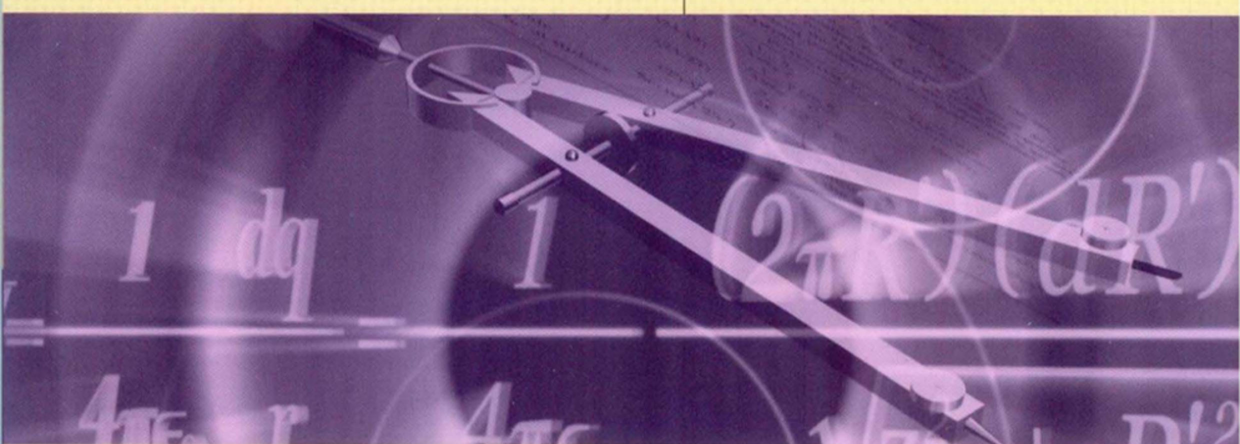
现代职业教育系列规划教材

西北大学出版社

JICHU SHUXUE

基础数学

第四册



杨小平 主编

西北大学出版社

■现代职业教育系列规划教材

JICHU
SHUXUE

基础数学

第四册

主　编　杨小平
副主编　张喜荣　张海妮
　　　　刘　颖

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

基础数学.第4册/杨小平主编.—西安:西北大学出版社,2015.3

(现代职业教育系列规划教材)

ISBN 978－7－5604－3630－2

Ⅰ.①基… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第064065号

基础数学·第4册

主　　编: 杨小平
出版发行: 西北大学出版社
地　　址: 西安市太白北路229号
邮　　编: 710069
电　　话: 029－88303313
经　　销: 全国新华书店
印　　装: 陕西奇彩印务有限责任公司
开　　本: 787mm×1092mm　1/16
印　　张: 8.25
字　　数: 151千字
版　　次: 2015年3月第1版　2015年3月第1次印刷
书　　号: ISBN 978－7－5604－3630－2
定　　价: 25.00元

前 言 QIANYAN

数学是一门文化基础课，也是一门工具学科，随着现代科学技术和经济建设的高速发展，数学的思想、内容、方法和语言日益在科学技术、生产和生活实践中得到广泛应用，成为现代科学文化知识不可缺少的组成部分。因此，使学生在学习生涯中受到必要的数学教育，提高数学素养，对培养高素质高技能应用型人才和初、中级技术人才具有十分重要的意义。

通过数学的学习，对学生的思维能力、空间想象能力、逻辑推理能力、基本的计算能力的培养都具有重要的作用，同时也可以培养学生严谨、求实的学习态度，诚实、理智、朴实的优良品质，勤奋、自强、自律的个人美德和永无止境的探索精神。

对于我院五年制高职各类专业的学生来讲，数学的基础性和工具性尤为突出，数学可以帮助我们解决生活和生产实践中的许多实际问题，如电影院座位的排法，多米诺骨牌游戏中所遵循的思维方式，游客如何借助参照物确定旅游景点，电话号码由六位数增加到七位数，可以增加多少电话容量，在航海、航空中如何借助方位角和距离来确定目标的位置，发射卫星时，卫星运行的轨道方程等等，数学的影响不仅仅是对在校期间后续课程的学习，而且也将影响走出校门后的职业进步和事业成就。

职业教育的发展日新月异，为了适应高职院校培养高质量高技能应用型人才的需要，同时也为了适应高职院校发展的需要，更好地将数学课和实际教学相结合，我们研究了学院的专业特点，充分考虑五年制学生基础知识的接受现状和未来职业能力需求，借鉴职业院校同类教材的编写经验，依据我院为五年制学生制定的数学课程标准，我们汇集自己多年来的教学经验和专业研究教学成果，务实创新、博采众长地编写出了这本数学教材，以供学生学习使用。

本教材具有以下特点：

1. 以“概念、定理适度掌握，强化实用，培养技能”为重点，充分体现了以应用为目标、够用为度的高职院校的教学基本原则；

2. 强调数学概念与实际问题的联系，通过大量的新颖的数学应用例题，使学生能体会到数学应用的可能性，从而更加明确学习数学的目的；

3. 充分考虑五年制高职学生的数学基础，理论描述精确简练，具体讲解明晰易懂，较好地处理了初中数学与中高职数学之间的过渡和衔接；

4. 注重数形结合，加强几何直观性，力求简单、明了，不过分追求严格的理论证明和知识系统的完整性，力求做到教师好教、好用，学生易学、好学；

5. 降低起点，减小坡度，分散难点，提升兴趣。课后配备的习题量均分为 A,B 两个层次，A 层次选题为基础题、B 层次选题为能力提高题，每章后配备一定的复习题，供学生学习时选用；

6. 本教材的编写过程中我们有意识地融入了一些数学文化、数学素养的元素，让学者感到数学还是一门充满人文精神的科学。

本书是《基础数学(第四册)》，由杨小平提出编写思路、拟定编写体例和大纲，然后全体编者共同讨论和修改，在达成共识之后进行编写。全体主编和副主编参与了书稿的校对，最后由主编完成了全书的统稿工作。本书具体编写分工如下：

编　者	编写内容
张海妮	第一章　不等关系与基本不等式
刘　颖	第二章　数列 数学归纳法
张喜荣	第三章　排列 组合 二项式定理
杨小平	第四章　极坐标与参数方程
杨建宁	参与了部分章节的编写和图片处理

本书的编写过程中，得到了陕西交通职业技术学院的大力支持，得到了基础学科部陈军川、师炜两位主任的良好建议和积极指导，得到了数学教研室谢克斌、张博、王子燕、马晓翊老师的热情指导和点拨，在此表达编者诚挚的谢意。

由于时间仓促，书中缺点和错误在所难免，诚恳希望有关专家、学者不吝赐教，诚恳希望广大读者批评指正。

编　者

2015 年 5 月

M U L U

目录

第 1 章　不等关系与基本不等式

我们知道，除了我们熟知的等量关系以外，不等量关系也是现实生活中存在着的基本数学关系，在数学研究和数学应用中起着重要作用。因而，不等式是数学中一类重要的研究对象和解决问题的重要工具，利用它可以研究一些数学问题，解决很多生活中的实际问题。这一章我们将在回顾和复习不等式的基本性质以及基本不等式的基础上，了解不等式的基本用法，为以后的学习做好准备。

§1.1　不等式的性质

一、实数大小的比较

我们知道，任意两个实数 a，b 总可以比较大小，要么 $a>b$，要么 $a=b$，要么 $a<b$. 因为实数与数轴上的点是一一对应的，所以实数的大小关系可以通过数轴上相应的位置来确定，例如，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b（图 1－1 所示）

图 1－1

若 $a>b$，则点 A 在点 B 的右边；反之，若点 A 在点 B 的右边，则 $a>b$；

若 $a=b$，则点 A 与点 B 表示同一个点；

若 $a<b$，则点 A 在点 B 的左边；反之，若点 A 在点 B 的左边，则 $a<b$.

我们还知道，两个数的不等关系也可以通过运算来表示：

$$\boxed{\begin{aligned} &a>b \Leftrightarrow a-b>0;\\ &a=b \Leftrightarrow a-b=0;\\ &a<b \Leftrightarrow a-b<0. \end{aligned}}$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了.

此外，$a>0,b>0$ 时，我们还可以用求商的方法来比较两个实数的大小，即就是：

当 $a>0,b>0$ 时，

$$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b;$$

$$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b;$$

$$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b.$$

例 1 比较$\frac{2}{3}$与$\frac{11}{13}$的大小.

解 因为$\frac{2}{3}-\frac{11}{13}=\frac{26-33}{39}=-\frac{7}{39}<0$

所以$\frac{2}{3}<\frac{11}{13}$

例 2 比较$(3x-2)(x+1)$与$(2x+5)(x-1)$的大小.

解 因为

$$\begin{aligned}&(3x-2)(x+1)-(2x+5)(x-1)\\&=(3x^2+x-2)-(2x^2+3x-5)\\&=x^2-2x+3\\&=(x-1)^2+2>0\end{aligned}$$

所以，$(3x-2)(x+1)>(2x+5)(x-1)$

例 3 已知 $a>0,b>0$，试比较 a^bb^a 与 a^ab^b 的大小.

解 因为 $a>0,b>0$，所以 a^b,b^a,a^a,b^b 均大于 0.

$$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=a^{a-b}b^{-(a-b)}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$$

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1,a-b>0$，故$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时 $a^bb^a<a^ab^b$；

当 $a=b\neq0$ 时，显然 $a^bb^a=a^ab^b$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1,a-b<0$，故$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时 $a^bb^a<a^ab^b$.

综上所述，对于任意 $a>0,b>0$，总有 $a^bb^a\leqslant a^ab^b$.

【想一想】

老李从鱼摊上买了 3 条鱼，平均每条 a 元，又从另一个鱼摊上买了 2 条鱼，平均每条 b 元，后来他又以每条$(a+b)/2$ 元将鱼全部卖给了小王，结果他赔了钱，这是为什么？

【练习 1】

1. 比较$(a+1)(a^2-a+1)$与$(a-1)(a^2+a+1)$的大小.

2. 比较 $(2x+5)(3x-4)$ 与 $(3x-5)(2x+4)$ 的大小.

二、不等式的性质

引例 1 马老师的年龄比张老师大，张老师的年龄比刘老师大，则不难知道马老师与刘老师的年龄关系：马老师的年龄比刘老师大.

即就是：如果马老师的年龄是 a，张老师的年龄是 b，刘老师的年龄是 c，

因为 $a>b, b>c$，

所以 $a>c$.

不等式的**基本性质** 1**(传递性)**：如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$；

引例 2 观察不等式 $9+2>6+2$；$9+0>6+0$；$9+(-1)>6+(-1)$ 等，不难发现：给一个不等式两边同时加(或减)同一个数，不等号的方向不改变.

不等式的**基本性质** 2**(加法性质)**：如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$；

引例 3 观察下列不等式

$8\times 3>5\times 3$；$8\times 2>5\times 2$；$8\times(-3)<5\times(-3)$；$8\times(-2)<5\times(-2)$

不难发现：不等式两边同时乘以同一个正数，不等号的方向不改变；不等式的两边同时乘以同一个负数，不等号的方向改变.

不等式的**基本性质** 3**(乘法性质)**：如果 $a>b, c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b, c<0$，那么 $ac<bc$.

利用以上性质可以得到以下两个推论：

推论 1 如果 $a>b, c>d$，那么 $a+c>b+d$.

推论 2 如果 $a>b>0, c>d>0$，那么 $ac>bd$.

证明 因为 $a>b, c>0$ 由性质 3 可得 $ac>bc$，

同理 $c>d, b>0$，所以有 $bc>bd$，

于是，由性质 1 可知 $ac>bd$.

在推论 2 中，若 $c=a, d=b$，可得 $a^2>b^2$.

一般地，可以得到：

推论 3 如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$(n 为正整数).

推论 4 如果 $a>b>0$，那么 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$($n$ 为正整数).

【思考交流】

如果 $ac>bc$，是否一定能得出 $a>b$?

例 4 已知 $a>b, c<d$，求证 $a-c>b-d$.

证明 因为 $c<d$，两边同乘以 -1 得，$-c>-d$

又因为 $a>b$，所以 $a+(-c)>b+(-c)$，即 $a-c>b-d$.

例 5 已知$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$,求$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$的取值范围.

解 因为$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$,

由推论1知,$\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\alpha<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,即$-\frac{\pi}{6}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{4}$,这就是$\alpha+\beta$的取值范围.

由性质3可知$-\frac{\pi}{4}<-\beta<\frac{\pi}{3}$,所以$\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\alpha+(-\beta)<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$,

即$-\frac{\pi}{12}<\alpha-\beta<\frac{5\pi}{6}$,这就是$\alpha-\beta$的取值范围.

例 6 服装市场按每套90元的价格进购40套童装,应缴纳的税费为销售额的10%.

(1) 如果要获得不低于900元的纯利润,每套童装的售价至少应是多少?

(2) 由于市场竞争激烈,销售商获得的纯利润不会超过2880元,问每套童装的售价至多是多少?

解 设每套的童装的售价为x元,则

(1) $40(x-90)-10\%\times 40x\geqslant 900$

化简得: $36x-3600\geqslant 900$

由性质2, $36x\geqslant 4500$

由性质3, $x\geqslant 125$

答:每套童装的售价至少应是125元.

(2) $40(x-90)-10\%\times 40x\leqslant 2880$

化简得: $36x-3600\leqslant 2880$

由性质2, $36x\leqslant 6480$

由性质3, $x\leqslant 180$

答:每套童装的售价至多是180元.

【思考交流】

1. 如果$a^2>b^2$,是否一定有$a>b$?为什么?

2. 如果$a>b$,是否一定有$a^2>b^2$?为什么?

【练习 2】

1. 设$a>b>0$,证明:$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. 若$a>b$,$c<d$,试比较$2a-3c$与$2b-3d$的大小.

习题 1.1

A 组

1. 用不等式表示下列数量关系：

(1) x 的 3 倍大于 x 的 2 倍与 5 的差；　(2) y 的 $\frac{3}{4}$ 与 x 的 $\frac{1}{2}$ 的差小于 2；

(3) y 的一半与 4 的和是负数；　(4) 5 与 x 的 4 倍的差不是正数.

2. 按照下列条件写出仍然成立的不等式，并说明根据不等式的哪条性质：

(1) $m>n$，两边都减去 2；　(2) $m>n$，两边都乘以 2；

(3) $m>n$，两边都加上 2；　(4) $m>n$，两边都乘以 -2；

3. 如果 $a+b<0$，$b>0$，试将 $a,-a,b,-b$ 按从小到大的顺序进行排列.

4. 若 $8<x<12$，$2<y<10$，求 $x+y$，$x-y$，$\frac{x}{y}$ 的取值范围.

5. 甲、乙两家旅行社对家庭旅游实行优惠政策，甲旅行社提出：如果户主买一张全票，那么其余家庭成员都可以享受五五折优惠；乙旅行社提出：家庭旅游按照集体票计算，一律按七五折优惠. 如果这两家旅行社的原票价相同，那么哪家旅行社的家庭旅游价格更优惠呢？

B 组

1. 设 $a>b$，$c>d$，$x>0$，求证：$d-ax<c-bx$.

2. 求证：

(1) 若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$；

(2) 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

3. 如果 $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$，那么，从 $b<d$ 能否推出 $a>c$？并且加以说明.

§1.2　绝对值不等式

一、绝对值不等式的概念

绝对值不等式的定义：

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

有定义易知：$|ab|=|a||b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

以下是几个基本不等式的解：

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$；

$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$，或 $x<-a(a>0)$；

$|x-m|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x-m<a\Leftrightarrow m-a<x<m+a$；

$|x-m|>a(a>0)\Leftrightarrow x-m>a$，或 $x-m<-a$，$\Leftrightarrow x>m+a$，或 $x<m-a$.

定理　对任意实数 a 和 b，有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时，等号成立.

由以上的定理易得：

1. 如果 a,b,c 是实数，则 $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$，当且仅当 $(a-b)(b-c)\geqslant 0$ 时，等号成立；

2. 如果 a,b 是实数，则 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

例 1　如果 $|A-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|B-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，求证：$|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$.

证明　$|(A+B)-(a+b)|=|(A-a)+(B-b)|\leqslant|A-a|+|B-b|$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例 2　设 $a\neq 0$，求证：$\dfrac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

证明　分两种情况讨论：

(1) 当 $|a|\leqslant|b|$ 时，结论显然成立；

(2) 当 $|a|>|b|$ 时，因为
$$\begin{aligned}|a^2-b^2|&\geqslant|a^2|-|b^2|=|a|^2-|b|^2\\&=(|a|+|b|)(|a|-|b|)\\&\geqslant|a|(|a|-|b|)\end{aligned}$$

所以，$\dfrac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

【练习 1】

1. 求证：$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.

2. 已知 $|x|<\dfrac{a}{4}$，$|y|<\dfrac{a}{6}$，求证：$|2x-3y|<a$.

二、绝对值不等式的解法

例 3　解不等式 $|x-2|\leqslant 7$.

解法一：原不等式可化为 $-7\leqslant x-2\leqslant 7$，即

$$\begin{cases} x-2\geqslant -7 & (1) \\ x-2\leqslant 7 & (2) \end{cases}$$

解不等式(1)可得解集 $\{x \mid x\geqslant -5\}$，解不等式(2)可得解集 $\{x \mid x\leqslant 9\}$，如图 1-2 所示

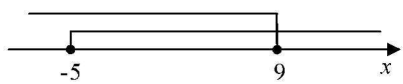


图 1-2

所以，原不等式的解集是 $\{x \mid -5\leqslant x\leqslant 9\}$.

解法二：这个不等式解的几何意义是：数轴上到实数 2 对应的点的距离小于或等于 7 的点，如图 1-3 所示，也就是说，这些点都在以实数 2 对应的点为圆心，7 为半径的圆内或圆上.

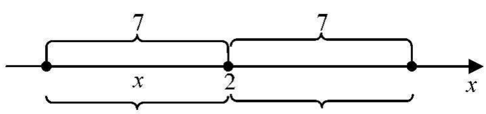


图 1-3

所以，这个不等式的解为 $2-7\leqslant x\leqslant 2+7$，即 $-5\leqslant x\leqslant 9$，

从而，原不等式的解集是 $\{x \mid -5\leqslant x\leqslant 9\}$.

例 4　解不等式 $|2-3x|\leqslant 1$.

解　原不等式可化为 $-1\leqslant 2-3x\leqslant 1$，即

$$\begin{cases} 2-3x\geqslant -1 & (1) \\ 2-3x\leqslant 1 & (2) \end{cases}$$

解不等式(1)可得解集 $\{x \mid x\leqslant 1\}$，解不等式(2)可得解集 $\left\{x \mid x\geqslant \frac{1}{3}\right\}$，如图 1-4 所示，所以，原不等式的解集是 $\left\{x \mid \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

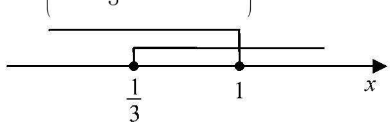


图 1-4

从以上例题可以看到：解含有绝对值的不等式，关键在于利用绝对值的意义设法去掉绝对值符号，把它转化为一个或几个普通的不等式或不等式组. 掌握了这一点，就不

难解其它一些复杂的含有绝对值的不等式了.

例 5　解不等式 $|x+1|+|x-2|\geqslant 5$.

解　这个不等式的几何意义是:数轴上到 -1 对应的点的距离与到 2 对应点的距离之和不小于 5 的点.

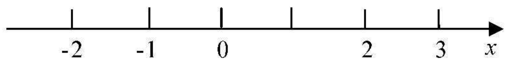


图 1-5

因为 -1 与 2 对应点的距离是 3,而 $3<5$,从图 1-5 可知,-2 对应的点到 -1 与 2 对应的点的距离之和等于 5,3 对应的点到最小 -1 与 2 对应的点的距离之和也等于 5,-2 左侧的点以及 3 右侧的点到 -1 与 2 对应的点的距离之和都大于 5.

所以,不等式的解集是 $\{x \mid x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3\}$.

【练习 2】

解下列不等式:

(1)$4|3x-1|-1\leqslant 0$;(2)$|x-1|+|x-3|\leqslant 4$;(3)$|x+4|-|x-1|\leqslant 6$.

习题 1.2

A 组

1. 不等式 $1<|x-1|<4$ 的解集为____________________.

2. 求证:$|a+b|+|a-b|\geqslant 2|a|$.

3. 已知 $|x-A|<r$,求证:$|x|<|A|+r$.

4. 解下列不等式:

(1)$|2-5x|<\dfrac{1}{5}$;　(2)$|5x+3|-9\leqslant 0$;　(3)$|2x+5|\geqslant 7$;

(4)$2|3x-1|-5\geqslant 0$;　(5)$|x-1|+|x+2|\geqslant 3$.

B 组

1. 解不等式 $|x+19|-|x-98|\leqslant 100$;

2. 解不等式 $|2x+1|+|3x-2|\geqslant 5$;

3. 证明不等式:$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

§1.3　不等式的证明

不等式的性质和基本不等式的求解是证明不等式的理论依据.但是由于不等式的

形式多样，因此不等式的证明方法也很多，下面我们举例说明几种常见的证明方法.

一、比较法

我们已经知道 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$，$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$，因此要证明 $a > b$，只需证明 $a - b > 0$ 即可，这种方法称作求差比较法；我们还知道 $a > b > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} < 1$ 或 $\dfrac{a}{b} > 1$，因此要证 $a > b$，只需证明 $\dfrac{b}{a} < 1$ 或 $\dfrac{a}{b} > 1$ 即可，这种方法称作求商比较法. 求差比较法与求商比较法统称为**比较法**，即

(1) 欲证 $a > b$，即证 $a - b > 0$. **求差比较法**

(2) 若 $a, b \in \mathbf{R}^+$，欲证 $a > b$，即证 $\dfrac{a}{b} > 1$. **求商比较法**

例 1　求证：$2x^2 + 3 > x$.

证明　因为 $2x^2 + 3 - x = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{23}{8} \geqslant \dfrac{23}{8} > 0$

所以　$2x^2 + 3 > x$.

由例 1 可知用求差比较法证明不等式的步骤是：作差，变形，判断符号，得出结论.

例 2　已知 a, b 都是正实数，且 $a \neq b$，求证：$a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2$.

证明

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 &= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ &= (a - b)^2(a + b) \end{aligned}$$

因为 $a \neq b$，所以 $(a - b)^2 > 0$，又因为 a, b 都是正实数，所以 $a + b > 0$，

即　$a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2$.

例 3　已知 $a > 0, b > 0$，求证：$a^4 + b^4 \geqslant a^3 b + ab^3$.

证明

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 - a^3 b - ab^3 &= a^3(a - b) + b^3(b - a) \\ &= a^3(a - b) - b^3(a - b) \\ &= (a^3 - b^3)(a - b) \\ &= (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

因为 $a > 0, b > 0$，所以 $a^2 + ab + b^2 > 0$，

又因为 $(a - b)^2 \geqslant 0$，所以 $(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geqslant 0$

即　$a^4 + b^4 \geqslant a^3 b + ab^3$，当且仅当 $a = b$ 时，取“=”号.

例 4　已知 $a > b > c > 0$，求证：$a^a b^b c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明　因为

$$\begin{aligned} \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} &= a^{\frac{2a-b-c}{3}} b^{\frac{2b-a-c}{3}} c^{\frac{2c-a-b}{3}} \\ &= a^{\frac{a-b}{3} + \frac{a-c}{3}} b^{\frac{b-a}{3} + \frac{b-c}{3}} c^{\frac{c-a}{3} + \frac{c-b}{3}} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \end{aligned}$$

且 $a>b>0$,所以 $a-b>0$,$\frac{a}{b}>1$,故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}>1$,同理可证:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}>1,\quad \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}>1$$

所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}>1$,即 $a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

【练习 1】

1.用比较法证明:$(x-1)(x-3)<(x-2)^2$.

2.当 $a>b>0$ 时,用比较法证明:$a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

在证明不等式时,还常常用下面的定理和推论.

定理 1 如果 $a,b\in R$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号).

证明:$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

当 $a\neq b$ 时,$(a-b)^2>0$,当 $a=b$ 时,$(a-b)^2=0$,

所以,$(a-b)^2>0$,即:$a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

所以,$a^2+b^2\geqslant 2ab$.

推论 如果 $a,b\in R^+$,那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取“=”号)

这是因为

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R^+$,且 $n>1$,那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

叫作这 n 个正数的**算术平均值**,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

叫作这 n 个正数的**几何平均值**.

定理 2 如果 $a,b,c\in R^+$,那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号).

证明:因为

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0\end{aligned}$$

所以,$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.