常微分方程习题解

庄　万　　主编

山东科学技术出版社

前　言

常微分方程是数学专业的一门重要的基础课程。由于它在科学、技术中有着广泛的应用,理工科各专业的高等数学课程也将会有越来越多的常微分方程的内容。我们根据教学的要求编写这本题解,希望它能对数学专业、理工科开设高等数学课程各专业、参加自学考试的各相关专业的师生均有参考价值。

常微分方程是一个有近四百年发展历史的古老学科,在上一世纪后半叶,在我们国内就出版了多种比较成熟和较高水平的常微分方程教材。本题解按常微分方程课程的基本内容分成七章。为了便于读者查阅,在每一章的各节分提要、题解两个部分。在提要部分中,我们列出该节各题解涉及到的基本概念、定理、公式和求解方法。各章题解部分的习题就是从书末列出的国内外教材中选择出来的。由此看出这本题解所包含的面还是比较广的。

参加本书编写工作的是庄万教授以及山东师范大学数学系微分方程专业的教师和研究生。庄万首先安排他们从这些参考书中挑选习题及给出题解,初稿完成后,由庄万逐题审核、修改、补充并统一定稿。其中参加第一、六章工作的是吕军亮、钱守国;参加第二、三、四、五、七章工作的分别是刘庆荣、周庆华、侯婷、于欣妍、伊继金。在完稿过程中钱守国还做了一些抄写与校对的工作。

本书能在较短的时间内出版，得力于山东科学技术出版社的积极支持，在此深表谢意。由于时间匆促、水平所限，书中错漏难免，恳请读者批评指正。

编 者

2003 年 6 月于济南

目　　录

第一章　绪论 …… 1
§1.1　基本概念 …… 1
§1.2　导出微分方程的实例 …… 5
§1.3　线素场——微分方程的几何意义 …… 21
第二章　初等积分法 …… 28
§2.1　变量分离方程 …… 28
§2.2　齐次方程 …… 38
§2.3　一阶线性方程与伯努利方程 …… 53
§2.4　黎卡提方程 …… 76
§2.5　全微分方程与积分因子 …… 81
§2.6　一阶隐式微分方程 …… 109
§2.7　高阶方程的降阶 …… 135
§2.8　小结习题 …… 158
第三章　一般理论 …… 170
§3.1　毕卡逐次逼近法与存在惟一性定理 …… 170
§3.2　初值问题的近似计算与误差估计 …… 187
§3.3　解的延展 …… 190
§3.4　解对初值和对参数的连续依赖性和可微性 …… 203
§3.5　微分方程组的基本理论 …… 207
第四章　线性微分方程 …… 225
§4.1　线性微分方程的一般理论 …… 225
§4.2　常系数齐次线性微分方程 …… 248
§4.3　常系数非齐次线性微分方程 …… 265

§4.4 变系数线性微分方程 …… 313
§4.5 幂级数解法 …… 342
§4.6 应用实例 …… 376
第五章 常微分方程组 …… 384
§5.1 一阶微分方程组 …… 384
§5.2 线性微分方程组的一般概念及理论 …… 392
§5.3 常系数齐次线性微分方程组 …… 436
§5.4 常系数非齐次线性微分方程组 …… 517
第六章 定性与稳定性理论初步 …… 572
§6.1 二维自治系统与相平面 …… 572
§6.2 初等奇点附近轨线的分布 …… 575
§6.3 极限环 …… 591
§6.4 稳定性理论初步 …… 599
§6.5 李雅普诺夫第二方法 …… 610
第七章 一阶偏微分方程 …… 622
§7.1 首次积分 …… 622
§7.2 一阶线性齐次偏微分方程 …… 636
§7.3 一阶拟线性偏微分方程 …… 662
参考文献 …… 692

第一章　绪　　论

§1.1　基本概念

提　　要

定义1　含有自变量、未知函数及其导数的关系式称为微分方程．只有一个自变量的微分方程称为常微分方程，否则称为偏微分方程．

定义2　微分方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的阶．

如

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

是 n 阶方程．

定义3　设函数 $y=y(x)$在区间 $I=(a,b)$上有定义，且有直到 n 阶的导数，能使在该区间上成立

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=y(x)$为方程(1)的解，I 是解 $y=y(x)$的定义区间．$y=y(x)$有时由隐方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定，把 $\varphi(x,y)=0$ 称为方程的隐式解(或也称解)．

定义4　求微分方程满足某种指定条件(通常称为定解条

件)的解的问题称为定解问题.

如,n 阶方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{2}$$

条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0^1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

称为 n 阶方程(2)的初始条件.这里 x_0, y_0, y_0^1, $\cdots$, $y_0^{(n-1)}$,是给定的 n+1 个常数,(2)、(3)称为初值问题或柯西(Cauchy)问题.

定义 5　形如(1)或(2)的 n 阶方程的一个包含 n 个任意常数的解的表达式

$$y=y(x,C_0,\cdots,C_{n-1})$$

称为它的通解,如果至少对于在一定范围内任意给定的初始条件(3),都能找出任意常数 C_0, C_1, $\cdots$, C_{n-1}的特定值,使对应的解满足此条件.而方程满足初始条件的解称为特解或简称解.

题　　解

【1】 判断下列微分方程的阶:

1) $y'''-5xy'=e^x+1$;

2) $ty''+t^2y'-(\sin t)\sqrt{y}=t^2-t+1$;

3) $\frac{d^n y}{dx^n}=y^2+1$;

4) $y^{(4)}+xy'''+x^2y''+xy'-\sin y=0$.

解　1) 三阶;

2) 二阶;

3) n 阶;

4）四阶．

【2】 判断 $y(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$是否是方程

$$y''+2y'+y=0$$

的一个解．

解　求出 $y(x)$的一阶、二阶导数为

$$y'(x)=-2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}-xe^{-x},$$
$$y''(x)=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}$$

将其代入微分方程得

$$y''+2y'+y=xe^{-x}+2(-e^{-x}-xe^{-x})+(2e^{-x}+xe^{-x})\equiv 0$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$．所以，$y(x)$是该方程的一个解，它的定义区间为$(-\infty,+\infty)$．

【3】 判断 $y(x)\equiv 1$ 是否为方程

$$y''+2y'+y=x$$

的一个解．

解　由 $y(x)\equiv 1$ 得 $y'(x)=0$，$y''(x)=0$．对任意区间都有

$$y''+2y'+y=0+2\cdot 0+1=1\neq x$$

所以，$y\equiv 1$ 不是该方程的解．

【4】 证明 $y=\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上是方程

$$xy''+y'=0$$

的一个解，而区间$(-\infty,+\infty)$不是它的定义区间．

证　当 $x\in(0,+\infty)$时，$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，将其代入微分方程，得

$$xy''+y'=x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\equiv 0$$

所以，$y=\ln x$ 是该方程在区间$(0,+\infty)$上的一个解．

因为负数及零的对数无意义，所以区间$(-\infty,+\infty)$不是解的定义区间.

【5】 证明 $y=\frac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是方程

$$y'+2xy^2=0$$

的一个解，但任何包含-1或1点的区间不是它的定义区间.

证 当 $x\in(-1,1)$时，$y=\frac{1}{x^2-1}$及其导数 $y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$都是具有明确定义的函数. 将这些函数代入此微分方程，得

$$y'+2xy^2=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}+2x\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2\equiv 0$$

所以，$y=\frac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是该方程的一个解.

因为$\frac{1}{x^2-1}$当 $x=\pm 1$ 时无定义，所以包含1或-1点的任意区间都不是解的定义区间.

【6】 求初值问题

$$y'+y=0,\ y(3)=2$$

的解，已知其通解为 $y=Ce^{-x}$，其中 C 为任意常数.

解 因为对任意 C 的值，$y=Ce^{-x}$均为此微分方程的解，所以我们可以利用初始条件来求 C 的值. 由 $y(3)=Ce^{-3}=2$，得 $C=2e^3$. 将 C 值代入通解 $y(x)$，得该初值问题的解

$$y=2e^{3-x},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【7】 求初值问题

$$y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

的解，已知其通解为 $y(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

解 将初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 代入通解及 $y(x)$关

于 x 的一阶导数

$$y'=2C_1\cos 2x-2C_2\sin 2x$$

得到

$$y(0)=0=C_2,$$

$$y'(0)=1=2C_1$$

即得该初值问题的解为

$$y(x)=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

【8】 求边值问题

$$y''+4y=0,\ y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$$

的解，已知其通解为 $y(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$.

解 将边界条件 $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$ 代入通解中，得到方程组

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2=1\end{cases}$$

解此方程组，得 $C_1=-C_2=\sqrt{3}+1$. 将其代入 $y(x)$得

$$y(x)=(\sqrt{3}+1)(\sin 2x-\cos 2x)$$

即为此边值问题的解.

§1.2 导出微分方程的实例

提 要

微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践和科

学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题和解决问题的一个强有力的工具．在实际问题中，要求描述现象规律的某些变量之间的函数关系，但往往不能直接找到这些函数关系，却容易根据现象的某些特征建立这些变量所满足的微分方程，如果这个方程可求解，就可求得描述现象规律的函数关系了．

对于一个实际问题，要建立一个较准确的描述它的状态的数学模型——微分方程及定解条件一般是比较困难的，因为它不仅涉及到多种数学概念与方法，而且还涉及到该问题所属学科的许多知识，有时甚至需要靠实验的帮助，才能建立起较能反映实际、而在数学上又有可能处理的方程来．

为叙述上的方便，下面我们人为地把实际问题粗略的分为几何问题和其他学科问题这两大类．对于几何问题，我们建立微分方程时要熟练掌握导数、微分的几何意义，以及在分析学中熟知的用导数、微分来表达的许多其他几何概念及它们之间的关系式等；对于其他学科问题，首先要求我们掌握导数是各种意义下的瞬时变化率这一物理意义，然后把这个概念用到该问题所属学科的某种相关联的定律中去，以列出我们所要的方程来．

题　　解

（一）几何问题

【9】 在 xoy 平面上求有下列性质的曲线的方程所满足的微分方程：它上面任一点 P(x，y)的切线均与过坐标原点 O 与该点 P 的直线垂直．

解　设所求的曲线方程是 $y=y(x)$．如图，过点 P(x，y)曲线的切线的斜率为$\frac{dy}{dx}$，又 OP 的斜率为$\frac{y}{x}$，因切线与 OP 垂

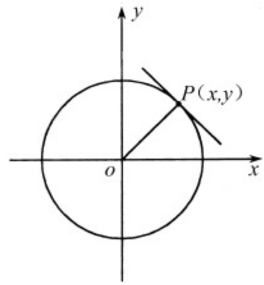
直，它们的斜率成负倒数，即有

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x}=-1$$

或

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

此即为所求的曲线方程所满足的微分方程.



(第 9 题图)

【10】 一曲线，其上每一点的切线的斜率为该点横坐标的二倍，且通过点 P(3,4)，求此曲线的方程所满足的微分方程及定解条件.

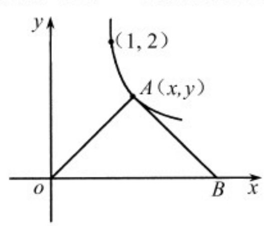
解　设曲线方程为 $y=y(x)$. 曲线在其上任一点(x,y)的切线的斜率为$\frac{dy}{dx}$，依题意可得

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=2x\\ y(3)=4\end{cases}$$

即为所求的微分方程及定解条件.

【11】 设一曲线有如下性质：曲线上各点处的切线，切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形(以 x 轴为底)且通过点(1,2)，求该曲线的方程满足的微分方程及定解条件.

解　如图. 设曲线方程为 $y=y(x)$，$A(x,y)$为所求曲线上任意一点，则过 A 点的切线方程为



(第 11 题图)

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

所以 B 点的坐标为$\left(x-\frac{1}{y'}y,0\right)$. 由题意知

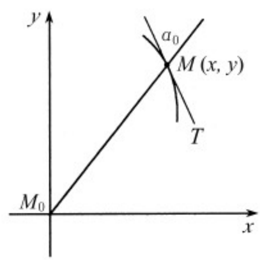
$$|AO|=|AB|$$

所以

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2+y^2}\\ y(1)=2\end{cases}$$

即为所求的曲线方程所满足的微分方程及定解条件.

【12】 已知一平面曲线经过某定点 M_0，且曲线上一点 M (M_0 除外)的切线与直线 M_0M 的交角恒等于定数 α_0，试求这条曲线的方程所满足的微分方程.



(第 12 题图)

解 如图所示，取 M_0 为坐标原点，建立直角坐标系. 设此曲线的方程为 $y=y(x)$，则对这条曲线上任一点 $M(x,y)$，M_0M 的斜率为$\frac{y}{x}$，切线 MT 的斜率为 y'. 由切线 MT 与 M_0M 的交角为 α_0 即得

$$\tan\alpha_0=\frac{y'-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{yy'}{x}}$$

整理得

$$y'=\frac{x\tan\alpha_0+y}{x-y\tan\alpha_0}$$

此即为所求的微分方程.

【13】 求下列曲线族所满足的微分方程：

1) $y=\sin(x+C)$ (C 为参数)；

2) $y = Cx + C^2$ （C 为参数）；

3) $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ （a,b 为参数）；

4) $y = ae^x + be^{-x} + x - 1$ （a,b 为参数）.

解　1) $y=\sin(x+C)$ $\quad(1)$

对 x 求导得

$$y'=\cos(x+C) \tag{2}$$

取(1)、(2)的平方和得

$$(y')^2+y^2=1$$

此即为曲线族(1)所满足的微分方程.

2) $y=Cx+C^2$ $\quad(3)$

$$y'=C \tag{4}$$

把(4)代入(3)得

$$y=xy'+(y')^2$$

此即为曲线族(3)所满足的微分方程.

3) $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ $\quad(5)$

两边对 x 求导得

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0 \tag{6}$$

(6)式两边再对 x 求导得

$$2+2(y-b)y''+2(y')^2=0 \tag{7}$$

由(7)得

$$y-b=-\frac{(y')^2+1}{y''} \tag{8}$$

由(6)得

$$x-a=\frac{y'((y')^2+1)}{y''} \tag{9}$$

将(8)、(9)代入(5)得

$$\frac{(y')^2((y')^2+1)^2}{(y'')^2}+\frac{((y')^2+1)^2}{(y'')^2}=1$$

整理得

$$((y')^2+1)^2((y')^2+1)=(y'')^2$$

即有

$$(y'')^2=((y')^2+1)^3$$

此即为曲线族(5)所满足的微分方程.

4) $y=ae^x+be^{-x}+x-1$ (10)

$$y'=ae^x-be^{-x}+1 \tag{11}$$

$$y''=ae^x+be^{-x} \tag{12}$$

由(10)−(12)得

$$y-y''=x-1$$

此即为曲线族(10)所满足的微分方程.

【14】 求二次曲线族

$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2-1}=1 \quad (C\text{ 为参数}) \tag{1}$$

的微分方程,并从微分方程本身证明这曲线族是自正交轨线族,即这曲线族中的任何两条曲线如果相交则必正交*.

解 (1)式两端对 x 求导得

$$\frac{2x}{C^2}+\frac{2yy'}{C^2-1}=0 \tag{2}$$

---

* [注] 设给定平面曲线族

$$F(x,y,C)=0 \tag{*}$$

依赖于一个参数 C.如果一条曲线与曲线族(*)的各条曲线的交角为定数 α,则称它为曲线族(*)的等角轨线;如果 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,就叫做曲线族(*)的正交轨线.

从(1)、(2)中消去 C,得

$$x(x+yy')-\frac{y(x+yy')}{y'}=1$$

即

$$(xy'-y)(x+yy')=y'$$

所以,曲线族满足的微分方程为

$$(x^2-y^2-1)y'+xy(y')^2-xy=0$$

如果用$-\frac{1}{y'}$代替上述微分方程中的 y'得

$$(x^2-y^2-1)\left(-\frac{1}{y'}\right)+xy\frac{1}{(y')^2}-xy=0$$

整理得

$$(x^2-y^2-1)y'+xy(y')^2-xy=0$$

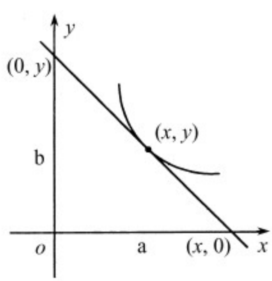
所得的微分方程与原方程一致,这说明曲线族是自正交轨线族.

【15】 设某曲线,它上面的任何一点的切线与两坐标轴所围成的三角形面积总等于 2,求这条曲线的方程所满足的微分方程.

解 如图所示,设曲线方程为 $y=y(x)$.过曲线上任一点(x,y)的切线为

$$Y-y=y'(X-x)$$

截距 $a=\frac{xy'-y}{y'}$, $b=y-xy'$.三角形的面积为



(第 15 题图)

$$\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{xy'-y}{y'}\right|\cdot|y-xy'|=2$$

整理后得到所求的微分方程为

$$x^2(y')^2-2xyy'+y^2\pm4y'=0.$$

【16】 试求抛物线族 $y=Cx^2$ 的正交轨线族所满足的微分方程.

解 所谓相互正交的轨线族,是指一轨线族中的任一条曲线与另一轨线族的任一条曲线在交点处的切线互相垂直,那么它们的切线斜率互为负倒数,所以首先要写出抛物线族所满足的微分方程,即 $y=Cx^2$ 对 x 求导得

$$y'=2Cx$$

再由

$$\begin{cases} y=Cx^2 \\ y'=2Cx \end{cases}$$

消去 C 得

$$y'=\frac{2y}{x}$$

将 y'换为 $-\frac{1}{y'}$,就得到与它正交的轨线族所满足的微分方程

$$y'=-\frac{x}{2y}\ .$$

【17】 已知曲线上任意两点 P 和 Q 之间的弧长与 P 和 Q 到一定点 O 的距离之差成正比,试求该曲线的方程所满足的微分方程.

解 以 O 点为极点建立极坐标系,在极坐标系下设曲线的方程为 $\rho=\rho(\theta)$, P、Q 两点的坐标分别为 $(\rho(\theta),\theta)$, $(\rho(\theta_1),\theta_1)$,由题意得

$$\int_{\theta_1}^{\theta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta=k(\rho(\theta)-\rho(\theta_1))\quad(k\text{ 为比例常数})$$