线性代数与算法语言

刘治平
孟昭孝
编

前　言

本书分两篇，第一篇〈线性代数〉，第二篇〈算法语言〉分别由刘治平、孟昭孝二同志编写。该书系编者自一九七二年以来的讲稿，并于一九七八年，在煤炭部地质局举办的“数学地质学习班里”讲用的基础上，又参照一九七八年二月西安教材会议精神，进行修改和补充而成。

〈线性代数〉的内容处理上，与一般写法不同。是以线性方程组的理论和解法为核心，阐述了行列式与其基本性质以及解线性方程组的克莱姆法则；介绍了矢量和矩阵的基本运算；结合线性方程组的求解引进了系数矩阵与增广矩阵的秩，从而对方程组的相容性进行了探讨；线性方程组的数值解法是线性代数的重要应用之一，本书用了较多的篇幅介绍了线性方程的数值介法及病态方程的求介问题；抽象性较强的矢量空间（线性空间）理论及特征值和特征向量在后两章中均有介绍。

〈算法语言〉中，对于所用的大部分公式都给予了理论上证明，或几何直观的说明；对所介绍的程序大都画出了框图，尤其对于较大型程序如何由公式转化为程序的步骤作了较细致的介绍，给自学提供了方便。对１２１机、７０９机和108—乙机的异同性，在附录中给出了对比，从而使读者在学完１０８—乙机之后，又能立即掌握１２１机和７０９机，也便于读者能在１０８—乙机和１２１机及７０９机上进行实习。在学完第三章或第四章之后，便可安排第一次上机实习，最后再进行提高性的上机实习。

全书附有一定数量的习题，并有答案，可供读者练习和参考。

本书经杨卜安付教授审阅，并提出许多宝贵意见。编者特致所衷心地感谢。

由于编者理论水平和实践经验有限，有不足之处，恳请读者批评指正。

编者1980年12月

目　录

第一篇　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩　阵

第三章　线性方程组的数值解法

第四章　线性空间与线性变换

第五章　特征值与特征矢量

第二篇　算法语言

第一章　基本概念

第二章　说明部分

第三章　语句部分

第四章　表达式

第五章 语句部分（续）

第六章 常用算法举例

第七章 上机前准备与操作

第一篇　线性代数

第一章　行列式

我们已经学过二元和三元一次方程组的解法。二元一次方程组的解，可以简单地用公式把它写出来。三元一次方程组的解，若把它直接写成公式，就繁得多了。对于更多元的一次方程组的解的问题，若用公式直接写出来，那就更困难而繁杂得多了。行列式就是从解一次方程组中总结出来的一种规律性的、常用的数学工具。用行列式就可以把任意多元一次方程组的解，简明地用公式把它写出来。

假定读者对二阶、三阶行列式已有初步的了解，但为了较系统地学习行列式的有关问题。本章从三阶行列式开始，进而转入到一般的n阶行列式。对于n阶行列式的计算方法和性质，都是在三阶行列式的基础上而提出来的，因此仅作为三阶行列式的推广，不再作严格而详细的讨论。要求会计算n阶行列式，并知道多元一次方程组用行列式求解的法则——克来姆法则。

必须指出，行列式虽然是研究和求解一次方程组的重要而且常用的工具，但随着近代计算技术的发展，产生了很多更快速、更有效的方法，使行列式在解高阶（几百个方程甚至上千个方程）一次方程组时，已无实用价值。然而它在理论上还是经常用到的。

§1　三阶行列式

试看三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \tag{1—1}$$

我们可以用初等数学的逐步消元法来求式（1—1）的解。在这里，我们将三个方程各乘以适当的数之后相加，使相加后同时消去两个未知数，直接得到一个未知数的解。试取三个数为u、v、w，分别乘以三个方程，再相加就得到

$$(a_{11}u+a_{21}v+a_{31}w)\ x+\ (a_{12}u+a_{22}v+a_{32}w)\ y + (a_{13}u+a_{23}v+a_{33}w)\ z=b_1u+b_2v+b_3w \tag{1—2}$$

为要消去y和z，只要适当选取u、v、w使y和z的系数等于零就行，即令

$$\begin{cases} a_{12}u+a_{22}v+a_{32}w=0 \\ a_{13}u+a_{23}v+a_{33}w=0 \end{cases} \tag{1—3}$$

这是一个包含两个方程，三个未知数的方程组。任意给定w以后，u和v就可以解出来

了。因此，将u、v、w满足的方程组（1—3)改写成

$$\begin{cases} a_{12}u+a_{22}v=-a_{32}w \\ a_{13}u+a_{23}v=-a_{33}w \end{cases} \tag{1—4}$$

于是

$$u=\frac{\begin{vmatrix} -a_{32}w & a_{22} \\ -a_{33}w & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}w$$

$$v=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32}w \\ a_{13} & -a_{33}w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}w$$

由此可见，我们可以选取

$$u=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$v=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$w=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

这样就消去y和z了，从而得到

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\right)x$$

$$=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1—5}$$

我们看到，式（1—5）的左端x的系数和右端有完全“同样”的算式。求解三元一次方程组，就是要反复地计算这样一些算式。因此，我们给这些算式命名为三阶行列式，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1—6}$$

同理

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (1—7)$$

一般地说，三阶行列式是把九个元素排成一个正方阵，两边画上竖线，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1—8)$$

式中，横排称为行；竖排称为列；a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 称为该行列式的元素；i表示行数，j表示列数。

三阶行列式（1—8）表示一个算式，它运算的结果是一个数。而式（1—6）和（1—7）称为三阶行列式按列的展开式。这里我们把第一列元素a_{11}、a_{21}、a_{31}突出来了，如果把第二列a_{12}、a_{22}、a_{32}或第三列a_{13}、a_{23}、a_{33}突出来，并分别乘以不在该列和该行的元素所成的二阶行列式，并冠以符号，则称为三阶行列式按第二列或第三列的展开式。

同样地，若突出的是第一行元素a_{11}、a_{12}、a_{13}或第二行元素a_{21}、a_{22}、a_{23}或第三行元素a_{31}、a_{32}、a_{33}，并分别乘以不在该行和该列的元素所成的二阶行列式，且冠以符号，那就称为三阶行列式按行的展开式。这将在下一节详述。

由上所述，我们看到：元素a_{11}所乘的那个二阶行列式，正是三阶行列式中划去a_{11}所在的行和列的元素后，剩下的四个元素所组成的二阶行列式，称这个二阶行列式为元素a_{11}的子行列式，记为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理，其它元素的子行列式也可以按上述原则而写出，比如元素a_{21}的子行列式为

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若在子行列式M_{ij}前冠以$(-1)^{i+j}$，则称此为元素a_{ij}的代数余子式，记为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (i、j=1、2、3) \qquad (1—9)$$

其中i为a_{ij}的行数；j为a_{ij}的列数。比如

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}$$

有了三阶行列式的概念后，我们就可以将方程组（1—1）的解，用行列式的公式很简明

地写出来（假定D≠0）

$$x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D};\quad z=\frac{D_z}{D}$$

其中D是方程组（1—1）的系数组成的行列式，称为方程组的系数行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

D_x是这个行列式中，把x的系数a_{11}、a_{21}、a_{31}换成常数项b_1、b_2、b_3而成的行列式，即

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

同样地

$$D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

§2　三阶行列式的计算及展开

在§1中，我们求解方程组(1—1)时，先是同时消去y和z，并总结出行列式的概念，且按第一列的展开式有

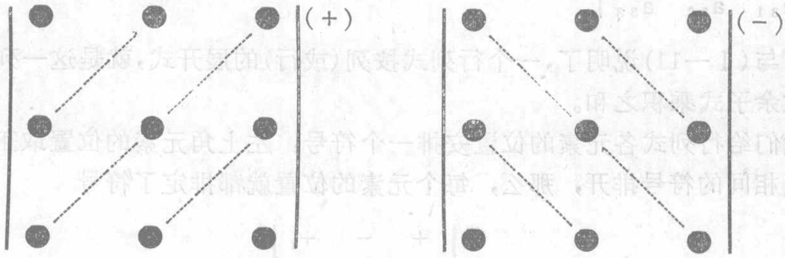
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{13}a_{22}$$

从这里可以看出：三阶行列式所表示的算式，是由六项的代数和而成。其中三项正的，三项负的。同时，每一项中的元素取自于不同的行和列。就是说在同行和同列中只能取一个元素。对于同一项的元素来说，同行和同列的元素不能同时出现。按此规律，三阶行列式的

计算有如下法则——对角线法则



左图为三正项所取元素的乘积；右图为三负项所取元素的乘积。

例 1　计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+(-4)\cdot3\cdot2+2\cdot1\cdot1-2\cdot3\cdot2-1\cdot3\cdot2-5\cdot(-4)\cdot1=10$$

例 2　计算 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot3+2\cdot2\cdot3+5\cdot1\cdot5-3\cdot1\cdot5-1\cdot2\cdot3-3\cdot2\cdot5=-5$$

当我们熟练这一计算法则后，对于三阶行列式是可以很快地算出其结果来的。

现在我们再回头看看(1—6)和(1—7)式，就可以发现它们有如下特点：

1)乘上a_{ij}的那个二阶子行列式，正是三阶行列式中划去a_{ij}所在的第i行和第j列后剩下的四个元素所成的二阶行列式。

2)a_{ij}前的符号与$(-1)^{i+j}$相同，也就是当元素a_{ij}的行数i与列数j之和为偶数时，取正号；当i与j之和为奇数时，取负号。由此，我们便可得到关于三阶行列式按列展开的计算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \quad (j=1、2、3) \qquad (1—10)$$

同理，有按行展开的计算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i=1、2、3) \qquad (1—11)$$

式(1—10)与(1—11)说明了，一个行列式按列(或行)的展开式，就是这一列(或行)的元素与各自的代数余子式乘积之和。

如果我们给行列式各元素的位置安排一个符号：左上角元素的位置取正号，从此开始，行与列按正负相间的符号排开，那么，每个元素的位置就都排定了符号

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

这样一来，元素a_{ij}的代数余子式就是它的子行列式乘上它所在位置的符号。

有了三阶行列式的概念及其计算后，我们就不难将三元一次方程组的解用行列式表示出来，且能迅速而准确地求得它的解。

例3 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

解

因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8; \qquad D_x=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9; \qquad D_z=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=6;$$

于是，原方程组的解为

$$x=\frac{-11}{8}; \qquad y=\frac{-9}{8}; \qquad z=\frac{-3}{4}$$

§3 三阶行列式的性质

行列式既然是反映数量间某种特殊的运算关系，它必然有它自己的规律。我们从行列式的运算中，归纳出如下的几个基本性质，这对行列式的计算及其应用都是极为有用的。

性质１　　行与列对换其值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1-12)$$

证明　将(１—12)式的左端按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

将(１—12)式右端按第一列展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

显然，二阶行列式按对角线法则计算是可以对换其行与列的。所以，比较以上二式便知（１—12）式成立。

性质２　两行（或两列）对换，行列式变号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \qquad (1-13)$$

证明　将(１—13)式左端按第一列展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

将（１—13）式右端按第三列展开

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

比较以上二式的结果便知（１—13）式成立。

性质3　把一列（或一行）上的元素同乘一数k，新行列式的值等于原行列式的值的k倍，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1-14)$$

这个性质说明了，在同一行（或列）上的元素有公因数时，可以提到行列式之外。

性质4　若一列（或行）上的元素各为二数之和，则该行列式可分为相应的两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质3与性质4读者可仿前自证。

思　考　题

1)若行列式中有一列（或行）的元素均为零时，其值为何？

2)若行列式中有两列（或行）的元素均相等时，其值为何？

3)若行列式中有两列（或行）的元素成比例时，其值为何？

4)若行列式中，把一列（或行）上各元素都乘以数K再加到另一列（或行）上，其值为何？

最后，我们指出：按行列式的性质及按列（或行）的展开，不难证明，行列式中一列（或行）的元素乘上自身的代数余子式之和等于该行列式；但一列（或行）的元素乘另一列（或行）元素的代数余子式之和，其值为零。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{i1} = \begin{cases} D & \text{当} j=1\text{时} \\ O & \text{当} j\neq 1\text{时} \end{cases}$$

其中D为原行列式。同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}a_{1j} = \begin{cases} D & \text{当} i=1\text{时} \\ O & \text{当} i\neq 1\text{时} \end{cases}$$

练　习　题

1）证明

$$\begin{vmatrix} a & o & o \\ o & b & o \\ o & o & c \end{vmatrix} = abc$$

2）利用性质证明

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = a(a-b)(b-c)$$

3）利用性质证明

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

4） 计算下列行列式的值：

（1） $$\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$$ （-22680）

（2） $$\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$$ （0）

（3） $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$$ （$4abcdef$）

5） 解下列线性方程组：

（1） $$\begin{cases} x+2y+Z=0 \\ 2x-y+Z=1 \\ x-y+2Z=3 \end{cases}$$ （$x=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，$Z=\frac{3}{2}$）

（2） $$\begin{cases} x+y+Z=1 \\ 2x-y-Z=1 \\ x-y+Z=2 \end{cases}$$ （$x=\frac{2}{3}$；$y=-\frac{1}{2}$，$Z=\frac{5}{6}$）

§4 高阶行列式

高于三阶以上的行列式，称为高阶行列式。它的一般形式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad n>3$$

前面已经知道，三阶行列式可按对角线法则计算其值。但四阶及其以上的行列式就不能直接按对角线法则计算其值，这时就必须按列（或行）展开，以降低行列式的阶数而逐步计算。然而，三阶行列式有关的若干性质完全适用于高阶行列式。这里，我们先看看行列式所具有的某些共同特性，从中找出它们的规律。

行 列 式 特 征 对 照 表

阶　数	元素个数	算式项数	各 项 的 组 成	正 负 项 数
2	$2^2=4$	$2!=2$	不同行和列中只取一个元素作乘积，这时只有两种可能。	一项正 一项负
3	$3^2=9$	$3!=6$	同上，有六种可能	三项正 三项负
4	$4^2=16$	$4!=24$	同上、有24种可能	12项正 12项负
…	………	…………	……………………	………
n	n^2	$n!$	同上，有$n!$种可能	正负项各半

从上表可见，任意阶的行列式，其算式的项数就是该行列式的阶数的阶乘。换句话说，也就是阶数的全排列。而且在这些项数中，正的项和负的项各占一半。现在的问题是：在所有这些排列中，能否找到一定的规律，以便确定各项的符号。为此，我们引进如下概念。

我们知道，若有三个自然数1、2、3，它的全排列有123、132、213、231、312、321等6种，除此外，再无其它。这即是$3!=6$。同理，四个自然数便有$4!=24$种全排列。一般地，n个自然数便有$n!$种全排列。在这些排列中，我们发现有两种情况：一是从小到大按顺序的排列；另一种是没有按顺序排列。例如123便是按顺序排列，132或312就不是按顺序排列。为此，我们

定义　若在某个排列中，较大的数排在较小的数的前面，便称这个排列有一个反序。

比如　123，无反序，反序数记为0；

132，一个反序，反序数记为1；

312，二个反序，反序数记为2；

321，三个反序，反序数记为3。

如何计算任意排列的反序数呢？

设有一组自然数的排列，首先数在1前面的个数，比如为n_1个，数毕划掉1（划掉后就不再计算）。其次数在2前面的个数，比如为n_2个，数毕划掉2。以此类推，一直数到最后一个数。把所有的反序个数n_1、n_2、……加起来便是该排列的反序个数。

例　设有一组自然数54321876的排列，试求它的反序数。

解　在1前面有4个数，所以1的反序数为4；

在2前面有3个数，所以2的反序数为3；

在3前面有2个数，所以3的反序数为2；

在4前面有1个数，所以4的反序数为1；

在5前面没有数，所以5的反序数为0；

在6前面有2个数，所以6的反序数为2；

在7前面有1个数，所以7的反序数为1；

在8前面没有数，所以8的反序数为0。

于是，排列54321876的总反序数为4＋3＋2＋1＋2＋1＝13。

有了反序概念后，我们就可以由此确定行列式中算式的各项的符号。

定义.行列式中每一行和列任取且只取一个元素作乘积，便作成算式中的一项，这项的符号由所取各元素足标的反序个数而定：若足标的反序个数为偶数时，则该项取正号；若足标的反序个数为奇数，则该项取负号。

由此，我们有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\Sigma(-1)^N a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}。\qquad (1-15)$$

其中N为i_1，$i_2\cdots i_n$和j_1，j_2，$\cdots j_n$的反序数之和。

例1、试确定$a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$的符号。

解、　在$a_{11}a_{23}a_{32}$中，行的足标为123无反序，即反序数为0；列的足标为132有一个反序，即反序数为1。于是，行与列的足标的反序数之和为奇数，故$a_{11}a_{23}a_{32}$前应取负号，即$-a_{11}a_{23}a_{32}$。

在$a_{12}a_{23}a_{31}$中，行的足标为123，反序数为0；列的足标为231，反序数为2。行与列的反序数之和为偶数，故这项应取正号，即$+a_{12}a_{23}a_{31}$。

例2　计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

解　按每一行和列取而且只取一元素的乘积作成一项的原则，不难看出，这个行列式的项有$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$四项，除此外其它各项均为0。这四项的符号分别是：

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，行的足标1234反序数为0；列的足标1234反序数为0。所以应取正号，即$+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$。

$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，行的足标1234反序数为0；列的足标4321反序数为6，所以应取正号，即$+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$。

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，行的足标1234反序数为0；列的足标1324反序数为1，所以应取负号，