以全国课程为标准 内容打破区域限制

高中先修课程

- 解决初高中衔接难题
- 定位高中课程先修问题
- 应对高中自主招生选拔
- 升学考试获取优异成绩

数学

张雪明 朱兆和 张亚东◎编著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高中先修课程

张雪明 朱兆和 张亚东◎编著

数学

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书从整个高中数学课程的高度确定了12个重要主题和一个延伸阅读作为编写单元,每个单元包含四个栏目,分别是"这个你懂的","我们能继续做点什么吗","带你进入高中课程","小试牛刀"等.其中,"这个你懂的"主要选择与高中相应主题高度相关的内容加以归纳总结,作为主题线索的起点;"我们能继续做点什么吗"重在引起思考,从因果关系、目的方法等角度对原有初中知识加以拓展,延伸出相应的高中内容;"带你进入高中课程"以基本、核心、可接受为原则,向读者展示高中课程的相关内容,满足读者先修需求,提前适应高中课程,有效化解将来学习障碍;"小试牛刀"本着分量适中、难度不大、高中为主的原则配备了一定量的练习题,供读者使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中先修课程.数学 /张雪明,朱兆和,张亚东编著.—上海:上海交通大学出版社,2014
ISBN 978-7-313-10629-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②朱… ③张… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第096881号

高中先修课程·数学

编　　著:张雪明　朱兆和　张亚东
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路951号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:上海颛辉印刷厂　　经　　销:全国新华书店
开　　本:787 mm×960 mm　1/16　　印　　张:14
字　　数:245千字
版　　次:2014年6月第1版　　印　　次:2014年6月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-10629-2/G
定　　价:30.00元

序

主观和客观的断隔，使初中课程和高中课程成为两个互不关联的自封闭系统，难以沟通更谈不上共融.学生智能在两个不相关的环境中被动成长，就像先被装在一个小套子里，然后突然再装进一个大套子里，这就带来两个问题：一是初中的部分学科优秀生没有先修高中课程的机会，只能把宝贵的时间用于重复劳动，在初中的教学内容中低层次循环，获得的是越来越熟练的解题技能而失去了智慧；二是进入高中以后的不适应，课程内容的特点、认知能力的层次、学习方式的差异成为众多学生升入高中后面临的巨大挑战，造成一部分学生成绩滑坡，长期遭受难以忍受的身心负担.

有识之士早已关注到这一点，试图用多种方法打通这种壁垒，最常见的就是提供“衔接课程”，但收效甚微，原因恐怕在于定位有问题，“衔接课程”主要解决的是初三与高一之间的对接问题，很像在初中和高中这两个“房间”之间接上了一个“管子”或“通道”，初中生只能从中嗅出飘过来的一丝课程气息或窥视高中课程的一棱一角，无法满足自己的学习需要.要想真正解决问题，可能需要彻底打通这两个“房间”之间的“隔墙”，让学有余力者直达高中课程.至此，有人会说，那干脆把高中教材直接给初中学生好了，问题不就解决了吗？否！因为这对大部分学生要求太高，无法顺利进行学习.这就是说，我们需要开发一种全新的课程，这种课程要从学生的最近发展区出发，把初中课程中的主要内容，小坡度地拓展到高中课程的体系中去，它可能不会帮助读者完全解决高中课程的所有学习问题，但会帮他形成正确的认知观念和学习方法，有效破除整个高中课程中可能要面对的关键障碍，使高中学习从容不迫，学有大成.也就是说这种课程应该是初高中两个课程体系之间的整体“对话”而非两者之间简单的首尾相接.这就是“高中先修课程”的由来.

“高中先修课程”编写理念：

➢ 承继大学先修课程之脉.

- 填补初高中结合之空白.
- 创设该形态课程之先河.

"高中先修课程"内容特点:

- 选题依据全国和上海的课程标准,内容打破区域限制,对所有省市具有广泛适用性.
- 选题均从初中课程中生成出来,再融合到高中课程中去,体现现有基础的重要性,使读者学习顺畅,卓有成效.
- 选题立足高中课程的核心内容,体现对高中课程的先修,使读者与高中课程零距离,提前适应高中课程,有效化解将来的学习障碍.
- 选题适当关注系统性和完备性,体现初高中两大课程体系的共融,使读者的学习实现真正意义上的贯通.

"高中先修课程"读者对象是优秀初中生,其功能定位为:

- 解决高中课程先修问题.
- 应对高中自主招生选拔.
- 升学考试获取优异成绩.

读者们,既然翅膀硬了就该飞翔! 但世界上总有太多的人、太多的理由、太多的方式去禁锢你们……我们希望"高中先修课程"能强健你的心智,放飞你的思想!

甭说了! 飞吧……

张雪明

2014-3-24

前言

本书从整个高中数学课程的高度确定了十余个重要主题作为编写单元，每个单元包含四个栏目，分别是“这个，你懂的”，“我们能继续做点什么吗”，“带你进入高中课程”，“小试牛刀”等．其中，“这个你懂的”主要选择与高中相应主题高度相关的内容加以归纳总结，作为主题线索的起点；“我们能继续做点什么吗”重在引起思考，从因果关系、目的方法等角度对原有初中知识加以拓展，延伸出相应的高中内容；“带你进入高中课程”以基本、核心、可接受为原则，向读者展示高中课程的相关内容，满足读者先修需求，提前适应高中课程，有效化解将来学习障碍；“小试牛刀”本着分量适中、难度不大、高中为主的原则配备了一定量的练习题，供读者使用．

本书内容依据全国和上海的课程标准，内容打破区域限制，全国通用．

本书适合以下读者选用．

希望提前学习高中课程，并能对整个高中课程形成整体观念，从而在整个高中阶段取得优秀成绩的；

希望参加优质高中自主招生选拔并取得数学学科测试优秀成绩的；

希望在中考中超越自我，获取优秀成绩的．

朱兆和老师编写了第一讲：从个体到集合；第二讲：从方程到不等式；第三讲：从自然数到复数；第四讲：从变量到函数；第五讲：从归纳到数列．

张亚东老师编写了第六讲：从角度制到弧度制；第八讲：从向量的几何运算到向量的坐标运算；第九讲：从直线到曲线；延伸阅读．

张雪明老师编写了第七讲：从数轴到坐标系；第十讲：从平面几何到立体几何；第十一讲：从列举到计数；第十二讲：从逐步逼近到导数的概念．

编写匆忙，书中存在的不妥之处，敬请读者批评指正．

编　者

2014-3-24

目录

第一讲　从个体到集合

一、这个你懂的

（一）你所知道的

初中阶段，我们就知道“集合”这个词句，如所有的整数形成整数集合、所有的有理数形成有理数集合、平面上与定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）叫做圆等；一元一次不等式的解又称为一元一次不等式的解集，并能用数轴表示其解集．在这些问题的叙述中都涉及了集合这个词句．

（二）练一练，找找感觉

例 1　给出下列各数：-1，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，π，2，3.24，7，$\dfrac{7}{3}$．属于整数集合的数为________；属于有理数集合的数为________；属于无理数集合的数为________；属于真分数集合的数为________．

解　属于整数集合的数为 -1，2，7；属于有理数集合的数为 -1，$\dfrac{2}{3}$，2，3.24，7，$\dfrac{7}{3}$；属于无理数集合的数为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，π；属于真分数集合的数为 $\dfrac{2}{3}$．

例 2　解不等式：$\dfrac{2x+1}{3}+x>2x-1$，并把其解集在数轴上表示出来．

解　由 $\dfrac{2x+1}{3}+x>2x-1$ 得　$2x+1+3x>6x-3$，移项得　$-x>-4$，所以此不等式的解集为 $x<4$．

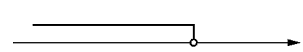

图 1.1

在数轴上表示见图 1.1．

因为 4 不在不等式的解集中，所以表示 4 的这一点

用空心点.

我们知道：一元一次不等式的解集可以利用数轴表示.有时也可以利用圆或其他图形来表示一定情形下的集合.

例 3 某班共有 25 名同学,已知报名参加科技创新小组的有 13 人,报名参加文艺小组的有 7 人,两个小组全报名参加的有 4 人.问:(1) 只参加一个课外小组的有几人?(2) 没有参加任何一个课外小组的有几人?

解 用矩形 M 表示全班人数,圆 A 表示参加科技创新小组的人数,圆 B 表示参加文艺小组的人数,则圆 A 与圆 B 的公共部分则表示两个小组全报名参加的人数.

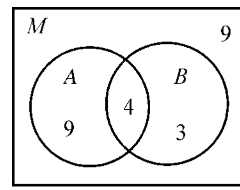

图 1.2

将数据分别填入相应的区域,可得：只参加科技小组的人数有 9 个;只参加文艺小组的人数有 3 个.

(1) 只参加一个课外小组的人数为 $9+3=12$ 人;

(2) 两个小组都没参加的有 9 人.

二、我们能继续做点什么

先看一个趣题：笼中有兔、鸡、鸭共若干,知其有头共 40,腿共 100,鸡比鸭多 2 只.问笼中有兔、鸡、鸭各多少只?

当然,可以利用设变量建立三元一次方程组来解决此问题：设兔有 x 只,鸡有 y 只,鸭有 z 只,则有：

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ 4x+2y+2z=100 \\ y=z+2 \end{cases}$$

解得：$x=10$, $y=16$, $z=14$.

趣解 若这些兔、鸡、鸭都是经过特殊训练的,主人一声哨提起一条腿,则两声哨后鸡、鸭全部“卧倒”了.剩下的 20 条腿只能都是兔子的,所以兔子有 10 只,鸡、鸭就好求了.

趣解是从另一角度将这三种动物进行分类处理,四条腿的兔子归为一类、两条腿的鸡鸭归为一类.这种处理问题的方法是运用了“集合”的思想.

(一) 这个你有可能不懂

我们知道：满足方程的自变量的值叫做方程的解,满足不等式的所有变量的

值叫做不等式的解集.解与解集有什么不同吗?

先请看下面两个问题:

1. 若关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的解为 2,能求出 m、n 的值吗?

2. 若关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的解集为 2,能求出 m、n 的值吗?

方程的解是"个体",此个体满足这个方程,所以对于问题 1 来说,将 $x=2$ 代入得到关于 m、n 的一个代数式:$2m+n+4=0$,求不出 m、n 的值.对于问题 2 来说,此方程的解集只有 2 这一个值,它是"全体",即此方程只有唯一的一个解 $x=2$,在 $2m+n+4=0$ 的前提下,还要满足 $\Delta=m^2-4n=0$,因此可以求出 $m=-4$,$n=4$.即:方程的解与解集是"个体"与"全体"的区别.

(二) 练练手,热身一下

例 1　已知 2 与 3 都是关于 x 的不等式 $ax-2>0$ 的解,求实数 a 的取值范围.

解　由题意,$x=2$ 与 $x=3$ 都满足不等式 $ax-2>0$,所以:

$$\begin{cases}2a-2>0\\3a-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\a>\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow a>1.$$

即实数 a 的取值范围为 $a>1$.

例 2　已知不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $x>3$,求不等式 $3bx-2a<0$ 的解集.

解　因为不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $x>3$,所以一次函数 $y=ax+b$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标为 3,$x=3$ 是方程 $ax+b=0$ 的根,且一次函数的图像从左向右是上升的,则 $a>0$.所以有 $3a+b=0\Rightarrow b=-3a$,不等式 $3bx-2a<0$ 为 $-9ax-2a<0$,即 $9ax>-2a$,因为 $a>0$,所以 $x>-\dfrac{2}{9}$,即不等式 $3bx-2a<0$ 的解集为 $x>-\dfrac{2}{9}$.

一元一次不等式、一元一次方程、一元一次函数这三者之间是紧密相联的.根据一次函数的一次项系数的符号与相应的一元一次方程的根,可得到一次不等式的解集,反之由一次不等式的解集,可以判断一次函数一次项系数的符号与相应的一次方程的根.

三、带你进入高中课程

虽然我们在初中就知道集合这一"词句",也能求不等式的解集等问题;知道整

数集、有理数集、实数集等.但什么是集合呢？如何表示集合呢？

（一）集合及其表示方法

1. 集合的概念

集合这一概念是德国数学家康托尔（G. Cantor，1845—1918）首先提出的，他是集合论的创始人.他给集合的说明是："把一定的，并且彼此可以明确识别的事物（这种事物可以是直观对象，也可以是思维对象）放在一起，叫做一个集合，这些事物中的每一个对象叫做该集合的元素".

在数学中，集合是一个不定义的概念，它与我们几何中的点、直线等一样，是数学中最原始的概念之一.中学里所说的集合可以理解为"确切指定的一些对象的整体"，也可以理解为"具有某种共同属性的事物的全体".

2. 元素与集合的关系

集合中的每一个对象称为集合的元素.对于一个给定的集合，集合中的元素满足三个特点：

（1）确定性：任何一个对象要么是这个集合中的元素，要么不是这个集合中的元素，二者必具其一.如："大个子"、"好东西"、"便宜货"等这些对象就不能确定集合，因为这些词句"不确定"，是模糊的.

（2）互异性：集合中的元素是互不相同的.也就是说，给定集合中的任意两个元素都是不同的对象，集合中的元素不能重复出现.

（3）无序性：集合中的元素是没有顺序关系的.如方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根可以说是 1 与 2，也可以说是 2 与 1.

集合常用大写的字母 A，B，C…表示，集合中的元素用小字母 a，b，c… 来表示.如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；如果 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

常见集合的表示：

自然数的全体形成的集合叫做自然数集，用字母 N 表示，不包括零的自然数（正整数）形成的集合，记作 N^*（有时也记作 N^+）；全体整数组成的集合叫做整数集，用字母 Z 表示；全体有理数组成的集合叫有理数集，用字母 Q 表示；全体实数组成的集合叫实数集，用字母 R 表示.

为了书写方便，用 Z^+、Z^- 来表示正整数集、负整数集；Q^+、Q^- 表示正有理数集、负有理数集；R^+、R^- 表示正实数集、负实数集.

若一个集合的元素个数是有限个，则称此集合是有限集；若一个集合的元素个数是无限个，则称此集合是无限集.

特别地，规定不含任何元素的集合叫做空集，空集用特定的符号“ $\varnothing$ ”表示. 如方程 $x^2+2=0$ 的实数解所组成的集合就是空集；两平行直线的公共点所组成的集合也是空集.

想一想　你还能举出一些空集的例子吗？

例 1　用符号 $\in$、$\notin$ 填空：

(1) 0 ____ N　　(2) $\frac{1}{2}$ ____ Q^+　　(3) $\sqrt{3}$ ______ R

(4) π ____ Q　　(5) $3.141\,59$ ______ Q　　(6) -2 ______ Z

解　(1) $0\in N$　　(2) $\frac{1}{2}\in Q^+$　　(3) $\sqrt{3}\in R$

(4) $\pi\notin Q$　　(5) $3.141\,59\in Q$　　(6) $-2\in Z$

例 2　判断下列各组对象能否构成集合？若能构成集合，指出是有限集还是无限集；若不能构成集合，请说明理由.

(1) 方程 $x^2-3x-4=0$ 的实数解；

(2) 地球上的小河流；

(3) 周长等于 15 厘米的三角形；

(4) 接近于 1 000 的整数；

(5) 与 1 000 相差不超过 5 的整数；

(6) 坐标平面上第一象限内的一些点.

解　(1) 能构成集合，它是有限集.

(2) 不能构成集合，因为“小河流”不是一个确定的概念.

(3) 能构成集合，是无限集.

(4) 不能构成集合，因为“接近”不是一个确定的概念.

(5) 能构成集合，它是有限集.

(6) 不能构成集合，因为“一些”是不确定的，它没有明确的界定范围.

3. 集合的表示方法

集合的表示方法常用列举法与描述法，有时为了形象直观也会利用图形来表示，因此集合常用表示方法有列举法、描述法、图示法三种.

(1) 列举法：将集合中的元素一一列举出来，并且写在“{ }”内，这种表示集合的方法称为列举法. 列举法表示集合时，不考虑元素之间的顺序关系. 如方程 $x^2-3x-4=0$ 的解为 -1 与 4，那么此方程的解集为 $\{-1, 4\}$，也可表示为 $\{4, -1\}$.

应当注意的是，用列举法表示集合时，元素之间用逗号“，”隔开，相同元素在集

合中只能出现一次.如方程 $x^2-2x+1=0$ 有两相等的实数根 $x_1=x_2=1$，则方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集为 $\{1\}$，只有一个元素，而不能将此方程的解集写成 $\{1, 1\}$.

(2) 描述法：在“$\{\}$”内先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线后面写上这个集合元素所共同具有的特性，即：$A=\{x \mid x$ 满足的性质 $p\}$，这种表示集合的方法叫做描述法.如方程 $x^2-3x-4=0$ 的解集可以表示为 $\{x \mid x^2-3x-4=0\}$；与 1 000 相差不超过 5 的整数所形成的集合可以表示为 $\{x \mid |x-1\,000| \leqslant 5, x \in Z\}$.

应当注意的是，在用描述法表示集合时，竖线前面的“元素的一般形式”是这个集合的代表元，代表元不同，表示的集合不同.如 $\{y \mid y=x+1, x \in R\}$ 与 $\{(x, y) \mid y=x+1, x \in R\}$ 虽然竖线后面的特性一样，但它们所表示的集合是完全不同的两个集合.前者的代表元是单一的数“y”，是能表示成“$x+1$”的数的全体；而后者的代表元是有序数对“(x, y)”，是坐标平面上的点，因此此集合表示坐标平面上直线 $y=x+1$ 上的点，亦即是一次函数 $y=x+1$ 的图像上的点的集合.

例 3 用适当的方法表示下列集合：

(1) 绝对值不大于 2 的整数构成的集合 A；

(2) 被 3 除余 2 的自然数构成的集合 B；

(3) 直角坐标平面上第一、三象限的角平分线上的点所构成的集合 C.

解 (1) 用列举法：$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$；

(2) 用描述法：$B=\{x \mid x=3m+2, m \in N\}$；

(3) 用描述法：$C=\{(x, y) \mid y=x, x \in R\}$.

一般地来说，对于有限集，当元素的个数“比较少”的时候用列举法比较合适，对于无限集，用描述法比较合适，但这两者之间并不是互不相容的.有限集也可以利用描述法，但无限集不一定可以利用列举法.如“绝对值不大于 2 的整数构成的集合 A”利用描述法可以表示为 $A=\{x \mid |x| \leqslant 2, x \in Z\}$；“被 3 除余 2 的自然数构成的集合 B”也可以利用列举法表示为 $B=\{2, 5, 8, 11, \cdots\}$，虽然这个无限集中的所有元素不可能一一列举出来，但可以从列举出的有限个中找出规律，从而知其元素所具有的性质.

(二) 集合之间的关系

1. 子集与真子集

对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或 B 包含 A).

当 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不在集合 A 中，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$），读作“A 真包含于 B”（或 B 真包含 A）.

特别规定：空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集.

常用集合 N、Z、Q、R 之间的关系：$N \subsetneqq Z \subsetneqq Q \subsetneqq R$.

例 4　已知集合 $A = \{a, b, c\}$，写出 A 的所有子集.

解　集合 A 的所有子集为：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a, b\}$、$\{a, c\}$、$\{b, c\}$、$\{a, b, c\}$. 共有 8 个，除其本身 $\{a, b, c\}$ 外，真子集有 7 个，非空真子集有 6 个.

一般地，若集合 A 有 $n(n \in N^*)$ 个元素，则 A 有 2^n 个子集，$2^n - 1$ 个真子集，$2^n - 2$ 个非空真子集.

例 5　已知集合 $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in N\}$，$B = \{x \mid x = 3k, k \in N\}$，求证：$A \subsetneqq B$.

证明　设 a 是集合 A 中的任意一个元素，则 $a = 6k + 3, k \in N$. 所以 $a = 3(2k + 1)$，由 $k \in N$，所以 $2k + 1 \in N$，则 $a \in B$，即 $A \subseteq B$；又 $6 = 3 \times 2 \in B$，由 $6k + 3 = 6$，得 $k = \dfrac{1}{2}$，而 $\dfrac{1}{2} \notin N$，所以 $6 \notin A$. 综上知 $A \subsetneqq B$.

2. 集合的相等

如果两个集合 A 与 B 所含的元素完全相同，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$，读作“集合 A 等于集合 B”.

对于两个有限集合的相等，可以利用列举的方法将两个集合中的元素一一列举出来，看一下它们是否完全相同，可以说明这两个集合是否相等. 对于无限集，不可能一一列举出它们的全部元素，那么如何说明它们相等呢？

完全相同实则上是指两个集合中的元素是完全一样的，即 A 的元素一定是 B 的元素，反之 B 中的元素也是 A 的元素. 即：若 $x \in A$，则 $x \in B$，所以 $A \subseteq B$；同理，若 $x \in B$，则 $x \in A$，所以 $B \subseteq A$.

也就是说，对于两个集合 A 和 B，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则有 $A = B$.

例 6　已知集合 $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in Z\}$，$B = \{x \mid x = 2k - 1, k \in Z\}$，求证：$A = B$.

证明　设 a 是集合 A 中的任意一个元素，则 $a = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$，由 $k \in Z$，所以 $k + 1 \in Z$，则 $a \in B$，所以 $A \subseteq B$.

设 b 是集合 B 中的任意一个元素，则 $b = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$，由 $k \in Z$，所以 $k - 1 \in Z$，则 $b \in A$，所以 $B \subseteq A$.

综上知，$A = B$.

例 7　已知集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{x \mid x\in A\}$，用列举法写出集合 B，并说明集合 A 与集合 B 的关系.

解　根据集合描述法的意义知，集合 B 的代表元是 x，其满足的性质为 x 是集合 A 的元素. 所以集合 B 是由集合 A 中元素的全体所形成的，所以 $B=\{1,2,3\}$，有 $A=B$.

若不清晰地理解集合的概念，在解答时会犯这样的错误：$B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{3\}$ 或 $B=\{1,2\}$ 或 $B=\{1,3\}$ 或 $B=\{2,3\}$ 或 $B=\{1,2,3\}$，因此得到 $B\subsetneqq A$ 或 $B=A$. 你是否也会犯这样的错误呢？能明白错误的原因吗？

（三）集合的运算

1. 交集

一般地，由集合 A 和 B 的公共元素的全体所组成的集合叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”. 即：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

用图 1.3 可以直观地表示出两个集合 A 与 B 交集的三种情况：

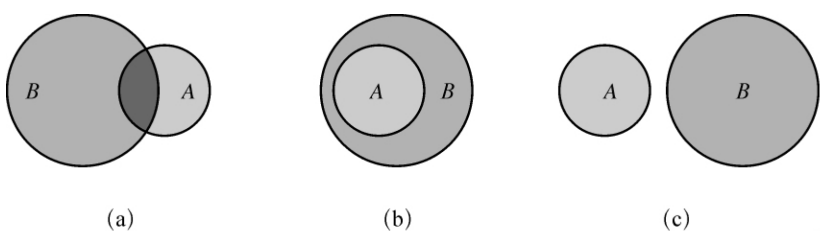

图 1.3

其中图 1.3(a)表示两集合 A 与 B 既有公共元素，也有非公共元素的情况；图 1.3(b)表示两集合 A 与 B 的公共元素就是集合 A 的情况，此时可以看出，A 是 B 的子集；图 1.3(c)表示两集合 A 与 B 没有公共元素，即 A 与 B 的交集是空集.

由集合与集合之间的关系很容易得到：

(1) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$；若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$.

例 8　已知集合 $A=\{(x,y) \mid 2x+y=10\}$，$B=\{(x,y) \mid 3x-y=5\}$，求 $A\cap B$，并说明它的意义.

解　由交集的定义：

$A\cap B=\{(x, y)\mid 2x+y=10 且 3x-y=5\}=\left\{(x, y)\middle|\begin{cases}2x+y=10\\3x-y=5\end{cases}\right\}=$
$\left\{(x, y)\middle|\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\right\}=\{(3, 4)\}$.

$A\cap B$ 表示方程组 $\begin{cases}2x+y=10\\3x-y=5\end{cases}$ 的解集,也可以理解两个一次函数 $y=-2x+10$ 与 $y=3x-5$ 的图像的交点.

注意　$\{(3, 4)\}$ 与 $(3, 4)$ 表示的意义不同,前者是以点 $(3, 4)$ 为元素的一个集合,而后者只表示一个点.

2. 并集

由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B". 即:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$$

仿照两个集合 A 与 B 交集的三种图形直观表示,作出两个集合 A 与 B 的并集图形的直观表示.

由集合与集合之间的关系很容易得到:

(1) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$;

(2) $A\cup\varnothing=A$;

(3) 若 $A\subseteq B$, 则 $A\cup B=B$; 若 $A\cup B=B$, 则 $A\subseteq B$.

例 9　已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, 求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.

解　$A\cap B=\{3, 4, 5\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

应当注意的是,两个集合的并集中,两个集合中的共同元素只能出现一次.

例 10　已知集合 $A=\{|a+1|, 3, 5\}$, $B=\{2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1\}$, 若 $A\cap B=\{2, 3\}$, 求 $A\cup B$.

解　因为 $A\cap B\subseteq A$, 所以 $2\in A$, 则 $|a+1|=2$, 则 $a=1$ 或 $a=-3$.

当 $a=1$ 时, $2a+1=a^2+2a=3$ 与集合中的元素互异矛盾,则 $a=1$ 不满足题意;当 $a=-3$ 时, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{-5, 3, 2\}$ 满足题意,此时 $A\cup B=\{-5, 2, 3, 5\}$.

3. 补集

补集是在"全集"前提下定义的运算. 全集是指在研究集合之间的关系时预先指定的一个集合,这个集合要包含所有的集合. 一般地,全集用字母 U 表示.

设 U 是全集，A 是 U 的子集，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，读作“A 补”. 即：

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$$

利用图形（见图 1.4）可以直观地表示集合 A 在全集 U 中的补集，全集一般用矩形表示.

图 1.4

由集合与集合之间的关系与补集的运算很容易得到：

(1) $A \cap \complement_U A = \varnothing$；　　(2) $A \cup \complement_U A = U$；

(3) $\complement_U \varnothing = U$；　　(4) $\complement_U U = \varnothing$；

(5) 若 $A \cap B = \varnothing$，则 $A \subseteq \complement_U B$ 且 $B \subseteq \complement_U A$.

例 11　已知全集 $U = R$，$A = \{x \mid x > 1\}$，$B = \{x \mid -1 < x < 2\}$. 求：

(1) $\complement_U A \cap \complement_U B$；　　(2) $\complement_U A \cup \complement_U B$；

(3) $\complement_U (A \cup B)$；　　(4) $\complement_U (A \cup B)$.

解　$\complement_U A = \{x \mid x \leqslant 1\}$，$\complement_U B = \{x \mid x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 2\}$，$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}$，$A \cup B = \{x \mid x > -1\}$.

(1) $\complement_U A \cap \complement_U B = \{x \mid x \leqslant -1\}$；

(2) $\complement_U A \cup \complement_U B = \{x \mid x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 2\}$；

(3) $\complement_U (A \cup B) = \{x \mid x \leqslant -1\}$；

(4) $\complement_U (A \cap B) = \{x \mid x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 2\}$.

从上面的运算结果可以发现：

$\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$；　　$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

这是必然的，还是偶然的呢？再试一题看看：

设 $U = \{a, b, c, d, e\}$，$A = \{a, b\}$，$B = \{b, c, d\}$，分别求 $\complement_U A \cap \complement_U B$、$\complement_U A \cup \complement_U B$、$\complement_U (A \cup B)$、$\complement_U (A \cap B)$.

可求得：$\complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U (A \cup B) = \{e\}$，$\complement_U A \cup \complement_U B = \complement_U (A \cap B) = \{a, c, d, e\}$. 看来这两个结果有其必然的联系.