

工程数学

主编 刘青桂 石宁 牛铭



北京理工大学出版社

高等职业教育“十二五”规划教材

工 程 数 学

主 编	刘青桂	石 宁	牛 铭	
主 审	吴素敏			
副主编	郝敏钗	宋 菲	李 鑫	李 毅
参 编	张明虎	王书田	敦冬梅	刘绛玉
	张莹莹	陈云尚	杨雪梅	张敏静

 **北京理工大学出版社**

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书根据教育部《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写而成,围绕高等职业教育工学结合的人才培养模式,以培养工程应用技术型人才为目标,服务通识性理工类专业人才培养目标。

本书共6章,内容包括线性代数初步(行列式、矩阵、线性方程组),概率统计初步,拉普拉斯变换。此外,为了方便读者学习,每一章最后附有典型例题详解,并且在书后附上了常见概率统计分布表、拉普拉斯变换简表和习题参考答案。

本书可用于高职高专院校、本科二级职业技术学院、成人高校的理工类专业数学课程教材,亦可作为工程技术人员的数学参考资料。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/刘青桂,石宁,牛铭主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.12

ISBN 978-7-5640-9983-1

I. ①工… II. ①刘… ②石… ③牛… III. ①工程数学-高等职业教育-教材
IV. ①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第280524号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

82562903 (教材售后服务热线)

68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 /

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 10

字 数 / 233千字

版 次 / 2014年12月第1版 2014年12月第1次印刷

定 价 / 25.00元

责任编辑 / 封 雪

文案编辑 / 张鑫星

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 马振武

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

随着高等职业教育改革的不断深入，各高职专业对于工学结合课程体系的要求越来越翔实且有针对性，以实现既定的专业人才培养目标。而工学结合的课程体系的关键之一就是符合高职教育规律的教材。本书依据教育部《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》精神，集合了石家庄职业技术学院、河北工业职业技术学院、石家庄学院、石家庄信息管理学校等多所院校的教师，根据多年教学实践和专业技术工作经验编写而成。力求追寻高职数学课程改革方向，服务专业人才培养目标。

本书将数学知识与实体科学和工程技术标准结合在一起，编写时遵循了三条理念：一是教学内容的选取，打破学科体系的系统性，突出职业体系的应用性。具体说就是去掉或减少不必要的理论推导，重在结论和具体方法的应用；二是理工科专业教师和技术人员参与内容编写，结合专业特点、项目案例和工程生产实际给出例题，给学生示范如何学以致用；三是利用直观的图形、通俗的语言降低学生的学习难度，提高内容的可读性以适应高等职业教育的要求。

本书由刘青桂、石宁、牛铭担任主编，郝敏钗、宋菲、李鑫、李毅担任副主编。参加本书编写的还有张明虎、王书田、敦冬梅、刘绛玉、张莹莹、陈云尚、杨雪梅、张敏静等。全书由刘青桂总策划，承担总体框架结构安排、统稿和定稿，吴素敏对全书进行了审阅。

由于水平有限、时间仓促，书中的不足之处敬请读者斧正。

编 者

目 录

第一章 行列式	1
第一节 行列式的定义	1
习题一	3
第二节 行列式的性质及计算	4
习题二	7
第三节 克莱姆法则	8
习题三	10
第四节 典型例题详解	10
复习题一	12
第二章 矩阵	14
第一节 矩阵的概念及其运算	14
习题一	21
第二节 逆矩阵	22
习题二	24
第三节 矩阵的秩与初等变换	25
习题三	30
第四节 典型例题详解	30
复习题二	33
第三章 线性方程组	35
第一节 向量与向量组的线性相关性	35
习题一	40
第二节 向量组的秩	40
习题二	44
第三节 线性方程组解的判定	44
习题三	48
第四节 线性方程组解的结构	49
习题四	56
第五节 典型例题详解	57
复习题三	58
第四章 概率论基础	60
第一节 随机事件及概率	60

习题一	66
第二节 条件概率和事件的独立性	67
习题二	72
第三节 随机变量及其分布	73
习题三	78
第四节 几种常见随机变量的分布	78
习题四	85
第五节 随机变量的数字特征	85
习题五	90
第六节 典型例题详解	91
复习题四	93
第五章 数理统计	95
第一节 数理统计的基本概念	95
习题一	100
第二节 参数估计	100
习题二	107
第三节 假设检验	108
习题三	114
第四节 典型例题详解	114
复习题五	116
第六章 拉普拉斯变换	118
第一节 拉普拉斯变换的概念和性质	118
习题一	122
第二节 拉普拉斯逆变换	123
习题二	124
第三节 拉普拉斯变换的应用	125
习题三	126
第四节 典型例题详解	126
复习题六	127
附录	129
附录一 常见概率统计分布表	129
附录二 拉普拉斯变换简表	139
习题参考答案	144
参考文献	154

第一章 行列式

线性代数是工程数学的重要组成部分，具有较强的应用性。而行列式是研究线性代数的一个重要工具。本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法。此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

第一节 行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

由 $2^2=4$ 个数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 排成的 2 行 2 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式，它表示一个算式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 a_{ij} ($i, j=1, 2$) 称为行列式的元素。下标 i 和 j 分别表示 a_{ij} 所在的行数和列数，如 a_{12} 位于第 1 行第 2 列。

例 1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-3) = 11.$

类似地，由 $3^2=9$ 个数排成的 3 行 3 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，它也表示一个算式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times (-1) + 2 \times 4 \times 0 + (-1) \times 3 \times 1 - (-1) \times 0 \times 0 - 2 \times 3 \times (-1) - 1 \times 4 \times 1 = -1.$

二、 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，先介绍余子式和代数余子式的概念。为了学习方便，不妨以三阶

行列式为例进行讨论.

定义 1 在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中, 划去 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 所在的第 i 行和第 j 列的元素, 余下的元素按原来次序排成的二阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} ; 而 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如, 三阶行列式中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

例 3 求三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

中, 元素 $a_{11}=1$ 、 $a_{12}=2$ 、 $a_{13}=-1$ 的余子式和代数余子式的值.

$$\text{解 } M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 3.$$

不难看出: $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \times (-4) + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -1$.

对于一般的三阶行列式, 不难得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

即一个三阶行列式可以表示成第一行的元素与它们对应的代数余子式的乘积之和, 也就是说, 一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义.

仿此, 把四阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

其中 A_{1j} ($j=1, 2, 3, 4$) 是元素 a_{1j} ($j=1, 2, 3, 4$) 的代数余子式.

依此类推, 一般可用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式.

定义 2 设 $n-1$ 阶行列式已定义, 则规定 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{1j} (j=1, 2, \cdots, n)$ 是元素 $a_{1j} (j=1, 2, \cdots, n)$ 的代数余子式, 是 $n-1$ 阶行列式.

如

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{例 4} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 0 + (-3) \times 4 = -12. \end{aligned}$$

例 5 计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

解 按 n 阶行列式定义

$$\begin{aligned} D &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{12} + \cdots + 0 \cdot A_{1n} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nm}. \end{aligned}$$

行列式中自左上角至右下角的对角线称为行列式的主对角线. 可见, n 阶下三角形行列式的值等于主对角线上 n 个元素的乘积.

习题一

1. 计算下列二、三阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \sqrt{c} & 1 \\ 1 & \sqrt{c} \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 求下列行列式中元素 a_{12} , a_{23} , a_{33} 的余子式和代数余子式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}.$$

第二节 行列式的性质及计算

直接用行列式的定义计算行列式的值是比较麻烦的. 本节介绍行列式的性质, 以简化行列式的计算. 另外这些性质在理论上 also 具有重要意义. 为了学习方便, 我们还是以二、三阶行列式为例进行讨论.

性质 1 将行列式的行、列互换, 行列式的值不变.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

则 $D = D^T$. 其中, 行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

该性质说明在行列式中, 行与列的地位相同. 因此, 在行列式中, 凡是对行成立的性质对列也同样成立, 反之亦然.

例 1 计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由性质 1 及上一节例 5 的结果, 得

$$D = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式的值仅改变符号.

$$\text{如 } D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -D.$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行(列)中各元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.

$$\text{如 } \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 行列式中某一行(列)的元素全为零, 则此行列式的值为零.

推论 3 行列式中有两行(列)的元素对应成比例, 则此行列式的值为零.

性质 4 若行列式中的某一行(列)所有元素都是两项和, 则此行列式等于把这些两项和各取一项做成相应的行(列), 而其余的行(列)不变的两个行列式的和.

$$\text{如 } \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 98 & 203 & 299 \end{vmatrix}.$$

解 由性质 4, 得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 98 & 203 & 299 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 100-2 & 200+3 & 300-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 100 & 200 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上, 行列式的值不变.

$$\text{如 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} \quad (\text{将 } D \text{ 的第一行的 } k \text{ 倍加到第二行上}).$$

性质 6 行列式的值等于它的任一行(列)所有元素与其代数余子式的乘积之和.

以三阶行列式为例, 则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{cases} \quad (\text{按行展开});$$

$$\left. \begin{aligned} &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \right\} \text{(按列展开)}.$$

推论 行列式的某一行(列)各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

按行: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j);$

按列: $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$

将性质 6 与推论合起来简记为

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

由行列式的性质可总结出计算一般 n 阶行列式的简单方法(降阶法): 选择零元素最多的行(或列), 用性质 5 将该行(或列)的 $n-1$ 个元素变为 0, 再由性质 6 将行列式按这一行(或列)展开, 降为一个 $n-1$ 阶行列式, 用此方法直至降到二阶, 即可求出行列式的值.

为了使计算过程清楚, 引入一些记号:

- (1) 以 r_i 表示第 i 行, 以 c_i 表示第 i 列;
- (2) 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换 i, j 两列, 记作 $c_i \leftrightarrow c_j$;
- (3) 用数 k 乘第 i 行(列), 记作 $kr_i(kc_i)$;
- (4) 第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上, 记作 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$;
- (5) 从第 i 行(列)提出公因子 k , 记作 $r_i \div k(c_i \div k)$.

例 3 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4 - 2c_1]{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 \div (-1)]{r_1 \div 2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -24. \end{aligned}$$

例 4 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1+c_i \\ i=2,3,4}]{10} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1 \div 10}]{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow[\substack{r_i-r_1 \\ i=2,3,4}]{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+r_2}]{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -160.
\end{aligned}$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开

$$\begin{aligned}
D_n &= x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\
&= x^n + (-1)^{n+1} y^n.
\end{aligned}$$

习题二

1. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 295 & 201 & 97 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

$$2. \text{ 求解方程 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明下列等式.

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3; \quad (2) \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = 0.$$

4. 计算 n 阶行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

第三节 克莱姆法则

线性代数的一个中心问题是求解线性方程组, 这里只研究方程个数和未知量个数相等的情形, 至于更一般的情形, 将在第三章讨论.

定理 1 (克莱姆法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列元素换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所构成的行列式.

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x + y = 18, \\ 4x + 8y = 100. \end{cases}$$

解 其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 而 $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 100 & 8 \end{vmatrix} = 44$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 4 & 100 \end{vmatrix} = 28$.

由克莱姆法则, 方程组的唯一解为: $x = \frac{D_1}{D} = 11$, $y = \frac{D_2}{D} = 7$.

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 - 7x_3 = -5, \\ -2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & -1 & -7 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, & D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 6, & D_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -14. \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 0, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{5}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -\frac{7}{5}.$$

在方程组 (1.1) 中, 如果所有的常数项 $b_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则称方程组为齐次线性方程组; 反之, 如果常数项不全为零, 则称方程组为非齐次线性方程组. 对于齐次线性方程组, 显然至少有一组零解 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

定理 2 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

有非零解的充要条件为系数行列式 $D=0$.

例 3 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0. \end{cases}$$

有非零解, 求 k 值.

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - kr_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & 1-k & k-1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-k)^2 \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1+k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-k)^2 (k+2).$$

因为方程组有非零解, 所以 $D=0$, 得 $k=1$ 或 $k=-2$.

习题三

1. 用克莱姆法则解下列方程组.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_2 + 5x_3 = 4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

2. 下列齐次线性方程组有非零解吗?

$$(1) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 8x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

3. k 取何值时, 下列齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 0, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

第四节 典型例题详解

例 1 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 左边} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, 3]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (x_2 + x_1) & (x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \text{右边}.
 \end{aligned}$$

例 2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & 11 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & 11 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 2 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & -5 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -6 & -9 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 + 3r_1 \\ r_3 + r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 15 & 23 & -15 \\ 0 & 14 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -20 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 15 & 23 & -15 \\ 14 & 10 & -1 \\ -1 & -20 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 15 & 23 & -15 \\ 14 & 10 & -1 \\ -1 & -20 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} -1 & -20 & 1 \\ 14 & 10 & -1 \\ 15 & 23 & -15 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 + 15r_1]{r_2 + 14r_1} \begin{vmatrix} -1 & -20 & 1 \\ 0 & -270 & 13 \\ 0 & -277 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -270 & 13 \\ -277 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -270 & 13 \\ -277 & 0 \end{vmatrix} = -3\,601.
 \end{aligned}$$

例 3 k 取什么值时, 下面方程组有唯一解? 有唯一解时求出解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

解 这是有三个未知量三个方程的非齐次线性方程组. 由克莱姆法则知, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组有唯一解. 由

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & -2 & 2-k \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} k+1 & k+1 \\ -2 & 2-k \end{vmatrix} = (k+1)(4-k)
 \end{aligned}$$