高职高专基础课系列教材

应用高等数学
学习指导与习题册

YINGYONG GAODENG SHUXUE
XUEXI ZHIDAO YU XITICE

主 编 周承贵 吴新军 王泸怡

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

应用高等数学
学习指导与习题册

主　编　周承贵　吴新军　王泸怡

重庆大学出版社

内容提要

本书是与《应用高等数学》教材配套使用的学习指导书,内容包括函数、极限与连续、微分学、微分学的应用、积分学及其应用、微分方程、无穷级数与拉普拉斯变换等.各章均由“知识结构”,“教学基本要求、重点和难点”,“典型例题分析”,“习题及习题答案”几部分构成.

本书所选的习题与课本内容密切结合,难度适宜,通过练习能使读者更好地掌握基本概念和基本方法,提高分析问题和解决问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学学习指导与习题册/周承贵,吴新军,王泸怡主编.—重庆:重庆大学出版社,2013.8

高职高专基础课系列教材

ISBN 978-7-5624-7667-2

Ⅰ.①应… Ⅱ.①周…②吴…③王… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 183477 号

应用高等数学

学习指导与习题册

主　编　周承贵　吴新军　王泸怡

策划编辑:周　立

责任编辑:周　立　　版式设计:周　立

责任校对:贾　梅　　责任印制:赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190　88617185(中小学)

传真:(023) 88617186　88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:7.5　字数:187千

2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 978-7-5624-7667-2　定价:15.00元

编者的话

本书是与周承贵主编的《应用高等数学》(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)相配套的学习指导书。本书与教材的知识结构顺序同步,按章进行编写,各章结构相同,内容分别为函数、极限与连续、微分学、微分学的应用、积分学及其应用、微分方程、无穷级数与拉普拉斯变换等。“知识结构”,“本章基本要求、重点和难点”是对每章知识进行简要的概括;“典型例题”是对基本概念和基本的方法中的疑难内容进行举例分析,以提高分析问题和解决问题的能力;习题部分则用于巩固基本概念、基本方法,掌握更多的解题技巧,更深刻理解所学的知识。

本书由周承贵、吴新军、王泸怡担任主编,潘冬、宋江艳、李华胜、廖睿文为副主编。参加本书内容编写:第 1 章(周承贵)、第 2 章(王泸怡)、第 3 章(潘冬)、第 4 章(吴新军)、第 5 章(廖睿文)、第 6 章(宋江艳、李华胜)。全书结构安排、统稿、定稿由周承贵承担。

由于时间紧,编者水平有限,书中可能有不少错误,请读者予以批评指正。

编　者

2013 年 8 月

目录

第 1 章 函数　极限　连续

1.1　知识结构

- 函数
  - 一元函数
    - 定义
      - 定义域、值域
      - 函数表达式、函数值
    - 性质
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
      - 有界性
    - 反函数
    - 初等函数
      - 基本初等函数
      - 复合函数
  - 多元函数
    - 多元函数定义、定义域
    - 多元函数表达式、函数值
    - 二元函数的图形

- 极限与连续
  - 一元函数的极限与连续
    - 极限的描述性定义
      - 数列极限
      - 函数极限
      - 单侧极限
    - 极限的性质
    - 极限的四则运算
    - 两个重要极限
    - 无穷小量与无穷大量
      - 无穷小量
      - 无穷小量与极限存在的关系
      - 无穷小量的性质
      - 无穷大量
      - 无穷小量与无穷大量的关系
    - 连续
      - 函数在一点连续
      - 函数在区间连续
      - 函数间断点及分类
      - 初等函数的连续性
    - 极限与连续的关系
  - 多元函数的极限与连续
    - 多元函数极限的定义、求法
    - 多元函数的连续性
  - 闭区间(域)连续函数的性质

1.2　本章基本要求、重点和难点

1）**基本要求**

（1）理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数概念；理解极限的描述性定义；理解函数在一点连续的概念及初等函数的连续性.

（2）了解反函数和复合函数的概念；了解函数的单调性、有界性、周期性和奇偶性；了解左、右极限的定义；了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系；了解两个极限存在的准则；了解初等函数的连续性.

（3）掌握基本初等函数的性质及图形；掌握复合函数的复合过程；掌握极限四则运算法则.

（4）会求出简单实际问题中的函数关系；会用两个重要极限求极限；会对无穷小进行比较；会判定间断点的类型.

（5）知道在闭区间（域）连续函数的性质.

2）**重点**

函数的概念及性质，极限的概念，无穷小及其阶的比较，极限的计算方法，函数的连续性.

3）**难点**

函数概念的理解，分段函数的意义，反函数的求法，复合函数的概念，函数关系的建立，极限概念的理解，极限的计算方法，函数间断点及分类.

1.3　典型例题

题型 1　函数值与函数记号.

例 1　设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求（1）$f(x-1)$；　（2）$f\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　（3）$f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

解　（1）$f(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)+1}=\dfrac{1}{x}$

（2）$f\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=f\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}\right)=f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{2x+1}$

（3）$f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=\dfrac{2+1}{2\times2+1}=\dfrac{3}{5}$

题型 2　求函数的定义域.

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-4}+\sqrt{3x-2}-\ln(5-x)$ 的定义域.

解　要使函数 y 有意义,必须$\begin{cases}3x-2\geqslant 0\\ 5-x>0\\ x^2-4\neq 0\end{cases}$

解不等式组得$\begin{cases}x\geqslant \dfrac{2}{3}\\ x<5\\ x\neq \pm 2\end{cases}$

所以原函数的定义域为$\left[\dfrac{2}{3},2\right)\cup(2,5)$.

题型3　判断函数的特性.

例3　判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x\dfrac{1-a^x}{1+a^x},(a>0,a\neq 1)$；　　(2)$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3)$f(x)=(x^2+x)\sin x$.

解　(1)因为在定义域内$f(-x)=(-x)\dfrac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}}=(-x)\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=f(x)$

所以$f(x)$是偶函数.

(2)因为在定义域内$f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$

所以$f(x)$是奇函数.

(3)$f(-x)=[(-x)^2+(-x)]\sin(-x)=-(x^2-x)\sin x$

由于$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$

所以$f(x)$是非奇非偶函数.

题型4　函数关系的建立.

例4　某厂生产某种产品1 600 t,定价为150 元/t,规定在销售量在不超过800 t时,按原价出售,超过800 t时超过部分按原价八折优惠,试求销售收入R与销售量x的函数关系.

解　当$0\leqslant x\leqslant 800$时,$R=150x$

当$800<x\leqslant 1\,600$时,$R=150\times 800+0.8\times 150\times(x-800)=24\,000+120x$

所以销售收入R与销售量x的函数关系为$R=\begin{cases}150x;\ 0\leqslant x<800\\ 24\,000+120x;\ 800<x\leqslant 1\,600\end{cases}$

题型5　判断极限的存在.

例5　判断函数$y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$当$x\to 0$时的极限是否存在.

解　当$x\to 0^-$时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,$2^{\frac{1}{x}}\to 0$,所以$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

当 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$

由于 x→0 函数的左、右极限存在不相等，由根据极限存在的充分条件知，当 x→0 时，函数 $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 的极限不存在.

题型 6　函数极限的计算.

1）利用极限的四则运算法则及初等函数连续性求极限

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}$.

解　$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}=f(2)=\frac{2^2+5}{2-3}=-9.$

2）利用零因子消去法求解 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

例 7　求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$；　（3）$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=1$

（3）采用变量替换法，将原式分子分母变为有理式，再求解

令 $x=t^6$，则 $t=\sqrt[6]{x}$，且 $x\to1$ 时，$t\to1$

原式 $=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}$.

例 8　若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，求 a 与 b 值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=1$ 且分母 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$

所以分子 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$，于是 $1+a+b=0$

即 $b=-1-a$，将其代入原极限得

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{-(x-1)}=-(2+a)$

由 $-(2+a)=1$，$1+a+b=0$，解得 $1+a+b=0$　$a=-3$，$b=2$.

3）利用无穷小因子分出法求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

例 9　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x+2)^{20}}{(5x+1)^{50}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x+2)^{20}}{(5x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{30}\left(\dfrac{3x+2}{x}\right)^{20}}{\left(\dfrac{5x+1}{x}\right)^{50}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{30}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(5+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{30}\cdot 3^{20}}{5^{50}}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{2}{7}$

4) 将 $\infty-\infty$ 型未定式转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限

例 10　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=1.$$

5) 利用求和公式求无限项和极限

例 11　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(1+n)}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$

6) 利用两个重要极限求极限

例 12　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{-2}\cdot\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}$

另解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1+\dfrac{-1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1^2=\frac{1}{2}$$

7)利用无穷小量求极限

例 13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 而$|\sin x|\leqslant1$

由无穷小量与有界量乘积是无穷小量有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$.

题型 7 函数连续性的讨论.

1)判断函数在指定点的连续性

例 14 判断函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2}, & x\neq0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为在 $x=0$ 及近旁有定义,$f(0)=-\dfrac{1}{2}$

又$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\dfrac{1}{2}=f(0)$

由连续的定义知,函数$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 15 设$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x>0;\\ a+x^2 x\leqslant0.\end{cases}$,要使函数$f(x)$在定义域内连续,求 a 的值.

解 因为函数$f(x)$在$(-\infty,0]$与$(0,+\infty)$内均为初等函数,所以函数$f(x)$在$(-\infty,0]$与$(0,+\infty)$内均为连续函数.

因为$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=1$,$f(0)=a$

要函数在 $x=0$ 处连续,则$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$,

所以 $a=1$.

例 16 求下列函数的间断点,并判断其类型:

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; (2) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; (3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

解　(1)当 $x=1$ 或 $x=2$ 时分母为零,函数没有定义,故 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$

所以 $x=1$ 是可去间断点,$x=2$ 是无穷间断点.

(2)分母为零即 $\sin x=0$ 时,函数没有定义. 使 $\sin x=0$ 的点有无穷多个,即

$$x=k\pi,(k\in Z)$$

当 $k=0$ 时,有 $x=0$,因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,所以 $x=0$ 为可去间断点.

当 $k\neq0$ 时,有 $x=k\pi$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$,所以 $x=k\pi,(k\neq0)$ 时为无穷间断点.

(3)先求 $f(x)$ 的表达式:

$$当\ |x|<1\ 时,f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=-1$$

$$当\ |x|>1\ 时,f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

当 $x=\pm1$ 时,$f(x)=0$

故
$$f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1;\\ 1, & |x|>1;\\ 0, & |x|=1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 处,因为 $f(1-0)=-1$,$f(1+0)=1$

所以 $x=1$ 为跳跃间断点;

在 $x=-1$ 处,因为 $f(-1-0)=1$,$f(-1+0)=-1$

所以 $x=-1$ 为跳跃间断点.

2)求函数的连续区间

例 17　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的连续区间.

解　由于 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 是初等函数,所以它的连续区间就是定义域区间

由 $x^2-3x+2\neq0$ 得,函数的连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

题型 8　证明方程根的存在性.

例 18　证明方程 $x=a\sin x+b$,其中 $a>0$,$b>0$,至少有一个正根,并且它不超过 $a+b$.

证明　设 $f(x)=a\sin x+b-x$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,因而在区间 $[0,a+b]$ 上也连续,且 $f(0)=b>0$,$f(a+b)=a\sin(a+b)-a<0$,由根的存在定理知,在 $[0,a+b]$ 内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$. 这表明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个根介于 0 和 $a+b$ 之间,且为正根.

1.4　习题

习题一　函数

一、判断题

1. 函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与函数 $y=x$ 是相同函数；（　　）
2. 函数 $y=(2^x+2^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇数；（　　）
3. 函数 $y=x^2(x>0)$ 是偶函数；（　　）
4. 两个单调增函数之和仍为单调增函数；（　　）
5. 设函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则通过 u 一定能复合为函数 $y=f[g(x)]$；（　　）
6. 凡是分段表示的函数都不是初等函数.（　　）

二、填空题

1. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x^2+1)$ 的定义域是________；

2. 函数 $y=\dfrac{2^x}{(2^x+1)}$ 的反函数为________；

3. 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且在闭区间 $[0,2]$ 上 $f(x)=2x-x^2$，则闭区间 $[2,4]$ 上，$f(x)=$________；

4. 设 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)}$，则 $f[\varphi(x)+1]=$________，$\varphi[f(x)+1]$ $=$________；

5. 数 $y=\log_2(\sin x+2)$ 是由简单函数________和________复合而成；

6. 幂指函数 $y=x^x$ 是由简单函数________和________复合而成.

7. 设 $f(x-y,xy)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$______；$f(1,2)=$______.

三、选择题

1. 下列函数中既是奇函数又是单调增加的函数是（　　）；

A. $\sin^3 x$　　B. x^3+1　　C. x^3+x　　D. x^3-1

2. 设 $f(x)=4x^2+bx+5$，若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，则 b 应为（　　）；

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 数 $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是（　　）；

A. 有界函数　　B. 周期函数　　C. 奇函数　　D. 单调函数

4. 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ 的定义域是（　　）；

A. $x\leqslant1$ 且 $y\geqslant1$　B. $|x|\leqslant1$ 且 $|y|\geqslant1$　C. $|x|\leqslant1$ 且 $|y|>1$　D. $|x|<1$ 且 $|y|\geqslant1$

四、计算下列各题

1. 求 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域；

2. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$；$g[f(x)]$，$g[g(x)]$；

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{1}{5}\right)$，$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

五、某工厂生产某种产品，年产量为 X 台，每台售价为 250 元，当年产量在 600 台内时，可全部售出，当年产量超过 600 台时，经过广告宣传后又可再多出售 200 台，每台平均广告费为 20 元，生产再多，本年度就销售不出去了. 试建立本年度该工厂的销售收入 R 与年产量 X 的函数关系.

习题二　数列的极限

一、判断题

1. 在数列 $\{x_n\}$ 中任意去掉或增加有限项，不影响 $\{x_n\}$ 的极限；（　　）
2. 若数列 $\{x_ny_n\}$ 的极限存在，则 $\{x_n\}$ 的极限必存在；（　　）
3. 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 也发散；（　　）
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\cdot v_n)=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.（　　）

二、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$ ________；　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=$ ________；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[4+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right]=$ ________；　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=$ ________.

三、选择题

1. 已知下列四数列：

①$x_n=2$；　②$x_n=\dfrac{2}{3n+1}$；

③$x_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{3n+1}$；　　④$x_n=(-1)^{n+1}\frac{3n-1}{3n+1}$.

则其中收敛的数列为(　　)；

A. ①　B. ①②　C. ①④　D. ①②③

2. $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\ 10, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 则必有（　　）.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=10$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ 10, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

四、设 $x_1=0.9$，$x_2=0.99$，$x_3=0.999$，…，$x_n=0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}$，…

1. 用 10 的负方幂表示 x_n；

2. 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

习题三　函数的极限

一、判断题

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x_0)=A$；（　　）

2. 已知 $f(x_0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 有可能存在；（　　）

3. 若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 必存在；（　　）

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$；（　　）

5. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$.（　　）

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=$______；2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=$______；3. $\lim\limits_{x\to0}\cos x=$______；

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$，则 $f(0+0)=$______，$f(0-0)=$______，

当 $b=$______时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；