域	图像	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期2π，有界，$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增加 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期2π，有界$(2k\pi,2k\pi+\pi)$单减 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π，$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π，$(k\pi,\ k\pi+\pi)$单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少，有界

续表

类别	函数	定义域与值域	图像	特性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\ \pi)$		单调减少，有界

1.1.3　复合函数、初等函数

设函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 定义域为 D_φ，值域为 $M_\varphi\subset D_f$，由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为复合函数，u 为中间变量.

【例 1】指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{1+x^2}$；　　（2）$y=\lg(1-x)$.

解：（1）$y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成，$x\in R$.

（2）$y=\lg(1-x)$ 是由 $y=\lg u$ 与 $u=1-x$ 复合而成，$x<1$.

注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能形成一个复合函数.

因为对于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 值，$u=2+x^2\geqslant 2$，不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

三个或三个以上的函数只要满足条件，可以构成一个复合函数.

例如，由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合成函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$，u，v 都是中间变量.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

习题 1.1

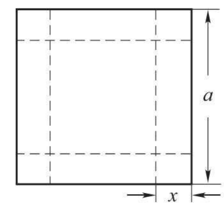
1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}, & -3<x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<x<3\end{cases}$，求 $f(-2)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(4)$.

2. 指出下列各复合函数的复合过程.

（1）$y=(1+x)^4$；　　（2）$y=\sqrt{1+x^3}$；

（3）$y=\mathrm{e}^{x+1}$；　　（4）$y=\cos^2(3x+1)$.

3. 如图所示，有边长为 a 的正方形铁片，从它的四个角截去相同的小正方形，然后折起各边做成一个无盖的盒子. 求它的容积与截去的小正方形边长之间的关系式. 并指出定义域.



第 3 题图

4. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，每 1kg 收费 0.40 元；当超过 50kg 时，超重的部分按每 1kg 收费 0.65 元. 试求运费 y（元）与质量 x（kg）之间的函数关系式；并作出函数的图形.

习题 1.1 答案

1. $f(-2)=\sqrt{5}$，1，$f(2)=3$，$f(4)$ 无意义.
2. 略.
3. $V=(a-2x)^2x$，$x\in\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$.
4. $y=\begin{cases}0.40x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.65x-12.5, & x>50\end{cases}$.

1.2 极　　限

1.2.1 数列的极限

一个无穷数列 x_1，x_2，x_3，…，x_n，…可看作自变量为正整数 n 的函数，$x_n=f(n)$（$n=1$，2，3，…）. 例如

（1）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$，…，$\dfrac{1}{2^n}$，….（图 1-2）

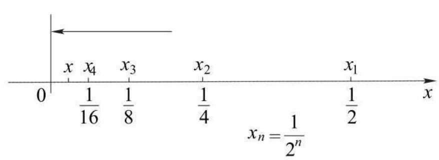


图 1-2

当 n 无限增大时，数 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 对应的点逐渐密集在 $x=0$ 右侧近旁，数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 无限接近于 0.

（2）2，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，….（图 1-3）

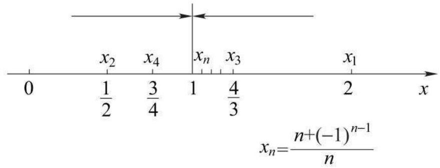


图 1-3

当 n 无限增大时，数 $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 对应的点逐渐密集在 $x=1$ 左右近旁，数列 $\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 无限接近于1.

它们的共同特点：当 n 无限增大时，两个数列都无限接近于一个确定的常数. 下面给出数列极限的定义.

定义　如果当 n 无限增大，即 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　或　当 $n\to\infty$时，$x_n\to A$

数列（1）的极限是 0，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

数列（2）的极限是 1，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

【例 1】 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限：

（1）$x_n=2-\dfrac{1}{n^2}$；　　（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$；　　（3）$x_n=-3$；

（4）$x_n=2^n$；　　（5）$x_n=(-1)^{n+1}$.

解：（1）$x_n=2-\dfrac{1}{n^2}$.

当 n 依次取 1，2，3⋯等自然数时，数列 $\{x_n\}$ 的各项依次为 $2-1$，$2-\dfrac{1}{4}$，$2-\dfrac{1}{9}$，$2-\dfrac{1}{16}$，⋯.

当 n 无限增大时，x_n 无限接近于常数 2，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)=2$.

（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$.

当 n 依次取 1，2，3，⋯等自然数时，数列 $\{x_n\}$ 的各项依次为 $-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$-\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{81}$，$-\dfrac{1}{243}$，⋯.

当 n 无限增大时，x_n 无限接近于常数 0，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}=0$.

（3）$x_n=-3$.

当 $n=1$，2，3，…时，这数列的各项都是 -3，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$；

一个常数列的极限就是这个常数本身，$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

（4）$x_n=2^n$.

当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，不能无限接近于一个确定的常数.

数列 $x_n=2^n$ 的极限不存在.

（5）$x_n=(-1)^{n+1}$.

当 n 无限增大时，x_n 在 1 与 -1 两个数之间跳动，不能无限接近于一个确定的常数，数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 的极限不存在.

1.2.2 函数的极限

根据自变量的变化过程，将分两种情形讨论函数 $y=f(x)$ 的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 如果当 x 的绝对值无限增大，即 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

说明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中至少有一个不存在或两个极限存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

定理 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

下面通过观察几个函数图形，当 $x\to\infty$ 时，了解函数 $f(x)$ 的变化趋势，确定函数的极限.

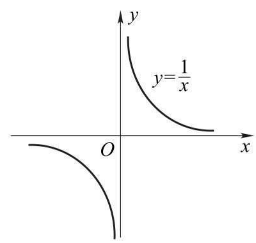


图 1-4

（1）当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0（图 1-4）.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

（2）当 $x\to\infty$ 时，$y=\sin x$ 没有确定的变化趋势，函数值总是在 -1 与 1 之间变动（图 1-5）.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

（3）当 $x\to+\infty$ 时，$y=\arctan x$ 无限接近于 $\dfrac{\pi}{2}$.

当 $x\to-\infty$ 时，$y=\arctan x$ 无限接近于 $-\dfrac{\pi}{2}$.（图 1-6）

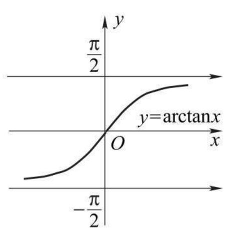


图 1-5

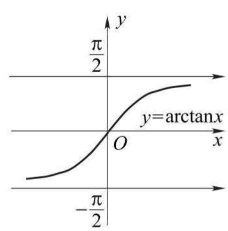


图 1-6

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义　如果 x 无限接近于定值 x_0 时，即 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意：讨论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 是否存在无关. 函数的极限若存在，则唯一.

$x\to x_0$ 时，可以从左侧趋向于 x_0 $(x\to x_0^-)$，也可以从右侧趋向于 x_0 $(x\to x_0^+)$.

左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$

右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少一个不存在或两个极限存在但不等，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 就不存在.

【例 2】讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$（图 1-7）当 $x\to-1$ 时的极限.

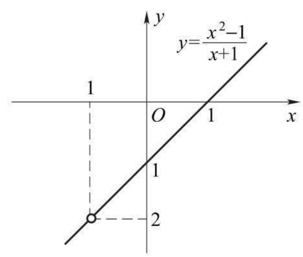


图 1-7

解：函数的定义域 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}(x-1)=-2,$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}(x-1)=-2.$$

$$\therefore\qquad\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

【例 3】 讨论 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$（图 1-8）当 $x\to 0$ 时的极限.

解：求分段函数在相邻定义区间分界点处的左、右极限时，注意要用相应的表达式.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$.

可见　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

故　$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

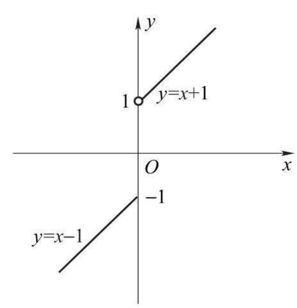


图 1-8

1.2.3　极限的运算

极限的运算法则：

设 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，有 $\lim f(x)=A$， $\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\left[f(x)\bullet g(x)\right]=\lim f(x)\bullet\lim g(x)=AB$；

特别地，$\lim C\bullet f\left(x\right)=C\bullet\lim f(x)=CA$（$C$ 为常数）

$$\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n=A^n(n\in N).$$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

其中，法则（1）、（2）可推广到有限个函数（数列）的情况，对于分母极限为零的分式情况，不能用法则（3）求极限.

【例 4】写出下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)$；（2）$\lim\limits_{x\to 2}x^3$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+7}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3}x\right)+\lim\limits_{x\to 3}1=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}1=\dfrac{1}{3}\times 3+1=2$.

（2）$\lim\limits_{x\to 2}x^3=\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3=2^3=8$.

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+7}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+7)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}5}{\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^3+\lim\limits_{x\to 1}7}=\dfrac{1-2+5}{1+7}=\dfrac{1}{2}$.

分母极限不为零的有理分式函数求极限时，其极限值为函数值.

【例 5】求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x-1}$；（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解：（1）当 $x\to 1$ 时，分子极限不为零，分母极限为零，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-1}=\infty.$$

（2）当 $x\to 3$ 时，分子分母极限均为零，可先约去极限为零的因子 $x-3$，再求极限.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

【例 6】求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{x^3+2x+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{2x^3+x^2+1}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+2}$.

解：（1）当 $x\to\infty$ 时，分子分母均为无穷大. 不能直接用极限的运算法则. 将分子分母分别除以 x^3，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{x^3+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=3.$$