数学学习方法概论

崔连香　编

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社

数学学习方法概论

崔连香　著

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学学习方法概论 / 崔连香著. 天津：天津科学技术出版社，2013. 3
ISBN 978-7-5308-7827-9

I. ①数… II. ①崔… III. ①数学课—中小学—数学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第064859号

责任编辑：侯　萍
责任印制：张军利

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社出版
出版人：蔡　颢
天津市西康路 35 号　邮编 300051
电话（022）23332394
网址：www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
天津午阳印刷有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 10.25　字数 259 000
2013 年 4 月 第 1 版第 1 次印刷
定价：26.00 元

前　　言

近几十年，我国广大数学研究人员一直致力于理论与实践相结合的研究，充分运用教育学、心理学、思维科学、哲学、逻辑学、系统方法论等基本原理，积极探索理论研究与实践，不但开创了数学教学论、数学学习论、数学课程论、数学方法论、数学思维论等许多分支学科或基础学科，而且全面开展了规模宏大的数学基础课程改革活动，多种数学学习改革实验也竞相启动与开展，大大促进了数学学习理论的建设和数学学习质量的提升。

然而，从数学学习方法论的角度来看，哪些学习理论才最“接近”实践？何种学习理论才最有实践力？什么才是持续优秀学习改革实践的关键？其核心理念与思想支撑又是什么？等等，都需要我们进行深入思考。

本书是基于作者多年的学习经验精心编撰而成的，具备以下两大特点：

首先，数学学习方法论体系的构建。数学学习研究，就是拥有较高的专业知识素养和学习理论素养，能够站在“制高点”俯视数学学习中的某些问题。以中小学数学学习理论为根基，了解和掌握中小学学习改革和发展的实际，深入分析和解决中小学学生在学习中存在的具体问题，将二者有效结合，融理论与实践为一体，找准展开数学学习研究的切入点。

其次，遵循数学学习研究的双逻辑起点，既立足教育，又兼顾学习。一方面，数学学习首先是人的学习，因而就相对于一般学习研究而处于下位关系的数学学习研究而言，教育学、心理学等关于教育的一般理论对它无疑有指导意义。也就是说，数学学习中的很多问题，可以用教育学、心理学等现成的理论演绎地解决。本书把

一般的心理学理论系统地概括是一种有益的尝试。另一方面，数学家们对数学的孳根性，决定了它的局限性，限制了它的普适性。本书对数学概念、数学命题、数学解题和数学思维方法等的探讨，应该说就是紧紧抓住数学学习来进行研究，力图使之区别于一般学习理论。

当然，数学学习学科仍属于初创阶段，作为其分支学科之一的数学学习方法论究竟如何创建，同样也会是见仁见智的，但有了良好的开端，随着人们认识的不断深入，相信会有更多相关的理论不断涌现。

崔连香

目　　录

第一篇　透视数学知识

第二篇　透视学习理论

第三篇 透视学习实践

第一篇　透视数学知识

第一章　数学概念学习

第一节　数学概念是什么

一、数学概念的含义和特征

1.数学概念是什么

客观事物都有属于自己的自然属性。在实践活动中，人们对所接触的各种事物的属性有了逐步了解，一般人们对客观事物的认识，是通过感官、直觉形成的，处于感性认识阶段。以感性认识为前提，再对比、分析、总结、归纳出一种事物特有而其他事物所不具备的属性，即事物的本质属性，这便是理性认识阶段，概念便是事物本质属性的体现。

数学是以现实的空间形式和数量关系为研究对象，对数学对象本质属性体现的思维形式称为数学概念。例如，“等腰三角形”这个数学概念，它具有方向、大小、形状等属性，只要紧扣“三条边”这个属性，就能区别一般的多边形；只要抓住“两底角所对应的边相等”这个属性，就能区别一般的三角形。“三条边”“两底角所对应的边相等”就是等腰三角形概念的本质属性。若从众多属性中将本质属性进行抽离，再以这些本质属性为整体，便形成了“等腰三角形”这个清晰的数学概念。由此可见，本质属性与属性不可分离。它是概念属

性的一部分，但已不是本质属性。

数学概念一般会用特殊的名称或符号来表示。名称或符号和与之相关的概念应当属于两个不同的范畴。名称或符号的内容是概念的体现，是人们认识事物结果的表达，并通过概念的名称或符号这种语言形式来表达概念。不同的名称或符号有时会表示同一个概念，如“3” “三” “three”都表示同一个数。又如，等边三角形和正三角形表达同一个数学概念。因此，在进行名称或符号的使用时，注重的是它的内容，即与之相关的概念自身。有时同一个名称会根据不同的情况，表达不同的概念。

2.数学概念的特征

（1）数学概念是一切思维形式的根基

概念构成了判断，判断构成了推理，判断和推理又构成了论证。在概念的基础上，才能进行判断和推理，进而开始论证。因此，概念是一切思维形式的根基，被称为抽象思维的细胞。

数学概念是最基本、最重要的数学知识，通过数学概念才能进行判断、推理和论证。例如，有了角的概念，才能作出关于角的命题、推理和证明。因此，掌握数学概念，是学好数学的前提之一。

（2）数学概念的抽象性

某些客观事物是通过数学概念直接反映出来的。如，整数、角 、线、面等。但是，绝大多数数学概念是以某些数学概念为基础，通过抽象概括才逐步形成和发展的。如，无理数、复数，就分别是在有理数系和实数系的基础上形成的。

数学概念无论直接还是间接的反映一类对象的本质属性，都具有抽象性。以正方形概念为例，现实生活中没有抽象的正方形，只有各种各样的具体的正方形，从某种意义上说，数学概念与现实严重“脱钩”。正因为抽象的程度远远高于现实的原始对象，数学概念才有如此广泛的应用。

（3）数学概念的逻辑性

数学中的大多数概念，要么通过限制方法缩小概念的外延，要

么通过总结方法扩大概念的外延，从而使概念具有一系列的从属关系。例如，正方形是有四个内角为直角的平行四边形；又如，所有数系的具体含义不在考虑之内，只考虑其运算性质，可总结成群、环、域等概念。相应地，此类概念具有从属性，可形成一个概念系列，从而将数学概念的逻辑性体现出来。

（4）数学概念的发展性

概念是相对稳定的。但是，随着客观事物的不断发展，人们对客观事物的认识也在不断增加，概念也就随之变化，概念的发展、变化，或是被赋予了新的含义，或是增加了更丰富的内涵，或是具备了更高的抽象性。

如小学数学中所学的数，始终是 0 和正有理数；初中数学中所学的角，始终是 0°~180°的角。然而，数、角的概念一直在不断发展中。又如，自然数→有理数→实数→复数；锐角→0°~180°的角→0°~360°的角→ 平面任意角→空间角，等等。

二、数学概念的内涵和外延

1.内涵与外延的概念

概念的内涵是指被概念反映物质的根本属性。概念的外延是指集合了一切具有概念内涵的物质。概念的内涵体现了概念的质的特点，它对概念所反映的物质进行了详细的说明；概念的外延描述了概念的量的特点，它对概念所反映的范围进行了阐明，只要是科学的概念，都是有确定的内涵和外延的。

例如，“偶数”的概念内涵是“能被 2 整除”的本质属性，其外延是全体的偶数；“一元二次方程”的概念内涵是“只含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的等式”的本质属性，其外延是全体形如 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的方程。

概念的内涵与外延确定了，便可将概念更好地认识和把握，不然就会出现差错。因此要加深认识概念的内涵与外延，同时还要掌握它们之间的关系。

2.内涵与外延的相互关系

概念的内涵与外延既相互联系又相互制约。当扩大概念的内涵时，概念的外延就缩小；当缩小概念的内涵时，概念的外延就扩大。我们将内涵与外延之间的这种关系，称之为反变关系。例如，在“平行四边形”这一概念的内涵中，增加“有三个角是直角”这一属性，便使外延缩小得到“正方形”的概念；而减少“两组对边分别平行”这一属性，就使外延扩大得到“四边形”的概念。又如，在等腰三角形概念的内涵中，减少“有两条边相等”这一属性，就是三角形的内涵，而三角形的外延却远远大于等腰三角形的外延，但值得一提的是，这种反变关系，是以概念外延的比较为切入点，并与内涵之间关系的分析相结合的。

3.概念的界定与总结

一般通过概念的界定与总结对概念之间的关系进行了解。

（1）概念的界定

概念的限定是指为将概念的认识从一般过渡到特殊，遵循反变关系，使概念的内涵增加，由概念的较大外延过渡到概念的较小外延。如：增加数列的内涵“从第二项开始，每一项与它的前一项的商都等于同一个常数”，就是等比数列，这样数列的内涵增加，外延缩小，就由数列过渡到等比数列。又如：增加三角形的内涵“两条边相等”，即成为等腰三角形，这样等式的内涵增加，外延缩小，就由三角形过渡到等腰三角形。

正确的界定必须以概念的种类关系为基础逐级进行，而界定的结果，外延大的概念必须包含着外延小的概念，如果种类关系中不包含界定的系列，那界定就是错误的，必须加以纠正。

（2）概念的总结

我们对一些特殊概念到一般概念的认识，依旧遵循反变关系，通过减少概念的内涵，可完成一个具有较小外延的概念到一个具有较大外延的概念的过渡，成为总结性的概念。例如，由正整数到整数、由整数到有理数、由有理数到实数、由实数到复数的过渡，就

是一个逐级总结的过程。

从某种角度上说，数学概念的逻辑系统，真实地反映了概念的界定和总结，将概念的界定和总结有效地把握住，有助于我们对各类学习概念体系进行认知，以及掌握概念之间的内在联系，使数学概念更好地系统化。

三、数学概念的相互联系

为了了解数学概念，势必要对互相联系着的概念进行对比，即进行外延与内涵之间的比较，对其相互之间的联系进行研究。本书介绍的数学中常见的联系，是以比较概念的外延为切入点并结合内涵之间的关系进行分析的。

1.概念相容

两个概念的外延如果有一部分相同，则认定两个概念之间具有相容关系。相容关系有以下三种情况：

（1）概念相同

两个概念的外延如果完全相同，则认定两个概念之间具有相同关系，这两个概念称为相同概念，相同关系可用图 1-1 表示。

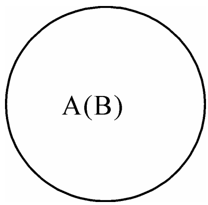

图 1-1

提出相同关系的原因，是由于虽然概念的内涵由外延完全确定，但内涵可以有不同的表现形式。通过对相同关系的研究，可以更深刻、更全面地认识概念的本质属性，以致在推理证明中，可以相互代换这些等价的本质属性，以便于更容易地解决问题。

例如，“等边的三角形”与“等角的三角形”这两个概念，虽然问题是从不同角度进行说明的，但是，它们的外延完全相同，指的是

同一个对象。又如，“等边三角形底边上的中线”与“等边三角形底边上的高”；同一个圆中的“直径”与“最大的弦”等，它们之间都具备相同的关系。

（2）概念从属

如果一个概念的外延包含另一个概念的外延，那么认定这两个概念之间具有从属关系。外延较大的概念称为属概念，外延较小的概念称为种概念，如图 1-2 所示。

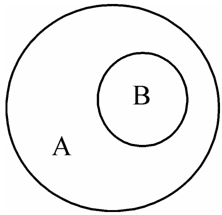

图 1-2

例如，“正方形”“矩形”“四边形”之间的关系是从属关系。“矩形”“菱形”都是“正方形”的属概念。“正方形”的两个属概念中，其内涵于属概念之差最小的是“矩形”，我们称矩形为正方形的最邻近的属概念。

种概念是相对于属概念而言的。例如，“正方形”这一概念，相对于“矩形”概念来说是属概念，而相对于“四边形”概念来说却是种概念。

从内涵角度看，显然属概念包含了种概念的一切属性，而两者又有不同的本质属性，种概念包含属概念的一切属性，属概念的内涵被种概念的内涵真包含。如果以固定的一个概念为基础，增加其内涵或缩小其外延，就可以得到原概念的一个种概念；减少其内涵或扩大其外延，就可以得到原概念的一个属概念。

（3）概念交叉

如果两个概念的外延有且只有部分相同，那么认定这个概念之间具有交叉关系，这两个概念称为交叉概念。如图 1-3 所示。

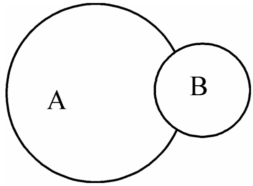

图 1-3

例如，“等腰三角形”与“直角三角形”、“正数“与”“整数”、“菱形”与“平形四边形”等概念之间都具备交叉关系。

两个交叉概念的外延相同部分所反映的事物，同时具备这两个概念的所有属性。另一方面，由这个外延的相同部分就引伸出了另一个概念，它相对于原来的两个概念来说都是种概念。如把“正数”和“整数”概念进行交叉，其外延相同部分是正整数概念的外延，正整数同时包含了正数和整数的一切属性。把“菱形”和“平行四边形”概念进行交叉，其外延相同部分是长方形的外延，长方形概念同时是菱形和矩形概念的种概念，它的内涵同时包含了菱形和平行四边形的内涵。

2.概念不相容

如果两个交叉概念的外延部分没有任何相同之处，即它们没有交集，那么认定这两个概念之间为不相容关系或全异关系。不相容关系有以下两种情况。

（1）概念对立

在同一概念之下的两个种概念，它们的外延如果交集是空集，而属概念的外延又大于外延的并集，那么认定这两个种概念之间为对立关系，这两个种概念称为对立概念。如图 1-4 所示。

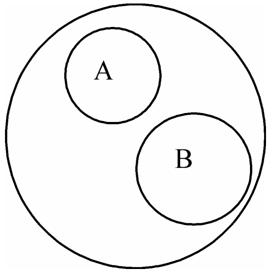

图 1-4

例如，“负数”与“正实数”的两个概念是对立关系，因为它们具有相互排斥的外延，而它们最邻近的属概念“实数”的外延大于其外延之和。又如，“整数”与“实数”、“等腰三角形”与“直角三角形”等概念之间都具备对立的关系。

对立概念虽然都包含所给定属概念的属性，但它们是相排异的，所反映的对象都各不相同；另一方面，在给定的属概念中所反映的存在着不属于两个种概念中任何一个对象，即非此非彼的对象存在。如 0 既不是正整数，也不是负整数。

（2）概念矛盾

两个种概念在同一属概念之下，它们的外延如果没有交集，而外延的并集又是这个属概念的外延，那么认定这两个种概念之间具有矛盾关系，将这两个概念称为矛盾概念。如图 1-5 所示。

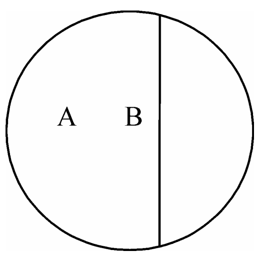

图 1-5

例如，“正数”与“非正数”、“实数”与“非实数”、“等腰三角形”与“非等腰三角形”、“相同”与“不相同”等概念之间的关系，都属于矛盾关系。

矛盾关系也都包含给定属概念的属性，同时它们也是排异的。给定的属概念所反映的每个对象针对这两个种概念都有非此即彼的关系。

值得一提的是，如果对两个具有不相容关系的概念进行说明，可以对二者的外延直接对比；但如果对关系的对立还是矛盾作进一步说明，则需要针对同一个给定的属概念才能讨论。例如“正数”和“负数”两个概念，相对于属概念“有理数”来说，它们是对立关系；而相对于属概念“非有理数”来说，它们又是矛盾关系。

四、数学概念的含义

1.概念的含义

含义是概念建立的逻辑方式。人们在对新事物的认知过程中，通过抽象思维形成概念，同时辅以语言或符号，对其进行确定和传达，这就是概念的含义。事物的本质属性通常是被抽象思维加以精炼的语言或符号并采用逻辑的方式来揭示出的。

下定义可以通过对事物的本质属性进行直接揭示，也可以对概念的外延进行揭示，这是因为概念的内涵完全由概念的外延所决定。

对定义的正确性，通常具备三要素，即被定义项、定义项和定义联项，定义项的概念被其明确，而被定义项和定义项的词语是被定义联项使用来联接的。

比如，等边三角形的定义是“等边三角形就是三条边都相等的三角形”。这里的定义采用了“……就是……”的形式，如果用“A1 就是A2”来表示它，这里的 A1 就成为被定义项，A2 称为定义项，“就是”称为定义联项。

概念含义的正确性是任何定义都不能证明的，但是将概念定义的理由对学生进行说明是非常有必要的。