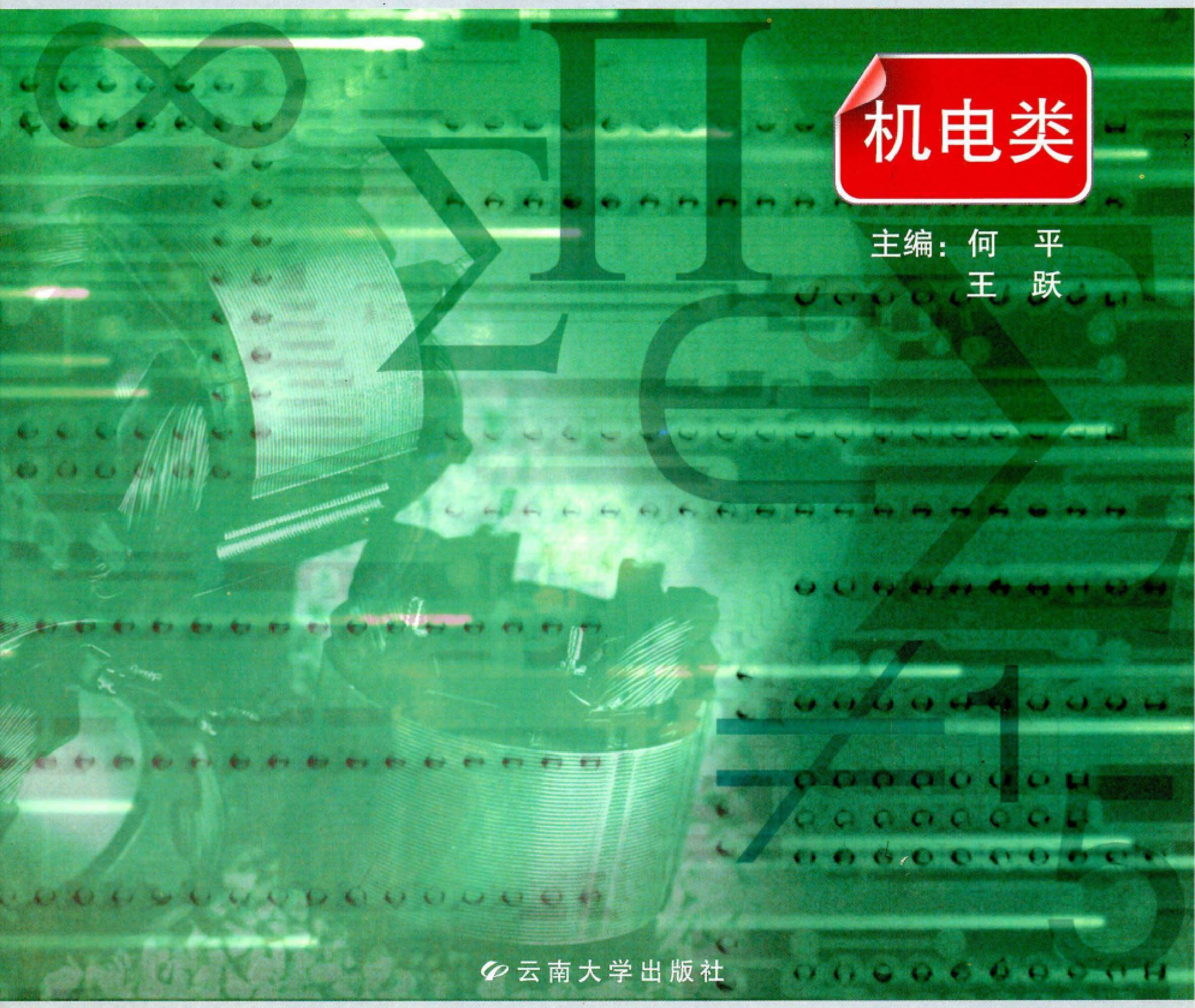
高职院校高等数学公共课教材

高等应用数学



机电类

主编：何　平
王　跃

云南大学出版社

高等应用数学（机电类）

主　编　何　平　王　跃
副主编　杨清荣　曹学才
　　　　周　宁　王　荣

云南大学出版社

编写说明

本教材介绍了一元微积分、多元微分、微分方程、无穷级数、付里叶级数、付里叶变换、拉普拉斯变换、线性代数、复数、二重积分、三重积分、概率论等知识，增加了微积分的电学意义，加强了控制系统中数学模型的建立及求解，通过控制系统中传递函数的建立将高等数学与电学专业知识有机结合，旨在提高学生学习高等数学的兴趣，培养学生综合应用高等数学知识的能力和创新意识。

本教材适合电气类、机电类、计算机类等相关专业人员使用。

由于种种原因及高等数学课程的特殊性，高职院校高等数学课程的改革存在着许多争议，其中心问题是如何改。传统的教学内容和教学模式一直困扰着高数的改革，成为改革的难点。许多高职院校都根据自身的情况做了多方面有益的尝试，但教学内容及模式没有根本性的改变。当今，高职高专数学教学缺乏体现高职教育特点的课程大纲，所使用的教材也缺乏高职教育应有的特点。本教材对高职高等数学教学进行了一次新的尝试，通过对昆明冶金高等专科学校电气学院电气专业班级的调查和意见反馈，取得了较好的效果。

本教材以电类专业为背景，对《高等应用数学》的教学内容和方法做了新的探索。

1. 在编写教材之前，对电专业的核心课程做了深入了解，搞清了该专业所需要的数学知识点。通过对二三年级的学生做调研，了解过去的数学教学中哪些知识与专业知识链接的不够，做到有的放矢。高职教育要培养学生应用数学和较好地适应未来变化的能力，教学中就应要求学生学好能普遍适用的数学概念，对概念的理解尽可能地给出专业背景，而且把表达式中的字母

与专业中的应用习惯相匹配来进行教学。

2. 增加数学模型。对本专业所需要的导数、微分、不定积分、定积分，付里叶变换、拉普拉斯变换等内容，我们以电气专业的问题为背景，通过数学模型的建立来学习概念和定理。这样使学生更易将数学知识融入到专业中去，更好地为专业知识的学习服务。实际上体现的是“事实求是”的思想和精神，也是“务实”的工作作风在教学工作的具体表现。实践证明，数学建模是培养学生思维素质，提高学生应用数学工具解决实际问题的应用能力和创新能力的有效手段，而且以专业知识为背景，能起到与专业更好链接的作用。

要特别说明的是，本教材强调的是专业所需要的数学方法，不追求数学系统的完美。

参加编写本教材的学校有：昆明冶金高等专科学校，云南省轻工业学校。

编写人员：第一章：王跃，扬清荣，曹学才；第二章：曹学才，方兵；第三章：周宁，曹学才；第四章何平，曹学才；第五章：王跃；第六章：何平，李建业；第七章：扬清荣，王荣；第八章：何平，李建业；第九章：何平，王荣；第十章：何平；第十一章：何平。

学时安排：建议150学时，其中第一章至第六章90学时，第七章至第十一章60学时。

由于编者的水平有限，编写的时间仓促，书中的错误与疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2011年6月

目　　录

第一章　函数与复数

第一节　函数的概念

一、变　量

我们在观察各种自然现象或解决各种实际问题的时候，会遇到许多的量．这些量一般分为两类：一类是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量；另一类是在这一过程中会发生变化的量，这种量称为变量．高等数学的研究对象是变量．在数学中，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系．尽管如此，研究过程中还是需要注意它们的具体意义．变量的变化范围即是其取值范围．

设 a、b 为有限数，且 $a<b$，则：

（1）$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，可表示为 $x \in [a, b]$；

（2）$\{x \mid a<x \leqslant b\}$，可表示为 $x \in (a, b]$；

（3）$\{x \mid a \leqslant x<b\}$，可表示为 $x \in [a, b)$；

（4）$\{x \mid x \geqslant a\}$，可表示为 $x \in [a, +\infty)$；

（5）$\{x \mid x<b\}$，可表示为 $x \in (-\infty, b)$；

（6）$x \in R$，可表示为 $x \in (-\infty, +\infty)$.

在这里，“∞”并不表示数量，它仅是一个记号，前面的“$+$”、“$-$”号表示方向．

二、一元二次不等式的解集

$y=ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$ 称为二次函数，其图像为抛物线．由以下因素确定其图像：

（1）开口方向$\begin{cases} a>0，抛物线开口向上 \\ a<0，抛物线开口向下 \end{cases}$；

（2）$y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点坐标：

令 $ax^2+bx+c=0$，则$\begin{cases} \Delta=b^2-4ac>0，有两个实根\ x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Delta=b^2-4ac=0，有两个相等实根\ x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a} \\ \Delta=b^2-4ac<0，无实数根 \end{cases}$

上述表明：

1）$\Delta>0$ 时，抛物线 y 与 x 轴有两个交点；

2）$\Delta=0$ 时，抛物线 y 与 x 轴有一个交点；

3）$\Delta<0$ 时，抛物线 y 与 x 轴无交点；

（3）顶点坐标：$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

例 1　求 $x^2-3x+2\geqslant 0$ 的解集.

解： $y=x^2-3x+2$ 的图像为抛物线，其中 $a=1>0$，抛物线开口向上.

令　$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=2.$

由图 1－1 可知，原不等式的解集为$(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)$.

例 2　求 $4-x^2<0$ 的解集.

解： $y=4-x^2$ 的图像为抛物线，其中 $a=-1<0$，抛物线开口向下.

令 $4-x^2=0\Rightarrow x=\pm 2$.

由图 1－2 可知，原不等式的解集为$(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

例 3　求 $x^2+2x+3>0$ 的解集.

解： $y=x^2+2x+3$ 的图像为抛物线，其中 $a=1>0$，抛物线开口向上.

令 $x^2+2x+3=0$，无实数解，表明抛物线 $y=x^2+2x+3$ 与 x 轴无交点.

由图 1－3 可知，原不等式的解集为 $x\in R$.

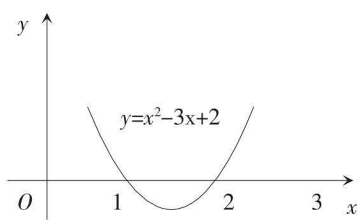


图 1－1

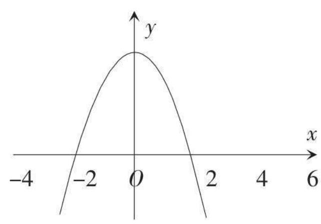


图 1－2

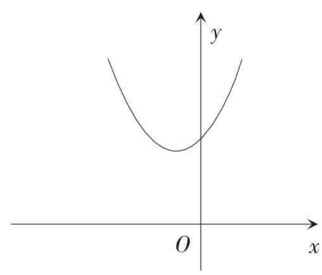


图 1－3

三、含绝对值的不等式

（1）$|x|\leqslant a(a>0)\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$；

（2）$|x|\geqslant a(a>0)\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.

例 4　求 $|x-x_0|<\delta$ 的解集（δ 为正常数）.

解： 因为 $-\delta<x-x_0<\delta$

所以 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$

故原不等式解集为$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

例 5　求 $\left|\dfrac{2x+1}{x-3}\right|>1$ 的解集.

解： 原不等式等价于 $\dfrac{2x+1}{x-3}>1$　　　　（1）

或　$\dfrac{2x+1}{x-3}<-1$　　　　（2）

由（1）$\dfrac{2x+1}{x-3}-1>0$ 得：

$$\frac{x+4}{x-3}>0\Leftrightarrow (x+4)(x-3)>0$$

由图 1 -4 可知解为：$x<-4$ 或 $x>3$；

由(2) $\frac{2x+1}{x-3}+1<0$ 得：

$$\frac{3x-2}{x-3}<0\Leftrightarrow(3x-2)(x-3)<0$$

由图 1 -5 可知解为：$\frac{2}{3}<x<3$.

故原不等式解集为 $(-\infty,\ -4)\cup\left(\frac{2}{3},\ 3\right)\cup(3,\ +\infty)$.

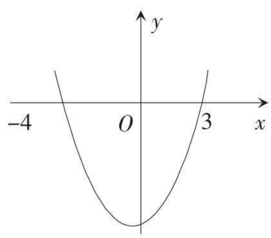


图 1 -4

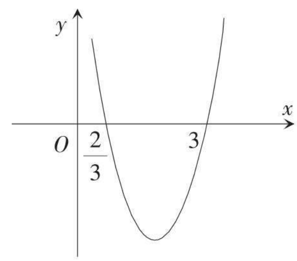


图 1 -5

四、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个数集，如果对于 D 中的每一个 x，存在某种规则 f，通过 f，都有唯一确定的 y 值与 x 值相对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**函数**，D 称为函数 y 的**定义域**.

2. 函数的定义域

使函数有意义的自变量的范围称为**函数的定义域**.

求定义域应注意：

(1) 若函数中含有分式，则分母不能为零；

(2) 若函数中含有偶次根式，则被开方数大于等于 0；

(3) 若函数中含有对数，则真数大于 0；

(4) 若函数中含有反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，则 $|x|\leqslant 1$；

(5) 若函数中包含有多个子式子，则求其各自定义域的交集.

例 6　求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^3+2x^2+4x+7$；　(2) $y=2^{\cos\frac{1}{x}}$；　(3) $y=\frac{\lg(x-1)}{(x-1)(x+3)}$；

(4) $y=\frac{\ln(x+3)}{\sqrt{2-x^2}}$；　(5) $y=\frac{\arcsin(x-1)}{x+3}$.

解：(1) 因为 $x\in R$，所以 $D=(-\infty,\ +\infty)$；

(2) 因为 $x\neq 0$，所以 $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$；

(3) 因为 $\begin{cases}x-1>0\Rightarrow x>1\\(x-1)(x+3)\neq 0\Rightarrow x\neq 1 \text{ 且 } x\neq -3,\end{cases}$

所以 $D=(1,\ +\infty)$；

（4）因为$\begin{cases}x+3>0\Rightarrow x>-3\\ 2-x^2>0\Rightarrow x^2<2\Rightarrow |x|<\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\end{cases}$

所以 $D=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$；

（5）因为$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x-1\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 2\\ x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3,\end{cases}$

所以 $D=[0,\ 2]$.

3. 函数值

设 $y=f(x)$，$x\in D$. 取 $x_0\in D$，则通过 f 有唯一确定的 y_0 与 x_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**函数值**，记作 $y_0=f(x_0)=y|_{x=x_0}$.

例 7 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f(0)$，$f(a)$.

解：$f(0)=\sqrt{1+0^2}=1$，$f(a)=\sqrt{1+a^2}$.

例 8 设 $f(x)=\sin x$，求 $f(1+h)$，$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

解：$f(1+h)=\sin(1+h)$；

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sin(1+h)-\sin 1}{h}=\frac{2\cos\frac{1+h+1}{2}\sin\frac{1+h-1}{2}}{h}$$

$$=\frac{2\cos\frac{2+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\left(\text{提示：}\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2}, & x\geqslant 1\\ 1, & x<1\end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(3)$.

解：$f(-1)=1$，$f(1)=\dfrac{1^2-1}{2}=0$，

$f(3)=\dfrac{3^2-1}{2}=\dfrac{8}{2}=4$.

例 10 设 $f(x)=2^x$，$g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解：$f[g(x)]=2^{g(x)}=2^{\sin x}$，

$g[f(x)]=\sin f(x)=\sin 2^x$.

例 11 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x+1}{x^2}(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解：令 $u=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$，则$\dfrac{1}{x}=u-1$，故 $x=\dfrac{1}{u-1}$.

$$\text{即} f(u)=\frac{\frac{1}{u-1}+1}{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2}=\frac{\frac{u}{u-1}}{\frac{1}{(u-1)^2}}=u^2-u.$$

所以 $f(x)=x^2-x$.

4. 函数相等的概念

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow(1)\ D_f=D_g$（$D_f$：表示 $f(x)$ 的定义域）；

(2)对应关系相同或值域相等.

例 12　下列函数是否相同?

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;　　(2) $y=\ln\sqrt{x-1}$与 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$;

(3) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$与 $y=x^2+x+1$;　　(4) $y=x$ 与 $y=x(\sin^2 x+\cos^2 x)$.

解:(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$的定义域相同,都为 $x\in R$,但对应法则不同;

(2) $y=\ln\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $D=\{x\,|\,x>1\}$,$y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$的定义域也为 $\{x\,|\,x>1\}$,且它们的对应法则相同;

(3) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq1\}$,$y=x^2+x+1$ 的定义域为 $x\in R$;

(4) $y=x$ 的定义域为 $x\in R$,$y=x(\sin^2 x+\cos^2 x)=x$ 的定义域也为 $x\in R$,且它们的对应法则相同;

故(1)、(3)是不同的函数,(2)、(4)为相同的函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=x^2-x+1$;　　(2) $y=\sqrt{2x-3}$;　　(3) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$;

(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-6}}$;　　(5) $y=\log_3(x^2-x+1)$;　　(6) $y=\arccos(1-x^2)$;

(7) $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}+\sqrt{x-1}$;　　(8) $y=\sqrt{5-x^2}+\ln(x-1)$.

2. 下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $y=\ln x^5$ 与 $y=5\ln x$;　　(2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$;　　(4) $y=1$ 与 $y=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$,求$f(x-1)$.

4. 设$f(x)=x^3-x$,$\varphi(x)=\sin 2x$,求$f\left[\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.

5. 设$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求$f[f(x)]$.

6. 设$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{5}{t}+2t^2$,求$f(t)$,$f(t^2+1)$.

第二节　函数特性

一、单调性

定义　设 $y=f(x)$，$x\in D$，x_1，$x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$.

（1）若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 为 D 上的**单调递增函数**；

（2）若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 为 D 上的**单调递减函数**.

例 1　求 $y=\dfrac{\sqrt{2^x-1}}{\sqrt{\lg x-1}}$ 的定义域.

解：因为 $\begin{cases}2^x-1\geqslant 0\\ x>0\\ \lg x-1>0\end{cases}$，

而 $2^x-1\geqslant 0\Rightarrow 2^x\geqslant 2^0$，且 $y=2^x$ 为单调递增函数，

所以 $x\geqslant 0$；

又 $\lg x-1>0\Rightarrow \lg x>\lg 10$，且 $y=\lg x$ 为单调递增函数，

所以 $x>10$；

故 $D=(10,\ +\infty)$.

二、有界性

设 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在常数 $M>0$，使得对每一个 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上有界.

常用的有界函数：

$y=\sin x$，$x\in R$；$y=\cos x$，$x\in R$；$y=\arctan x$，$x\in R$；$y=\mathrm{arccot}\,x$，$x\in R$.

注意：函数的有界性与自变量的取值范围有关.

例如：$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内无界，但在 $[1,\ 2]$ 上却是有界的.

三、周期性

设函数为 $f(x)$，$x\in D$. 若存在常数 $T>0$，使得对任意 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. T 称为 $f(x)$ 的周期. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T 称为 $y=f(x)$ 的**最小正周期**.

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的最小正周期为 $T=2\pi$；

$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的最小正周期为 $T=\pi$.

又如：$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 2　设 $f(t)$ 的周期为 T，如图 1－6，试写出 $f(t)$ 在一个周期内的表达式.

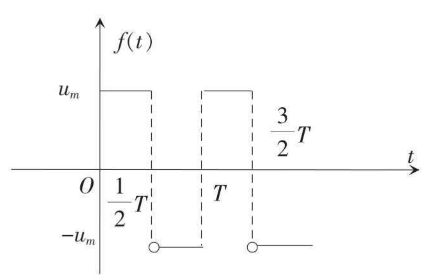


图 1－6

解：$f(t)=\begin{cases} u_m & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2} \\ -u_m & \dfrac{T}{2}<t\leqslant T \end{cases}$.

例 3　已知 $f(t)=t^2$，$t\in[-1, 1]$，$f(t)$ 周期为 $T=2$，作出 $f(t)$ 的图像.

解：如图 1－7 所示.

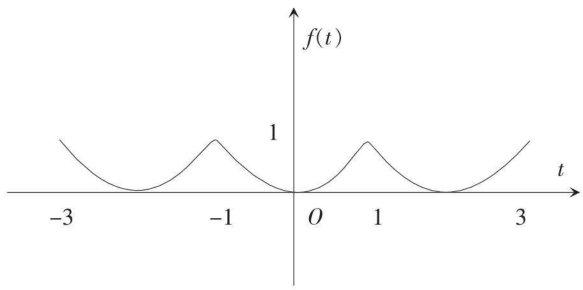


图 1－7

四、奇偶性

设 $y=f(x)$，$x\in(-a, a)$. 对于每一个 $x\in(-a, a)$：

（1）若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；

（2）若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 4　判断 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解：因为 $f(-x)=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

习题 1－2

1. 讨论函数 $y=x(x^2-1)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的单调性.

2. 讨论下列函数的奇偶性：

（1）$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$；　（2）$y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；　（3）$y=x\arcsin x$；

（4）$y=\mathrm{e}^{-x^2}$；　（5）$y=x+\tan x$；　（6）$y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{12}$.

3. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试讨论函数 $f[g(x)]$、$f[f(x)]$ 的奇偶性.

4. 下列函数中，哪些是周期函数？若是，指出其周期：

（1）$y=\sin^2x$；　（2）$y=x\sin x$；　（3）$y=\cos\pi x$；　（4）$y=\tan4x$.

第三节　初等函数

一、反函数

1. 反函数的定义

设 $y=f(x)$，$x\in D_f$，$y\in R_f$（R_f：表示 $y=f(x)$ 的值域）．若对 R_f 中的每一个 y，在 D_f 中都有唯一确定的 x 与之相对应，则称这样形成的函数 x 为 $y=f(x)$ 的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$．

但习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，故实际称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数．

有关反函数要注意：

（1）$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

（2）$y=f(x)$ 的定义域 D_f 为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；

$y=f(x)$ 的值域 R_f 为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域；

（3）只有 D_f 到 R_f 建立双方单值对应时，$y=f(x)$ 才有反函数．否则需要对 D_f 作限制，使得 $f(x)$ 在限制后的区域与值域之间建立双方单值对应时，$y=f(x)$ 才具有反函数．

例如：$y=2^x\Rightarrow x=\log_2 y$，故 $y=2^x$ 的反函数为 $y=\log_2 x$．

$y=2^x$ 的值域为 $(0,+\infty)$，故 $(0,+\infty)$ 为 $y=\log_2 x$ 的定义域；

$y=2^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故 $(-\infty,+\infty)$ 为 $y=\log_2 x$ 的值域．

2. 反三角函数

（1）反正弦函数．

对 $y=\sin x$，当 $x\in R$ 时，$y=\sin x$ 没有反函数．

但当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$y\in[-1,1]$ 时，$y=\sin x$ 有反函数．

所以 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 为 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$（限制了的定义域）上的反函数．

注意：

1）$y=\arcsin x$ 是一个角，且 $\sin(\arcsin x)=x$；

2）当 $x>0$，$\arcsin x$ 为一个锐角；

当 $x<0$，$\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)$；

3）$y=\arcsin x$ 为奇函数，即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$．

（2）反余弦函数．

$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$，$y\in[-1,1]$ 的反函数为：

$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$．

注意：$y=\arccos x$ 为非奇非偶函数，有 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$；

当 $x>0$ 时，$\arccos x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$；

当 $x<0$ 时，$\arccos x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$．