随机动力系统的吸引子与偏微分方程的解

赵文强　陈尚杰　著

重庆大学出版社

随机动力系统的吸引子与偏微分方程的解

赵文强　陈尚杰　著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍随机动力系统的吸引子和偏微分方程的解的研究成果. 全书共 8 章,内容包括带加法白噪声的 Reaction-Diffusion 方程,p-Laplacian 类型方程,磁流体动力学系统和耗散 Camassa-Holm 方程模型的吸引子的存在性,以及 Schrödinger-Maxwell 方程、Klein-Gordon-Maxwell 系统、一阶 Hamilton 系统解和多解的存在性等.

本书可供高等院校应用数学专业的研究生和教师,以及与数学相关的学科领域的科研工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机动力系统的吸引子与偏微分方程的解/赵文强,
陈尚杰著. —重庆:重庆大学出版社,2012.8
ISBN 978-7-5624-6854-7

Ⅰ.①随… Ⅱ.①赵… ②陈… Ⅲ.①随机系统—动力系统(数学)—吸引子—微分方程解法②随机系统—动力系统(数学)—偏微分方程—微分方程解法 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 163572 号

随机动力系统的吸引子与偏微分方程的解

赵文强 陈尚杰 著
策划编辑:杨粮菊
责任编辑:谭 敏 曾春燕 版式设计:杨粮菊
责任校对:杨长英 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:邓晓益
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编:401331
电话:(023) 88617183 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
POD:重庆书源排校有限公司

*

开本:787×1092 1/16 印张:8.375 字数:209 千
2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5624-6854-7 定价:38.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换
版权所有,请勿擅自翻印和用本书
制作各类出版物及配套用书,违者必究

前言

自然科学与工程技术领域中广泛出现的非线性问题，越来越受到科学家与工程师的重视. 有关非线性的研究课题，遍及不同的学科和领域. 而非线性偏微分方程是对众多非线性现象进行模拟的有力工具. 最近几十年来，物理、力学、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融等领域中诞生了许多偏微分方程. 特别的是大量的自然奥秘以及科学系统的物理属性，体现在偏微分方程中，从而偏微分方程成为天然的信息载体.

近 20 年来，随机非线性偏微分方程出现在大量的实际问题中，如大气海洋中的环流问题，非线性波在随机介质中的传播，股票价格的波动规律等均有随机偏微分方程的描述. 而关于随机动力系统的研究要稍晚一些，20 世纪 90 年代初，Crauel，Flandoli 和 Schmalfuss 引入随机动力系统概念，并对随机动力系统的长时间发展行为的描述给出了随机吸引子的概念，建立了随机动力系统理论体系的基石，为随机吸引子的研究作出了开创性的工作. 该理论抓住了具有最可能粗糙白噪声的动力系统的本质特征，更好地描述了应用科学中的非线性现象，很快吸引着越来越多的同行工作者的研究兴趣. 但是由于方程的非线性以及随机扰动的复杂性，使得对许多带白噪声非线性偏微分方程的随机吸引子研究具有很大的挑战性.

另外在偏微分方程中，椭圆型偏微分方程，简称椭圆型方程，是一类重要的偏微分方程. 早在 1900 年，希尔伯特提出的著名的 23 个问题中，就有 3 个问题是关于椭圆型方程与变分法的. 椭圆型方程代表了一大类物理问题的数学模型，在流体力学、弹性力学、电磁学、几何学和变分法中都有应用. 拉普拉斯方程是椭圆型方程最典型的特例. 这正是上百年以来，直到今天，该领域仍吸引着很多研究者关注的原因. 半线性椭圆方程是线性椭圆方程向非线性推广的第一步，而半线性椭圆系

统是半线性椭圆方程的自然推广. 关于有界区域上的半线性椭圆方程和系统,已经有了相当丰富和深刻的结果,而对于无界区域的情况,由于其研究的难度要困难许多,相关结果目前还不是很完善,有很多值得研究的问题.

在本专著中,讨论了带白噪声的Reaction-Diffusion方程,p-Laplacian类型方程,磁流体动力学系统,色散波方程,等等在不同Sobolev空间上吸引子及其稳定点的存在性问题. 也研究了与椭圆型密切相关的Schrödinger-Maxwell方程、Klein-Gordon-Maxwell系统等偏微分方程和系统的解的存在性问题. 全书共有8章,内容的安排以及具有特点的新结果如下.

第1章介绍随机动力系统的发展历程和研究现状,给出了随机吸引子的相关概念和理论. 同时,在以Hilbert空间L^2上随机吸引子存在为前提,研究了随机动力系统在$L^p(p\neq 2)$空间上随机吸引子的存在性问题,并探讨了该随机吸引子和L^2空间上的吸引子之间的关系,这里的随机动力系统定义在无界域上.

第2章讨论带加法白噪声的Reaction-Diffusion方程

$$\mathrm{d}u+(\lambda u-\Delta u+f(x,u))\mathrm{d}t=g(x)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}h_j\mathrm{d}w_j(t),$$

边界条件:

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbf{R}^N$$

这里λ为正常数,g和$h_j(1\leqslant j\leqslant m)$是$\mathbf{R}^N$上的实值函数,非线性函数$f(x,u)$满足给定的增长和耗散条件. $\{w_j(t)\}_{j=1}^m$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上相互独立的双边实值Wiener过程,其中$\Omega=\{\omega\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^m):\omega(0)=\mathbf{0}\}$,$\mathcal{F}$是由$\Omega$的紧拓扑所生成的Borel σ-代数,$\mathbb{P}$是$(\Omega,\mathcal{F})$上的Wiener测度. 通过验证方程解的尾部任意小,获得了上述方程生成的随机动力系统在$L^p(\mathbf{R}^N)$空间上的渐近紧性,我们称为(L^2,L^p)-渐近紧. 从而获得了(L^2,L^p)-随机吸引子的存在性.

第3章讨论有界域$D\subset\mathbf{R}^N$上带加法白噪声的p-Laplacian类型方程

$$\mathrm{d}u+(\Delta(\Phi_p(\Delta u))+g(x,u))\mathrm{d}t=f(x)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}\phi_j\mathrm{d}W_j(t),$$
$$x\in D,t\geqslant 0,$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

边界条件：

$$\Delta u(t)=\mathbf{0},\quad u(t)=0,\quad x\in\partial D,t\geqslant 0,$$

初值条件：

$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in D.$$

方程中，$\Phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p\geqslant 2$，外力函数$g(x,s)$满足给定的耗散和增长条件，$\phi_j\in W_0^{4,p}(D)$，$\{W_j(t)\}_{j=1}^m$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上独立的双边实值Wiener过程，其中$\Omega=\{\omega\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^m):\omega(0)=\mathbf{0}\}$，$\mathcal{F}$是由$\Omega$的紧拓扑所生成的Borel σ-代数，$\mathbb{P}$是$(\Omega,\mathcal{F})$上的Wiener测度. 证明了在给定的假设下，上述方程解的唯一存在性和对初值的连续依赖性，从而获得了唯一随机动力系统的存在性. 接下来，通过对解的先验估计和巧妙运用Laplacian算子的Dirichlet形式的性质，获得解的正则性，从而证明了方程生成的随机动力系统在$L^2(D)$上存在紧的吸收集. 最后，研究了方程稳定点的存在性.

第4章讨论定义在有界光滑区域$\Theta\subset\mathbf{R}^2$上带加法白噪声的磁流体动力学方程组：

$$\begin{cases}\mathrm{d}v+[(v\cdot\nabla)v-S(B\cdot\nabla)B-\nu_1\Delta v+\nabla P]\mathrm{d}t\\ \qquad=F(x,v)\mathrm{d}t+\phi_1\,\mathrm{d}w_1(t),\\ \mathrm{d}B+[(v\cdot\nabla)B-(B\cdot\nabla)v-\nu_2\Delta B]\mathrm{d}t\\ \qquad=G(x)\mathrm{d}t+\phi_2\,\mathrm{d}w_2(t),\\ \mathrm{div}\,v=0,\ \mathrm{div}\,B=0.\end{cases}$$

边界条件：在$(0,+\infty)\times\Gamma$上，

$$v=0;\ B\cdot n=0,\ \mathrm{curl}\,B\times n=0,$$

初值条件：

$$v(x,0)=v_0,\ B(x,0)=B_0,\quad x\in\Theta.$$

其中，$P=P(x,t)$是未知的总压强，常数$\nu_1,\nu_2,S>0$，未知函数$v=(v_1(x,t),v_2(x,t))$，$B=(B_1(x,t),B_2(x,t))$，已知函数$G(x)=(g_1(x),g_2(x))\in L^2(\Theta)^2$，$F(x,v)=(f_1(x,v_1),f_2(x,v_2))$满足给定条件，$\{w_j(t)\}_{j=1}^2$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上相互独立的双边实值的Wiener过程，其中$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^2):\omega(0)=\mathbf{0}\}$，$\mathcal{F}$是由$\Omega$的紧拓扑所生成的Borel σ-代数，$\mathbb{P}$是$(\Omega,\mathcal{F})$上的Wiener测度，可得该方程组生成的随机动力系统具有随机吸引子.

第5章考虑一类色散浅水波方程模型，也就是带加法白噪声的耗散Camassa-Holm方程模型

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u-\mathrm{d}u_{xx}+(3u\,u_x-\varepsilon(u_{xx}-u_{xxxx}))\mathrm{d}t\\&=(2u_xu_{xx}+uu_{xxx})\mathrm{d}t+Q\mathrm{d}W(t),\\&u(0,x)=u_0(x),\quad x\in I=[0,L],t>0,\end{aligned}$$

并设方程具有周期边界条件. 方程中,$W(t)$ 是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的双边实值Wiener过程,$Q$是$\mathbf{R}^m\to L^2(I)$上的有界线性算子. 证明了方程生成的随机动力系统分别在Hilbert空间$H^1(I)$和$H^2(I)$上存在有界吸收集,于是利用紧嵌入定理得到随机吸引子的存在性.

第6章考虑了下面的非线性含时Schrödinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi-i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}+W(x)\varphi+\lambda'\phi\varphi=g(x,|\varphi|)\varphi$$

与Poisson方程

$$-\Delta\phi=|\varphi|^2$$

所构成的系统,这里$\hbar$是Plank常数,m是质量,i是虚数单位,$\lambda'>0$是参数,W和ϕ都是$\mathbf{R}^3$上的实函数,分别表示有效势能和电磁势能,$\varphi(x,t):\mathbf{R}^3\times[0,+\infty)\to\mathbf{C}$. 对上述问题感兴趣的是寻求其稳定态的解(或者说驻波解),即形如$\varphi(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}}$的解,其中$E$是分离常数. 则不难看出,$u$必须满足

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\lambda\phi u=f(x,u), & x\in\mathbf{R}^3,\\-\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbf{R}^3,\end{cases}$$

这里$V(x)=(2m/\hbar^2)(W(x)-E)$,$\lambda=(2m/\hbar^2)\lambda'$并且$f(x,u)=(2m/\hbar^2)g(x,|u|)u$. 如此一个系统称为Schrödinger- Maxwell方程,也称为Schrödinger-Poisson方程,有着非常有意义的物理背景. 事实上,根据经典的物理模型,带电颗粒与电磁场的相互作用就能用复合的非线性Schrödinger方程与Maxwell方程来描述. 特别是,如果要寻找静电类型的解,就不得不求解该系统. 在关于V和f的各种假设下,运用临界点理论中的喷泉定理、集中紧性原理、山路引理和Ekeland变分原理,分别得到了Schrödinger-Maxwell方程高能量解、非平凡解和多解的存在性.

第7章处理了下面的Klein-Gordon-Maxwell系统

$$\begin{cases}-\Delta u+[m^2-(\omega+\mathrm{e}\phi)^2]u=f(x,u)+h(x), & x\in\mathbf{R}^3,\\-\Delta\phi+\mathrm{e}^2\phi u^2=-\mathrm{e}\omega u^2, & x\in\mathbf{R}^3,\end{cases}$$

这里m,ω和e是实常数. 这样的系统用来描述三位空间中非线性稳定Klein-Gordon方程与电磁场相互作用产生的孤立波. 这里m和e分别是颗粒的质量和电量,然而ω表示相对系统不知道的因素,是联系颗粒的场u和电磁位势ϕ. 非线性项

的出现用来模拟众多颗粒的作用或者外部非线性项的干扰. 在关于 V 和 f 的各种假设下，运用临界点理论中的山路引理和 Ekeland 变分原理，分别得到了 Klein-Gordon-Maxwell 系统多解的存在性.

第 8 章研究了一阶 Hamilton 系统

$$\dot{p} = -H_q(p,q,t)$$
$$\dot{q} = H_p(p,q,t)$$

周期解和无穷多个不同的次调和解的存在性. Hamilton(哈密顿) 系统是非线性科学中的一个重要领域，由于这类系统广泛存在于数理科学、生命科学以及社会科学的各个领域，特别是天体力学、等离子物理、航天科学以及生物工程中的很多模型都以 Hamilton 系统(或它的扰动系统) 的形式出现. 如：旋涡的平面运动、单摆运动、三种群 Volterra 模型、三体问题等. 近 200 年来，非线性 Hamilton 系统一直是数学家和物理学家的重要研究领域. 近年来这一领域中的新的研究成果已经在非线性分析、代数拓扑、数学物理和微分几何(特别是辛几何) 等诸多学科中产生了重大的影响. 因此，非线性 Hamilton 系统的研究多年来长盛不衰，成为当今非线性科学研究中一个最富有成果又生机勃勃的研究方向.

本书是一部关于随机动力系统吸引子和偏微分方程解的存在性的学术专著，内容完全是作者近年来对相关问题的心得体会和一些公开发表的研究结果. 全书由赵文强、陈尚杰共同撰写，作者排名不分先后. 具体分工如下：第 1 章至第 5 章由赵文强撰写，第 6 章至第 8 章由陈尚杰撰写. 作者撰写本书，参阅了国内外大量的学术研究成果，在此向有关作者表示诚挚的感谢！同时衷心感谢重庆大学出版社的有关同志！

限于著者水平，书中缺点及欠妥之处在所难免，恳请专家和读者批评指正.

赵文强　　陈尚杰

2012 年 3 月

目 录

第 1 章　随机动力系统的(L^2,L^p)-吸引子 …… 1
1.1　研究问题及背景 …… 1
1.2　随机动力系统的相关概念 …… 3
1.3　(L^2,L^p)-随机吸引子 …… 5
第 2 章　随机 Reaction-Diffusion 方程的吸引子 …… 11
2.1　Reaction-Diffusion 方程生成的随机动力系统…… 12
2.2　随机吸引子的存在性 …… 13
2.3　主要定理的证明 …… 13
第 3 章　随机 p-Laplacian 类型方程的吸引子 …… 24
3.1　函数空间及相关符号 …… 24
3.2　带加法白噪声 p-Laplacian 方程生成的随机动力系统 …… 25
3.3　随机动力系统的存在唯一性 …… 26
3.4　随机吸引子的存在性 …… 29
3.5　主要结果的证明 …… 30
第 4 章　随机磁流体动力学方程的吸引子 …… 36
4.1　函数空间及相关符号 …… 37
4.2　带加法白噪声 Magneto-Hydrodynamics 方程生成的随机动力系统 …… 38
4.3　随机吸引子的存在性 …… 39
4.4　主要结果的证明 …… 39
第 5 章　随机色散波方程的吸引子 …… 49
5.1　带加法白噪声 Camassa-Holm 方程生成的随机动力系统 …… 49
5.2　随机吸引子的存在性 …… 51
5.3　主要结果的证明 …… 52

第 6 章　Schrödinger-Maxwell 方程解的存在性 …… 59
6.1　Schrödinger-Maxwell 方程高能量解的存在性 …… 61
6.2　Schrödinger-Maxwell 方程基态解的存在性 …… 69
6.3　非齐次 Schrödinger-Maxwell 方程多解的存在性 …… 86
第 7 章　非齐次 Klein-Gordon-Maxwell 方程多解的存在性 …… 91
第 8 章　一阶超二次 Hamilton 系统周期解的存在性 …… 96
8.1　基本结构和预备知识 …… 99
8.2　定理证明 …… 101
参考文献 …… 110

第 1 章

随机动力系统的(L^2, L^p)-吸引子

1.1 研究问题及背景

自然界中大多数事物的运动都是随着时间或位置的变化而演变的，如行星、流体等的运动. 这一演化过程的数学模型，通常可以用一些参变量或关于参变量的函数满足的方程来表示，称之为系统. 动力系统是指系统中包含有时间变量，它主要是研究系统的状态随时间变量演化的规律性，概括地说，动力系统理论着重研究状态随时间变量发展的系统的全局（大范围）定性行为. 动力系统概念起源于19世纪末庞加莱（Poincaré）对动力学问题的研究工作，直到20世纪60年代，随着微分几何和微分拓扑理论的深入研究，动力系统理论才得到重要发展. 如今在系统控制、天体力学、流体力学、化学反应、生态和人口问题等许多方面的研究中，动力系统理论都有着广阔的应用前景.

动力系统理论中基本的、最重要的研究课题之一，就是要揭示系统长期发展所表现出的动力学性质和基本动力特征；特别是要揭示时间无穷时的终态情况，而这一终态情况（或长时间行为）一般是很复杂的，仅靠简单计算或直观是难以弄清楚的. 然而对于耗散动力系统来说，吸引子（attractors）可以很好地描述系统的长时间发展行为. 动力系统的吸引子是状态空间（或相空间）中的最大的有界不变集，吸引系统中的所有轨道. 它的几何特征非常复杂，但是它包含系统的所有平衡点及平衡点的不稳定流形；它还包含所有周期轨、同异宿轨及更为复杂的分形或仿分形. 由此可见，吸引子能够刻画动力系统状态的长时间行为，反映系统的动力学性质和基本动力特征，很好地解释应用科学中的非线性现象. 近30年来关于确定性动力系统的吸引子存在性及其性质的研究可以参阅大量的文献[1-36]，包括来自化学反应的Reaction-Diffusion方程[5-10,18,19]、流体力学Navier-Stokes方程[29-33]、Schrödinger方程[23,24]、Ginzburg-Landau方程[34,35]、热力学的Boussineq方程[1]、电磁流体力学的MHD方程[36]、水波运动的Camassa-Holm方程[25-27]、p-Laplacian类型方程[11-17]等.

然而大多数系统受到随机外力的影响是不可避免的. 比如，近年来人们发现非线性波在随机介质、外力压力湍流和白噪声扰动中传播，形成了更符合实际的、具有不同于确定系统的新现象和新特征. 并且，其他很多物理领域的研究都揭示了同样的问题，即使很小的随机噪声

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

都会对系统的演化过程起着重要的影响，甚至在一定程度上起着决定性的作用. 这种作用有时可能导致系统结构的完全损坏，或者使系统从有序变为无序，或者从无序变为有序. 这一发现表明确定性系统模型（未受随机噪声影响）只是实际系统的理想化，不能完全揭示自然现象的运动规律，从而无法很好地解释许多新的动力特征. 这些问题最终导致随机动力系统理论的产生和发展. 由此可见，随机系统是不同于确定性系统的新领域，确定性系统所提供的工具和方法已经无能为力，要描述随机动力系统的长时间行为，在理论上必须重新建立随机动力系统的相关概念和理论体系.

20 世纪 90 年代初，Crauel 和 Flandoli[37]，Schmalfuss[39] 引入随机动力系统及其产生的流，并对随机动力系统的长时间行为的描述给出了随机吸引子（random attractors）的概念，建立了随机动力系统理论体系的基石，为随机吸引子的研究作出了开创性的工作. 该理论抓住了具有最可能粗糙白噪声的随机动力系统的本质特征，更好地描述了应用科学中的非线性现象，很快吸引着越来越多的同行工作者的研究兴趣，在短短十多年内，随机吸引子的研究得到了蓬勃发展. 其中，Crauel，Debussche 和 Flandoli[38]，Arnold[40]，Kloeden 和 Langa[42]，Langa 和 Robinson[43]，Debussche[41]，Chueshov[44] 等，在随机动力系统方面做了大量的研究工作，建立了随机吸引子的理论体系.

从概念上讲，随机吸引子为某完备距离空间上的紧的不变集，吸引该空间中所有的速降集. 它与一般的吸引子仅吸引有界集不同，随机吸引子不但吸引包括有界的非随机集，而且吸引依 $\theta_t\omega$ 的直径可为无穷大，但是次指数增长的随机集. 定义在有界域上的随机动力系统，要获得其随机吸引子的存在性，通常是证明随机动力系统在给定相空间上存在紧的吸收集. 但是由于方程的非线性以及随机扰动的复杂性，使得对许多带白噪声非线性偏微分方程的随机吸引子研究具有很大的挑战性. 近年来，学者们研究了 Reaction-Diffusion 方程[37,38,45]、Ladyzhenskaya 模型[49,50]、Bossinesq 方程组[47]、Ginzburg-Landau 方程[48,54,57]、Sine-Gordon 方程[52,53] 等生成的具体随机动力系统在有界域上随机吸引子的存在性及吸引子的维数估计. 上面的这些成果包括国内一些知名的专家，如郭柏灵院士及周盛凡等数学家所做的研究. 李扬荣教授等[58] 把随机动力系统的连续性推广到了一类更广泛意义的连续性基础之上，那就是拟连续性，并且获得 Banach 空间上拟连续随机动力系统随机吸引子的存在条件，这就克服了随机吸引子只由连续动力系统所确定的限制. 他们还得到了定义在有界域上的随机动力系统在非 Hilbert 空间 $L^p(p\neq 2)$ 上存在随机吸引子的充要条件. 作为其理论结果的运用，文献[58] 和文献[59] 分别获得了带加法噪声和带乘法噪声的 Reaction-Diffusion 方程在空间 $L^p(p>2)$ 上随机吸引子的存在性. 值得注意的是，这里的 $p>2$ 取值任意，不受方程中的非线性项的次数限制.

正如考虑定义在无界域上的非随机动力系统的吸引子遇到的麻烦一样，要获得定义在无界域上的随机动力系统的随机吸引子时出现了困难，由于无界域上 Sobolev 紧嵌入定理无法运用，就无法获得随机动力系统的渐近紧性，从而无法获得随机吸引子的紧性特征. 对于非随机偏微分方程可以用能量方程法或者尾部估计法克服这一困难，见文献[24,30,32,82-85]. Brzezniak[60] 研究了定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的随机二维 Navier-Stokes 方程，成功获得了随机吸收集的存在性和随机动力系统的渐近特征，然而他指出没能证明随机吸引子的存在性. 最近，Peter 和 Wang[61] 以及 Wang[62-64]，运用尾部估计法研究一些随机动力系统的渐近紧性，分别获得了定义在无界域上的随机可加白噪声下 Reaction-Diffusion 方程，FitzHugh-Nagumo 系统，

Benjamin-Bona-Mahony 方程，阻尼波动方程等在空间 $L^2(\mathbf{R}^N)$ 上随机吸引子的存在性. 采取同样的技术，文献[65] 获得了具有乘法白噪声的 Reaction-Diffusion 方程生成的随机动力系统吸引子的存在性.

从现有研究结果来看，主要集中在 Hilbert 空间 L^2，上考虑随机吸引子的存在性及维数估计. 然而考虑随机动力系统在其他 Sobolev 空间(比如 $L^p(p\neq 2)$ 上的随机吸引子的存在性，是一个非常有价值的问题，至今公开的研究成果很少，虽然这一问题对于确定性动力系统已经有很好的研究，见文献[7,8,10,11,14-16,18,19] 等. 因为随机吸引子具有不变性，紧性和吸引性三大特征，从某种意义上讲，不变性可以从动力系统的连续性特征获得，因此要获得随机动力系统在 $L^p(p\neq 2)$ 上的吸引子，必须要获得随机动力系统在 L^p 空间上的连续性. 而对大多数偏微分方程来说，其解算子在 Hilbert 空间 L^2 上的连续性是可验证的. 可是正如钟承奎等[10] 所指出，一般来说，非线性偏微分方程的解在空间 $L^p(p\neq 2)$ 上不一定连续，即使是定义在有界域上的随机动力系统也是如此. 因此，要获得随机动力系统在空间 $L^p(p\neq 2)$ 上的吸引子的存在性，无疑面临着一个挑战. 然而李扬荣教授[58] 利用在有界域的情形下 $L^p(p>2)$ 是连续嵌入 L^2 这一事实，推知系统在 $L^p(p>2)$ 上是拟连续的，从而获得了随机动力系统在空间 $L^p(p>2)$ 上存在随机吸引子的充要条件. 但是在无界域的情形，没有嵌入关系，随机动力系统在 $L^p(p\neq 2)$ 上不是拟连续的，因此文献[58] 的结果只能适用于有界域的情形. 无界域上的随机动力系统，在除 L^2 空间之外其他的 Sobolev 空间上的随机吸引子的存在性问题，仍然是数学研究者们需要进一步解决的重要问题.

1.2　随机动力系统的相关概念

设 $(X,\|.\|_X)$ 和 $(Z,\|.\|_Z)$ 分别为两个可分的 Banach 空间，$\mathcal{B}(X)$ 和 $\mathcal{B}(Z)$ 分别表示由 X 和 Z 中的开集所生成的 Borel σ- 代数.

定义 1.1　设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间，$\{\theta_t:\Omega\to\Omega,t\in\mathbf{R}\}$ 是一簇变换，并且对 $s,t\in\mathbf{R}$ 满足：

(i) θ_t 是一单参数群，即

$$\theta_{t+s}=\theta_t\circ\theta_s,\quad \theta_0=id;$$

(ii) $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{F},\mathcal{F})$ 可测的；

(iii) $\theta_t\mathbb{P}=\mathbb{P}$，即对所有的 $\mathcal{B}\in\mathcal{F}$ 和 $t\in\mathbf{R}$，$\mathbb{P}(\theta_tB)=\mathbb{P}(B)$. 则称 θ_t 为一个**流**，称四重形式 $\theta=(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\theta_t)$ 为**距离动力系统**.

一个集合 $B\in\mathcal{F}$ 称为 θ- **不变的**，如果对所有的 $t\in\mathbf{R}$，$\theta_tB=B$. 一个距离动力系统 θ 称为 $\mathbb{P}$**遍历的**，如果对任意的 θ- 不变集 $B\in\mathcal{F}$，或者 $\mathbb{P}(B)=0$ 或者 $\mathbb{P}(B)=1$.

定义 1.2　设 X 为可分的 Banach 空间，$\theta=(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\theta_t)$ 为距离动力系统. 如果映射 φ

$$\varphi:\mathbf{R}^+\times\Omega\times X\to X,(t,\omega,x)\mapsto\varphi(t,\omega)x$$

是 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 是可测的，且对所有的 $s,t\geqslant 0$ 及 $\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$，

$$\varphi(0,\omega)=id,\ \varphi(t+s,\omega)=\varphi(t,\theta_s\omega)\circ\varphi(s,\omega),$$

则称 (φ,θ) 是 X 上的**随机动力系统**. 进一步，$\varphi(t,\omega):X\to X$ 是连续的，则称 (φ,θ) 是 X 上的**连续随机动力系统**.

定义 1.3　设对每一个$\omega\in\Omega$,集合$K(\omega)\in 2^X$,且使得对任意的$x\in X$,映射$\omega\mapsto \mathrm{dist}(x,K(\omega))$依$\mathcal{F}$可测,则称$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为**随机集**. 更进一步,若$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是一簇紧集,则称$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为**随机紧集**.

定义 1.4　(1) 如果对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$和所有的$\beta>0$,都成立

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}\|B(\theta_{-t}\omega)\|_X=0,$$

这里$\|B\|_X=\sup_{x\in B}\|x\|_X$,则称集合簇$\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\subset X$关于$(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$是**速降的**.

(2) 如果对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$和所有的$\beta>0$,都成立

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}\varrho(\theta_{-t}\omega)=0,$$

则称随机变量$\varrho(\omega)\geqslant 0$关于$(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$是**速降的**.

对于一个空间X,它的所有速降集构成的全体记为$\mathcal{D}_X$. 下面给出随机吸引子更一般形式的定义.

定义 1.5　(1) 如果对每一个$\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_X$和$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$,都存在$T=T(B,\omega)>0$,使得对所有的$t\geqslant T$,

$$\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega)\subseteq K_Z(\omega),$$

则称集合簇$\{K_Z(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_Z$关于$\{\varphi(t,\omega)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega}$是$(X,Z)$- **随机吸收的**. 这里

$$\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega)=\bigcup_{v_0\in B(\theta_{-t}\omega)}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)v_0(\theta_{-t}\omega).$$

(2) 如果对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$, $\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_X$, $x_n\in B(\theta_{-t_n}\omega)$, $t_n\to\infty$,都使得$\{\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\}_{n=1}^{\infty}$在空间$Z$中有收敛子列,则称$\{\varphi(t,\omega)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega}$是$(X,Z)$- **渐近紧的**.

(3) 设集合簇$\{\mathcal{A}_Z(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_Z$,如果$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$满足:

(i)$\{\mathcal{A}_Z(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是不变的,即对所有的$t\geqslant 0$,$\varphi(t,\omega)\mathcal{A}_Z(\omega)=\mathcal{A}_Z(\theta_t\omega)$;

(ii)$\{\mathcal{A}_Z(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是$(X,Z)$- 吸引的,即对每一个$B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_X$,

$$\lim_{t\to\infty} d_Z(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega),\ \mathcal{A}_Z(\omega))=0.$$

则称集合簇$\{\mathcal{A}_Z(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_Z$为$(X,Z)$- **随机吸引子**. 这里$d_Z(\cdot,\cdot)$表示空间$Z$上的Hausdorff半距离.

定义 1.6　设(φ,θ)为空间X上的随机动力系统,如果对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$及任意的$(t_n,x_n)\to(t,x)$,$n\to\infty$,都有$\varphi(t_n,\omega)x_n\rightharpoonup\varphi(t,\omega)x$,则称$(\varphi,\theta)$为**范弱连续的**. 这里$\rightharpoonup$表示弱收敛.

定义 1.7　设(φ,θ)为空间X上的随机动力系统. 若对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$及满足$\{\varphi(t_n,\omega)x_n\}$有界且$(t_n,x_n)\to(t,x)$,$n\to\infty$的$\mathbf{R}^+\times X$中的点列$\{(t_n,x_n)\}$有$\varphi(t_n,\omega)x_n\rightharpoonup\varphi(t,\omega)x$,则称$(\varphi,\theta)$为**拟连续的**.

显然,范范连续$\Rightarrow$范弱连续$\Rightarrow$拟连续.

关于连续的随机动力系统有如下已知的结果,参考文献[61,62].

定理 1.8　设(φ,θ)为空间X上的连续随机动力系统. 则(φ,θ)存在(X,X)- 随机吸引子的充要条件是φ具有(X,X)- 随机吸收集$\hat{D}(\omega)$和φ是(X,X)- 渐近紧的,并且该随机吸引子$\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为$\hat{D}(\omega)$的$\omega$- 极限集

$$\mathcal{A}(\omega)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)\hat{D}(\theta_{-t}\omega)}\quad\omega\in\Omega,$$

同时,$\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为$(\varphi,\theta)$的唯一随机吸引子.

在本文讨论中,用$\|\cdot\|$表示L^2空间中的范数,$\|\cdot\|_p$表示L^p空间中的范数,$\|\cdot\|_X$表示一般空间X中的范数.

1.3　(L^2,L^p)-随机吸引子

要考虑随机动力系统在$L^p(p\neq 2)$空间上的随机吸引子，就必须建立$L^p(p\neq 2)$空间上吸引子存在的判断条件. 为探究这一问题，李扬荣[58]引入了拟连续性概念，并建立了拟连续随机动力系统随机吸引子的存在条件，并证明了定义在有界域上的随机动力系统如果在L^2上连续，则该随机动力系统在$L^p(p>2)$上拟连续，于是获得了随机动力系统在$L^p(p>2)$空间上吸引子存在的充要条件. 但是无界域的情形完全不同，即使一个随机动力系统在$L^2(\mathbf{R}^N)$上连续，但在$L^p(\mathbf{R}^N)(p>2)$空间上不一定连续，即使拟连续性也未知，因为当$p\neq 2$时，$L^2(\mathbf{R}^N)$和$L^p(\mathbf{R}^N)$没有嵌入关系. 本小节的研究表明，如果一个连续随机动力系统在$L^2(\mathbf{R}^N)$空间上的随机吸引子存在，且(L^2,L^p)-渐近紧的，则该随机动力系统在$L^p(\mathbf{R}^N)$上存在随机吸引子，该吸引子依$L^p(\mathbf{R}^N)$范数吸引$L^2(\mathbf{R}^N)$空间的所有速降集，并且该随机吸引子与$L^2(\mathbf{R}^N)$上的随机吸引子等同.

我们采取的思路是，首先构造一个与L^2空间的吸收集有关联的ω-极限集，然后利用假设条件验证其为$L^p(p>2)$上的随机吸引子，也就是验证该ω-极限集具有不变性，紧性和吸引特征，其中对不变性的验证是难点. 同时，我们获得了一个利用解算子的尾部任意小估计方法来验证随机动力系统的$L^p(p\neq 2)$渐近紧性.

记$\mathcal{D}_p$表示L^p空间上所有速降集的全体，特别的，$p=2$时记成$\mathcal{D}$. 很明显$\mathcal{D}_p$满足包含闭特征：对任意随机集$\{E(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_p$，如果$\{F(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_p$以及$E(\omega)\subset F(\omega)$，则$\{E(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_p$.

1.3.1　本节的主要结论

下面给出本节的主要定理.

定理 1.9　设(φ,θ)分别为$L^2(\mathbf{R}^N)$和$L^p(\mathbf{R}^N)$上的随机动力系统，其中$2\leqslant p<\infty$，并且(φ,θ)在$L^2(\mathbf{R}^N)$上连续. 假定(φ,θ)具有$(L^2(\mathbf{R}^N),L^2(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子. 则$(\varphi,\theta)$存在$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子的充要条件是：

(i)φ具有$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-随机吸收集$\{K_0(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$；

(ii)φ是$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-渐近紧的.

进一步，$(L^2(\mathbf{R}^N),L^2(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子与$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子在集合包含意义上等同.

定理 1.10　设(φ,θ)分别为$L^2(\mathbf{R}^N)$和$L^p(\mathbf{R}^N)$上的随机动力系统，其中$2\leqslant p<\infty$，并且(φ,θ)在$L^2(\mathbf{R}^N)$上连续. 假定(φ,θ)具有$(L^2(\mathbf{R}^N),L^2(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子. 则$(\varphi,\theta)$存在$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-随机吸引子的充要条件是：

(i)φ具有$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$-随机吸收集$\{K_0(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$；

(ii) 对任意$\varepsilon>0$和每一个$\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$，存在正常数$M=M(\varepsilon,B,\omega)$和$T=T(\varepsilon,B,\omega)$使得对所有的$t\geqslant T$，

$$\sup_{u_0(\omega)\in B(\omega)}\int_{\mathbf{R}^N(|\Psi(t)u_0(\theta_{-t}\omega)|\geqslant M)}|\Psi(t)u_0(\theta_{-t}\omega)|^p\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}},$$

其中 $\Psi(t)=\varphi(t,\theta_{-t}\omega)$.

进一步,$(L^2(\mathbf{R}^N),L^2(\mathbf{R}^N))$- 随机吸引子与$(L^2(\mathbf{R}^N),L^p(\mathbf{R}^N))$- 随机吸引子在集合包含意义上等同.

1.3.2 主要定理的证明

为证明定理 1.9 和定理 1.10,需要如下两个引理.

引理 1.11 设 $x_n\in L^2(\mathbf{R}^N)\cap L^p(\mathbf{R}^N)$,当 $n\to\infty$ 时,$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$ 和 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}y_0$,则 $x_0=y_0$.

证明:设$\mathbb{D}'(\mathbf{R}^N)$ 为$\mathbb{D}(\mathbf{R}^N)$ 上的分布函数空间,这里$\mathbb{D}(\mathbf{R}^N)$ 表示紧支集属于 $\mathbf{R}^N$ 的所有无穷次连续可微函数的全体. 注意到$\mathbb{D}(\mathbf{R}^N)\subset L^2(\mathbf{R}^N)$ 和$\mathbb{D}(\mathbf{R}^N)\subset L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbf{R}^N)$,则 $L^2(\mathbf{R}^N)$ 和 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 连续地嵌入$\mathbb{D}'(\mathbf{R}^N)$. 又由于$\mathbb{D}'(\mathbf{R}^N)$ 是Haustorff空间,于是根据极限的唯一性该引理得证.

引理 1.12 (见文献[18]) 设有界集 $B\subset L^q(\mathbf{R}^N)(q\geqslant 1)$. 如果 B 在$L^q(\mathbf{R}^N)$ 空间内具有有限 ε- 网,那么存在正常数 $M=M(B,\varepsilon)$ 使得

$$\sup_{u\in B}\int_{\mathbf{R}^N(|u|\geqslant M)}|u|^q\mathrm{d}x\leqslant 2^{q+1}\varepsilon^q.$$

定理1.9的证明:(必要性) 不失一般性,考虑$\omega\in\Omega_0\subseteq\Omega$且$\mathbb{P}(\Omega_0)=1$. 假定$\varphi$具有$(L^2,L^P)$- 随机吸引子,记作$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. 设 $K_0(\omega)=N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$,这里 $N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$是$\mathcal{A}_p(\omega)$ 的 ε- 邻域. 则根据(L^2,L^P)- 随机吸引子的定义,对每一个$\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$,存在 $T=T(\varepsilon,B,\omega)>0$,使得对所有 $t\geqslant T$,

$$\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega)\subseteq N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega)). \tag{1.1}$$

需要说明,$N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$是一速降的随机集. 事实上,由于$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_p$,于是存在速降的随机变量$r(\omega)$,使得对每一个$y\in\mathcal{A}_p(\omega)$,$\|y(\omega)\|_p\leqslant r(\omega)$. 对每一个$x\in N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$,存在$y\in\mathcal{A}_p(\omega)$ 使得

$$\|x\|_p\leqslant\|x-y\|_p+\|y\|_p\leqslant\varepsilon+r(\omega), \tag{1.2}$$

因此,$N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$是速降的,结合式(1.1)可知$K_0(\omega)=N_\varepsilon(\mathcal{A}_p(\omega))$为$(L^2,L^P)$- 随机吸收集,这就证明了(i). 另一方面,由于$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是紧的,那么从式(1.1)可以看出所有$t\geqslant T$,$\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega)$ 在 L^p 空间具有有限ε- 网. 因此,φ是(L^2,L^P)- 渐近紧的.

(充分性) 由于φ存在(L^2,L^2)- 随机吸引子,根据定理1.8,φ存在(L^2,L^2)- 随机吸收集$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$且$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$. 现在令 $K_p(\omega)=K_0(\omega)\cap K(\omega)$,$\omega\in\Omega$. 则由$\mathcal{D}_p$ 的包含闭特征,我们知道$\{K_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$和$\{K_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}_p$. 并且可以明显看出,$\{K_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 不但是一(L^2,L^2)- 随机吸收集,而且是一(L^2,L^p)- 随机吸收集. 记

$$\mathcal{A}_p(\omega)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)K_p(\theta_{-t}\omega)}^{L^p}, \tag{1.3}$$

这里$\overline{A}^{L^p}$ 表示A 关于L^p 范数的闭包. 则对$\omega\in\Omega_0$,我们有如下的等价关系:

$x\in\mathcal{A}_p(\omega)$ 当且仅当存在 $t_n\to\infty$ 和 $x_n\in K_p(\theta_{-t_n}\omega)$ 时,

$$\text{使得 }\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p}x. \tag{1.4}$$

由于 φ 是(L^2,L^P)- 渐近紧的,因此$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\neq\varnothing$.

下面将证明如式(1.3)定义的$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$,为一$(L^2,L^p)$-随机吸引子.证明分 4 步完成.

第一步,我们将说明$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为一速降的随机集.由假定(i)和$\{K_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$这一事实,我们知道对$\mathbb{P}-a.e.\ \omega\in\Omega$和$x_n\in K_p(\theta_{-t_n}\omega)$,$\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\in K_0(\omega)$对充分大的$n$成立,即是存在一速降的随机变量$r(\omega)$,使得对充分大的$n$,

$$\|\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\|_p\leqslant r(\omega).$$

于是对任意$\varepsilon>0$及每一个$x\in\mathcal{A}_p(\omega)$,运用式(1.4),对充分大的$n$,我们有

$$\|x\|_p\leqslant\|\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n-x\|_p+\|\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\|_p\leqslant\varepsilon+r(\omega)$$

则$\mathcal{A}_p(\omega)\subset\overline{K_0(\omega)}^{L^p}$,因此$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$为一速降的随机集.

第二步,我们证明随机动力系统φ作用在$\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$上的不变性,也就是,对所有的$t\geqslant 0$,

$$\varphi(t,\omega)\mathcal{A}_p(\omega)=\mathcal{A}_p(\theta_t\omega).$$

根据定理 1.8,φ的(L^2,L^2)-随机吸引子表示为

$$\mathcal{A}(\omega)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}\varphi(t,\theta_{-t}\omega)K(\theta_{-t}\omega)}^{L^2}.$$

这里$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是一$(L^2,L^2)$-随机吸收集.则类似式(1.4)有

$$x\in\mathcal{A}(\omega),\text{当且仅当存在 }t_n\to\infty,\text{使得 }x_n\in K_p(\theta_{-t_n}\omega),\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|}x. \tag{1.5}$$

由于$\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$对$\varphi$是不变的,所以只需证明对$\omega\in\Omega_0$,$\mathcal{A}(\omega)=\mathcal{A}_p(\omega)$.一方面,如果$x\in\mathcal{A}(\omega)$,则由式(1.5),一定存在$t_n\to\infty$和$x_n\in K(\theta_{-t_n}\omega)$,使得

$$\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x\ \text{当}\ n\to\infty. \tag{1.6}$$

注意到$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$为$L^2$的速降集,于是由假定(ii),可得存在$\{n\}$的一个子列(为了简单同样记作$\{n\}$)和$y\in L^p$使得

$$\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}y\ \text{当}\ n\to\infty. \tag{1.7}$$

由引理 1.11,结合式(1.6)—式(1.7)我们有$x=y$.接下来证明$y\in\mathcal{A}_p(\omega)$.事实上,由于$\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}$和$\{K_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是$(L^2,L^p)$-随机吸收集,则对$x_n\in K(\theta_{-t_n}\omega)$,存在$T=T(K,\omega)>0$,使得对所有的$t\geqslant T$,

$$y_n=\varphi(t,\theta_{-t}\theta_{-(t_n-t)}\omega)x_n(\theta_{-t}\theta_{-(t_n-t)}\omega)\in K_p(\theta_{-(t_n-t)}\omega). \tag{1.8}$$

根据φ的“cocycle”特征,对所有的$t_n\geqslant t\geqslant T$,

$$\begin{aligned}\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n(\theta_{-t_n}\omega)&=\varphi(t_n-t+t,\theta_{-t_n}\omega)x_n(\theta_{-t_n}\omega)\\&=\varphi(t_n-t,\theta_{-(t_n-t)}\omega)\varphi(t,\theta_{-t_n}\omega)x_n(\theta_{-t_n}\omega)\\&=\varphi(t_n-t,\theta_{-(t_n-t)}\omega)\varphi(t,\theta_{-t}\theta_{-(t_n-t)}\omega)x_n(\theta_{-t}\theta_{-(t_n-t)}\omega).\end{aligned} \tag{1.9}$$

令$t_n'=t_n-t$.则从式(1.7)—式(1.9)可以得到

$$\varphi(t_n',\theta_{-t_n'}\omega)y_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}y\ \text{当}\ n\to\infty, \tag{1.10}$$

这里y_n由式(1.8)所定义,显然$y_n\in K_p(\theta-t_n'\omega)$.因此根据式(1.4)和式(1.10)得到$y\in\mathcal{A}_p(\omega)$,这就证明了包含关系$\mathcal{A}(\omega)\subseteq\mathcal{A}_p(\omega)$.另一方面,如果$x\in\mathcal{A}_p(\omega)$,运用式(1.4),存在$t_n\to\infty$和$x_n\in K_p(\theta_{-t_n}\omega)$,使得

$$\varphi(t_n,\theta_{-t_n}\omega)x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}x\ \text{当}\ n\to\infty. \tag{1.11}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com