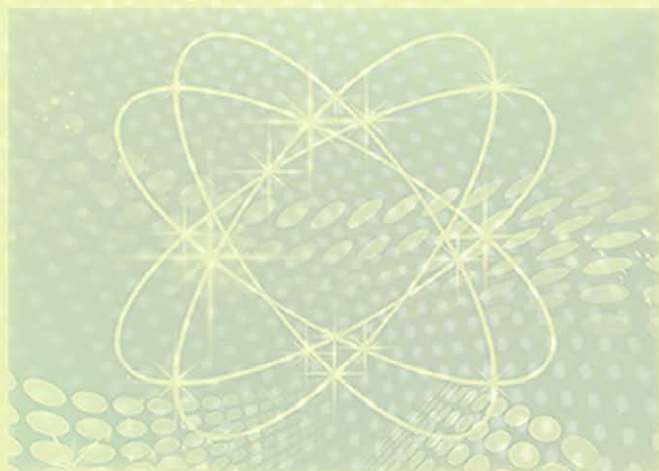


新市民子女数学文化构建



作者简介 段九宇，

1987年参加工作，一直从事小学数学教育及研究工作，是中学高级数学教师、成都市特级教师、成都市学科带头人、成都市优秀青年教师。2010年成立“段九宇特级教师工作室”，现挂牌于成都市康河小学。



段九宇特级教师工作室成员

成都市实验小学战旗分校：段九宇

成都市实验小学战旗分校：王军蓉

成都市实验小学战旗分校：张载耀

成都市红光小学：谭娟

成都市实验小学成飞分校：张其全

成都市彩虹小学：蔡军

成都市康河小学：张莉莉

成都市实验小学西区分校：董华英

成都市青羊实验中学附小：刘湘艳

成都市红光小学：康宁



目 录

引言 责任之旅

第一章 数学文化及其作用

第一节 数学文化的含义

第二节 数学文化的作用

第三节 新市民子女数学文化构建的紧迫性

第二章 课程教学对数学文化的渗透

第一节 教学设计

第二节 课堂实施

第三节 教学跟踪

第三章 学校建设对数学文化的运用

第一节 校园氛围的营造

第二节 教师工作室实录

第三节 教师工作室成员的收获

第四节 师生关系

第四章 例说社区教育对数学文化的孕育

第一节 家长学校

第二节 终身学习

结 语



引言 责任之旅

记得2002年第一次参与四川省教育厅师训处组织的支教活动时，周小山教授、严先元教授和省教育厅的副巡视员周雪峰老师说：“与‘新课改’成长的老是幸福的，与‘新课改’成长的老是一定会是有社会责任感。”一晃，12年过去了，留下了无数成长的足迹，这些足迹充满艰辛，但也让我收获喜悦。在康定、在泸定、在布拖，在简阳、在资阳、在乐山、在邛崃等地方留下了我与教师们研讨数学文化的身影；“5·12”地震时我正在都江堰培训成都市农村骨干教师，从生死线上幸存下来的我更加坚定了帮助教师研究数学文化的决心。从2010年起，除了完成我的本职工作外，我还在成都市文翁实验小学、康河小学继续我的研究之旅。这份责任之旅，使我个人成长，也使我与其他教师们一起成长，一路走来，受益者不仅是我和我的教师团队，还有可爱的学生们。

研究之旅中，我不时停下来思考：为什么在与教师们的交流过程中，他们谈到最多的是如何帮助新市民子女？这些新市民，从各个农村涌入城市，为城市的建设添砖加瓦，做出了贡献。政府为了解决他们的后顾之忧，义务接收他们的孩子到城市学校随班就读。这些新市民子女刚到新学校欢天喜地，但后来发现不知如何融入新集体。而我们的教师面对这些孩子，也苦于不知道如何给予他们最好的爱，纠结于哪种教育方式最适合这些孩子，哪种教育方式可以帮助这些新市民的子女树立自信心，哪种教育可以让这些孩子长成参天大树。这份社会责任沉沉地促使我思考。我们的责任是让这些新市民子女阳光十足，健康成长。幸运的是，成都市青羊区教育局2010年让我组建了一个“段九宇特级教师工作室”，来自全区七所学校的十位数学教师开始了系统的思考和行动之旅。

第一站，成都市文翁实验小学；第二站，成都市康河小学。我们的研究从新市民子女数学文化构建开始，构从课堂这个主阵地切入。

课堂是师生共同成长的舞台。在这个舞台上，师生可以按照自己对文化



浸润的理解，尽情地施展自己的才华，互相吸收营养。能最大限度舒展地成长乃这个舞台的一大幸事。

我和工作室成员对新市民子女数学文化构建的研究从一节北师大版四年级下册《小数的加减法》的数学课开始。执教教师是一名参加工作三年的男教师。这位男教师是西南大学数学系的毕业生，在校期间是奖学金获得者，他的数学思维极其严谨，而且追求卓越。他的课堂个性特色应该十分突出。

课程一开始，教师设计了一个很好的环节，以帮助学生复习小数的组成。教师让学生从 0~9 中选出三个数字，组成一个最大的两位小数。由于问题是从学生最近的学习区出发，他们很快报出了各自的答案。

接着教师又让学生写出最接近 1 的小数：0.98 和 1.02，还让他们比较这两个小数和 1 的大小关系，学生们也很快地报出了答案。老师又出示了超市的购物券，让学生解读购物券中隐含的数学信息，如酸奶一瓶 3.20 元，饼干一盒 5.70 元……课堂平稳地进行，但我观察到学生已由最初的兴致勃勃到听得“东倒西歪”了。

是什么让学生有了学习的倦怠情绪？是什么让老师的严谨教学失去了吸引力呢？这节四年级的数学随堂课，老师和孩子们需要共同研究什么数学问题？为什么要研究它？怎样研究它，才能让课堂成为师生互动的卓越课堂？解决这个问题的最佳方案，实际就是个性化教学与卓越的课堂文化的构建。

这位男教师，严谨但缺失幽默感。学生的年龄在 10 岁左右，正是活泼好动、求知欲旺盛但又易丢三落四的阶段。这样的性格特征，在课堂教学中需要依靠什么来构建卓越文化呢？

我们可以在课堂教学中紧紧依靠“数学来源于生活”的理念，依靠学生已有知识的储存和儿童的本性，依靠教师的人格魅力和严谨思维来适时点拨，给学生呈现一个生动有趣而又回味无穷的课堂。

在这堂课上，教师可以把小数的概念用生活化的情境向学生展示。其实，生活中小数处处都在，具有重要的研究意义。如果教师在开课前能尊重孩子的生活认知，在开课时让孩子们分享他们的生活中有关小数的调查，课堂就会灵动许多。根据调查情况，教师让学生再提出一些需要解决的数学问题并分享下是如何解决问题的，那么课堂的数学味道就会越来越浓。让学生当课堂的主人，从现实生活中发现问题、提出问题再解决问题，这是构建卓越课堂的一个重要元素。

教师的人格魅力和严谨思维是影响课堂质量的另一重要因素。针对本堂



课，教师可以让学生将收集的生活中的大量的数学素材展示出来，然后让其他学生点评，教师再予以点评和讲解，让学生明白“数学来源于生活”的理念。

进而，教师可以在班上组织一场有关解决问题的辩论赛。比如针对“ $24.25 + 1.6 = ?$ ”的问题正方的结果是 24.41，反方的结果是 25.85。这样，学生参与辩论赛的积极性定会空前高涨，学生会越辩越清晰、越辩越明白，越辩越把小数的加减法的算理弄得清清楚楚。教师参与辩论赛，首先会让教师的亲生形象得到很好的彰显，教师在学生辩论时要明白学生不可能一下子把一个问题说清楚，要允许并尊重课堂的瑕疵。因为教师的使命就是让课堂“百花齐放”展现精彩。在课堂上，如果教师能允许学生汇报时的暂时打结，允许学生思维碰撞时暂时的不严谨，让学生们经历一次又一次完美和瑕疵的激烈交战；如果教师在课堂上能享受学生的辩论，在学识魅力的支撑下，依靠严谨思维，对学生的辩论进行适时点拨，那么辩论赛定会进入一个更高的层次。这样的课堂是师生向往的课堂，是卓越的课堂，是带给学生无限幸福的课堂。

在新市民子女数学文化构建过程中，热爱、信任、引领是核心。教师需要的是发自内心地热爱这些新市民子女，心与心的交流一定能创造奇迹；相信每一位新市民子女都愿意学好、也能学好数学知识，给予这些孩子足够的信任，引领他们发现数学的美，并愿意为数学学习付出努力，最后成为祖国的合格建设者和接班人。

责任之旅真好！



第一章 数学文化及其作用

第一节 数学文化的含义

什么是数学文化？从狭义角度讲，数学文化是数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们的形成和发展。从广义角度看，数学文化除上述内容以外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育以及数学发展中的人文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的关系等。

数学文化同人类文化一样，具有区域特点。在古希腊文化中，以首都雅典为中心模式，实行的是奴隶主的民主制度。他们规定男性奴隶主有权利参与全体大会，并享有选举执政官的选举权，对当时的战争、财政、国家建设等重大事务具有表决权。规定这种选举权和表决权必须建立在民主的基础上，如果双方发生分歧，必须用理由来说服对方。大家为了说明自己的理由是真理，必须先证明。因此，当时就已经产生了一些人人认同的“公理”，同时规定了一些名词的意义，然后把陈述的命题称为“公理的逻辑推论”。当时这种辩论的民主氛围相当浓厚，我们熟知的欧氏《几何原本》就是在这样的背景下产生的。当时其他代表人物还有泰勒斯、毕达哥拉斯、柏拉图、亚里士多德。古希腊文化追求的是一种精神享受，一种对大自然的理解。像“对顶角相等”这样的命题，在《几何原本》里列入命题 15，借助公理 3（等量减等量，其差相等）给予证明。

作为古希腊的代表人物毕达哥拉斯，他这一生的经历就很好地体现了古希腊数学特点，也体现了早期欧洲数学文化的特点。毕达哥拉斯不仅是一位数学家，还是一位哲学家。他出生在希腊撒摩亚（Samoa）的一个贵族家庭，早期像很多古希腊学者一样，去各地游历学习，他大部分时间都在埃及和巴比伦这两个当时世界上文化水准极高的文明古国里。随着他对数学的造



诣越来越高，后来就到了意大利南部去传授他的数学和哲学思想，并成立了毕达哥拉斯学派。难能可贵的是毕达哥拉斯允许在他开坛授课时妇女们来听课，虽然仅仅针对是贵族妇女，但这在当时是具有相当进步意义的。他认为女性和男性一样，共同享有求知的权利，而且是平等的。从后来的史料中发现，在他的学派里就有十多名女性学者，而当时的很多学派中都没有女性学者。

有个非常有趣的故事，他认为每一个人都应该具备一些基本几何知识，有一次，他在街上散步时，看到一个十分勤勉的穷人，在和这个穷人交流中，发现他对数学尤其是几何一窍不通。于是他和这个穷人约定，如果穷人能学懂一个定理，就可以从他那里得到一枚钱币。当然，看在钱币的份上，穷人愉快地接受了这份协议。令人惊奇的是，不久这个穷人就对几何产生了非常大的兴趣，反而要求毕达哥拉斯讲得多一些，讲得快一些。为了激励自己的老师，穷人和老师达成一项新的协议：如果老师多教一个定理，他就给老师一枚钱币。就这样，没过多久，毕达哥拉斯就从这位学生手里收回了他的钱币。

提到“在一个直角三角形中，斜边的平方是两股平方和”这个定理，我们都耳熟能详，中国的“勾股定理”。虽然中国人（周朝的商高）和巴比伦人早在毕达哥拉斯提出前一千年就在使用，但一般人仍将定理归功于毕达哥拉斯，是因为他证明了定理的普遍性。毕达哥拉斯认为，寻找证明就是寻找认识，这种认识比任何训练所累积的经验都不容置疑，数学逻辑是真理的仲裁者。

毕达哥拉斯的成就还体现在对有理数的发现，他认为数学之美在于有理数能解释一切自然现象。但这种过于自信的认识导致对无理数的本身存在性视而不见。著名数学家希帕索斯，在一个休息日里闲来无聊，便试图找出根号2的等价分数，他用尽了一切办法，也无法找出这个等价分数，慢慢地，有一种思想从他的脑海里迸发出来——根号2的等价分数不存在。这一思想在当时是十分可怕的，也是十分危险的，可是希帕索斯在兴奋之余早已忘记了这些，赶紧找到他的老师毕达哥拉斯，将他的发现展现在老师面前。可是在当时，毕达哥拉斯学派早已用有理数解释了世间的天地万物，哪能接受这种思想的存在。希帕索斯竭尽全力向他的老师解释，而毕达哥拉斯无法用逻辑推理来反驳他的学生，显然毕达哥拉斯已经意识到了他的错误，但学派以及外部的各种因素使得毕达哥拉斯不愿承认自己的错误，并且同时做出了令



自己终身蒙羞的决定，判处他的学生——希帕索斯死刑。而希帕索斯也预感到危险即将降临在自己的身上，于是趁着夜幕未降临之际，登上了一艘小船，不幸的是，他们最终追上了希帕索斯，从此，希帕索斯长眠于大海之中。后来无理数被学者们不断地讨论着，最终，欧几里得以反证法证明了根号2是无理数。

数学文化由人类创造，不同时代有不同的文化，不同的区域也有不同的文化。文化伴随着历史，历史反映着人类文化的繁衍与传承。纵观人类的文化史，每次人类文化的高度发展总是集中出现，随后又平淡发展，随后又集中出现……大约公元前8世纪到前2世纪之间，产生了像中国的孔子、西方的亚里士多德、印度的释迦牟尼、古希腊的犹太先知和毕达哥拉斯等文化名人。德国哲学家卡尔·雅斯贝尔斯将这个时代称为“人类的轴心时代”，在这个黄金时代，人类的文化达到了前所未有的高度，其中包括“数学文化”，也做出了巨大贡献。

中国的数学受当时时代的影响，走的是实用管理数学路线，因为这样，中国在算法的研究上得到了长足的发展。比如春秋战国时期，百家争鸣，看似与西方有着相同辩论氛围的环境，但当时的制度却是君王统治制度。君王借助这些思想家和数学家统治臣民、管理国家，所以此时的数学研究主要集中在丈量田亩、兴修水利、分配劳力、计算税收、运输粮食等国家管理的实用目标上。在对大自然的理解上，就显得相对浅显。可以说，中国的数学主要体现为“管理数学”和“木匠数学”，存在于官方的文书上。负数的运用、解方程的开根法以及杨辉（贾宪）三角、祖冲之的圆周率计算、天元术那样的精致计算课题，也只能在中国诞生，而为古希腊文明所轻视。

墨子在《墨经》一书中为我们在中国数学文化史上留下了浓墨重彩的一笔，其中关于“倍”“同长”“平”“中”“圆”“正方形”等概念，他给出了经典定义。

“倍，为二也。”就是将原数加一次，或原数乘以二，称为“倍”。比如二尺为一尺的“倍”。

“同长，以正相尽也。”两个物体的长度相比，正好一一对应，完全相等，称为“同长”。

“平，同高也。”同样的高度称为“平”。这与欧几里得几何学定理“平行线间的公垂线相等”意思相同。

“中，同长也。”这里的“中”指物体的对称中心，也就是物体的中心，



为与物体表面距离都相等的点。

“圆，一中同长也。”圆可用圆规画出，也可用圆规进行检验。圆规在墨子之前早已得到广泛的应用，但给予圆以精确的定义，则是墨子的贡献。墨子关于圆的定义与欧几里得几何学中圆的定义完全一致。

“方，柱隅四灌也。”四个角都为直角，四条边长度相等的四边形即为正方形，正方形可用直角曲尺“矩”来画图 and 检验。

这些定理产生的背景都与当时农耕民族的生产需要有着密切的联系，所以中国早期的数学文化来源于生产的实际需要，具有很强的针对性。

如果说墨子是中国早期数学文化的代表的话，那将中国数学文化引向世界的则是祖冲之。

祖冲之（429—500年），字文远，我国南北朝时期杰出的数学家、天文学家。

童年时期的祖冲之和其他孩子一样，学习中国的四书五经。一天，父亲像往常一样一字一句地教着小冲之读《论语》。每次都是父亲读一段，冲之就背一段，但最多只能背到十来句就接不下去了，而这已经花了两个月的时间了，仍然不见冲之的进步，父亲终于忍不住了，一把将书扔到地上，头也不回地走了。可是祖冲之的父亲受着中国儒家文化的熏陶，没有放弃冲之，于是主动改变教学方法，让冲之理解“孔子之道”，父亲还特意把一些注解教给冲之。可是冲之还是不会，看着自己的孩子，想想邻居家的孩子，“笨蛋”“蠢牛”“没出息”不由地出现在父亲脑海中。冲之真的很笨吗？答案是否定的，其实冲之是个非常有心计的孩子，他的特长是在数学和天文学上。在一个晴朗的夜晚，夜已经很深了。小冲之却在床上翻来覆去，睡不着。脑海里不断闪现着日间最喜爱的一本书《周髀算经》里的一句话：“圆周是直径的三倍。”这种说法可信吗？带着这个问题冲之进入了梦乡。第二天，天还没亮，小冲之就跑到妈妈的床前，一边大声叫着“妈妈，妈妈”，一边摇晃着妈妈。“妈妈，能把您做鞋用的绳子给我一根吗？”妈妈望着小冲之稚嫩的小脸，说道：“可以啊，不过，你要绳子干什么？”“好妈妈，您先别问，等会儿我告诉您。”当然，妈妈对冲之是非常了解的，冲之年少时就已经很懂事了，所以妈妈就高兴地答应了。小冲之拿着绳子飞快地跑到村头的大路上，一会向前面眺望，一会向后面张望，像在等什么似的。不一会，一辆马车进入了冲之的眼帘，冲之喜出望外，急忙跑到马车前，拦住去路，对驾车的老爷爷说道：“爷爷，我用绳子量量您马车的车轮行吗？”这位老爷爷看到可



爱的小冲之，便停住马车，答应了冲之的请求。小冲之首先把绳子在车轮上绕了一圈，然后把被绕的绳子均分成三段，再用其中的一段量车轮的直径。奇怪的事情发生了，无论怎么量，轮子的三分之一周长总是比直径长。冲之百思不得其解，问老爷爷：“爷爷，书上说周长是直径的三倍，可为什么周长的三分之一比直径长呢？”“是呀，为什么周长的三分之一比直径长呢？”爷爷嘴里念叨着，可是爷爷哪里想过这个问题，再加上还要赶路，这一停车又耽误了时间，再这么耗下去，可不是办法，于是找了个借口：“孩子，我怎么知道它的长短呢？”说完后急急忙忙地坐上马车离开了。虽然爷爷离开了，但这个“周长的三分之一比直径长”的问题却一直在冲之的脑海里，一待就是许多个春秋，直到祖冲之 40 多岁那年。

当时，宋孝武帝刚驾崩不久，祖冲之也被革了职务。当他赋闲在家时，孩童时期的那个问题再一次蹦了出来。他先归纳总结了刘徽的“割圆术”（圆内接正 n 边形的边数越多，各边长的总和就越接近圆周的 actual 长度。但因为它是内接的，又不可能把边数增加到无限多，所以边长总和永远小于圆周）。刘徽计算圆周长的方法很好，但数据不够精确，不知道什么原因使得刘徽没有继续下去，带着这些疑问，祖冲之想看看刘徽的这种办法能否继续计算下去。在和儿子商量一番后，儿子高兴地说道：“太好了！父亲，让我和您一起干吧！”父子两人选定书房为研究室，在研究室地面上画了一个直径为一丈的大圆，先从内接多边形入手。儿子负责画多边形，父亲负责用筹（小竹棍）计算，八边形、十六边形……终于在一百九十二边形时，他们发现此时的计算结果与刘徽的一样了。祖冲之兴奋地对儿子说道：“我们继续往下吧。”就这样父子俩继续计算着，而日子也一天一天地过去了，两人废寝忘食地画着、算着，大圆里多边形的边数也越来越多，3072 边形、6454 边形、12288 边形，依次求出每个内接正多边形的边长。边数越来越多……边长却越来越短，父子俩趴在地上，聚精会神地摆弄着边，谁都不敢走神，因为只要稍微有一点点差错，前面的努力就白费了。“工夫不负有心人”，当 24576 边形在大圆里成功摆出时，祖冲之兴奋地说着：“你快看，我算出来了。24576 边形的周长与圆直径的比是 3.1415926，一点没错。”父子俩看着摆在地上密密麻麻的小竹棍，再看看大圆里的图形，开心地笑了笑。后来祖冲之在此基础上采用推算的办法得出 49152 边形的周长与外接圆直径的比不会超过 3.1415927，所以他得出结论，圆周率在 3.1415926 和 3.1415927 这两个数字之间。直到一千年后，这个小数精确值记录才被阿拉



伯数学家阿尔·卡西和法国数学家维叶特所打破。

祖冲之提出的“密率”，也是直到一千年以后才由德国人重新提出，被称为“安托尼兹率”。有趣的是，一些别有用心的人提出祖冲之圆周率是在明朝末年西方数学传入中国后伪造的。是否如这些人所说祖冲之圆周率存在着蓄意捏造的嫌疑呢？其实唐代的《隋书》和其他现传版本中都有关于祖冲之圆周率的记载，大约在明朝末年前三百余年。在明朝之前中国的许多数学家都在自己的著作中引用过祖冲之的圆周率，这些足以说明同时也证明了祖冲之在对圆周率的研究方面具有世界级的意义。

要做出这样精密的计算，是一项极为细致而又艰巨的脑力劳动。我们知道，在祖冲之那个时代，算盘还未出现，人们普遍使用的计算工具叫“算筹”，它是一根根几寸长的方形或片状的小棍子，由竹、木、铁、玉等各种材料制成。通过算筹的不同摆法来表示各种数目，叫作“筹算法”。如果计算数字的位数越多，所需要摆放的面积就越大。用算筹来计算不像用笔计算，笔算时结果可以留在纸上，而筹算每计算完一次就得重新摆放以进行新的计算，且只能用笔记下计算结果，而无法得到较为直观的图形与算式。因此只要一有差错，比如算筹被碰偏了或者计算中出现了错误，就只能从头开始。要求得祖冲之圆周率的数值，就需要对有九位有效数字的小数进行加、减、乘、除和开方运算等十多个步骤的计算，而每个步骤都要反复进行十几次，仅开方运算就有 50 次，最后计算出的数字要达到小数点后十六七位。今天，即使用算盘和纸笔来完成这些计算，也不是一件轻而易举的事。让我们想一想，在约 1500 年前的南北朝时期，一位中年人在昏暗的油灯下，手中不停地算呀、记呀，还要经常重新摆放数以万计的算筹，这是一件多么艰辛的事情，而且还需要日复一日地重复这种状态。要是没有极大的毅力，是绝对完不成这项工作的。

祖冲之圆周率对当时中国的生产帮助很大，尤其是在度量衡方面。古代有一种量器叫作“釜”，一般是一尺深，外形呈圆柱状，那么这种量器的容积有多大呢？要想求出这个数值，就要用到圆周率。当时社会主要使用汉朝刘歆所造的“律嘉量”（另一种量器，与上面提到的都是类似于现在我们所用的“升”等单位的量器，但它们都是圆柱体），由于在祖冲之前的圆周率精确度太低，导致这些容器的实际体积与计算体积差异很大，而祖冲之利用了“祖率”校正了数值，使得中国的度量衡发展到了更精确的位置。

祖冲之在数学领域的成就，只是中国古代数学成就的一个方面。实际



上, 14 世纪以前中国一直是世界上数学最为发达的国家之一。比如几何中的“勾股定理”, 在中国早期的数学专著《周髀算经》(大约于公元前 2 世纪成书) 中即有论述; 成书于公元 1 世纪的另一本重要的数学专著《九章算术》, 在世界数学史上最早提出了负数概念及正负数加减法法则; 13 世纪时, 中国就已经有了十次方程的解法, 而直到 16 世纪, 欧洲才提出三次方程的解法。

第二节 数学文化的作用

数学文化的内涵: “在数学的起源、发展、完善和应用的过程中体现出的对于人类发展具有重大影响的方面。它既包括对人的观念、思想和思维方式的一种潜移默化的作用……也包括在人类认识和发展数学的过程中体现出来的探索和进取的精神和所能达到的崇高境界等。”数学文化中的核心思想对于学生及其家庭有哪些作用呢?

一、估算与精算

《义务教育数学课程标准》(2011 版) 中对“数感”的解释是: 主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立“数感”有助于学生理解现实生活中数的意义, 理解或表述具体情境中的数量关系。

数感强调的是一种感悟。通过小学数学学习, 学生能感悟“数是对数量的抽象”, 同时还能感悟到“抽象出来的数与数量是有联系的”。“抽象”的核心是舍去现实背景, “联系”的核心是回归现实背景。比如同样是抽象出来的“100”, 但我们能明显感悟到 100 粒黄豆和 100 匹马是有明显差异的; 去菜市场买菜, 带 100 元就足够了, 可是如果去买房子, 带 100 元是远远不够的。现实生活中有许多情况, 我们对一个“数”进行感悟时, 就能感悟到数与现实背景之间的联系。当孩子们建立了这种“数感”时, 他会利用这种能力去判断日常生活和科学研究中所提供的信息。我们还知道, 孩子在进行计算时, 有的孩子反应快, 有的孩子反应慢。反应快的孩子“数感”比较强烈, 他可以通过直觉判断 16 加 8 比 20 大还是小, $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{4}{7}$ 比 1 大还是小; 他们能大概判断 1000 步有多长, 1000 个学生做广播体操时大约需要多大的场地。更有甚者, 他们会觉得在商场让利促销时, 对一个几千元的商品让利



单位在百元比较合适，而一个几百元的商品，让利单位在十元范围比较合适，对一个几十元的商品合适的让利单位应该是几元。如果要度量北京到纽约的距离，那么用万公里比较合适；如果要度量长春到北京的距离，那么用百公里比较合适；如果要度量教室的大小，那么用米比较合适；如果要度量书桌的大小，那么用厘米比较合适。这些都是“数感”强的表现。

读懂了估算，那精算是怎么回事呢？在日常生活和生产实践中，我们遇到的大量计算都是估算，估算的核心是对数量的运算，而精算的核心是对于数的运算。那么学习估算和精算对于培养学生的“数感”有哪些好处呢？法国脑科学家研究了人们在进行精算和估算时大脑的反射部位，研究结果表明：精算主要激活脑左额叶下部，与大脑的语言区有明显重叠；估算主要激活脑双侧顶叶下部，与大脑运动知觉区联系密切。因此，就教育价值而言，根据脑科学家的研究成果，很可能会有这样的区分：精算有利于培养学生的抽象能力，估算有利于培养学生的直观能力。显然，抽象能力与直观能力是人们日常生活和生产实践中必不可少的两种能力，这两种能力都是数学素养的基本能力，对小学生能力的发展是必需的。

长期以来我们对估算还有一些错误的认识，纠正这些错误观点，对能力的发展也是重要的。首先估算不是近似计算，更不是精算以后的四舍五入。估算也不是估计，估算也是需要算的，许多估算问题是为了得到上界或下界，为此需要对给定数量进行适当的放大或者缩小，然后凑整计算。对于小学生来说，解决估算问题要有合适的实际背景，否则就失去了估算的教育意义。

教材上是如何培养学生“数感”的呢？我们以《小学数学新课程标准》（2011版）中的例26为例来具体解释：

李阿姨去商店购物，带了100元，她买了两袋面，每袋30.4元，又买了一块牛肉，用了19.4元，她还想买一条鱼，大一些的每条25.2元，小一些的每条15.8元。请帮助李阿姨估算一下，她带的钱够不够买小鱼？能不能买大鱼？

这个例子提出了两个问题，这两个问题的核心都是估计用100元购物后的剩余金额，但这两种估计方法有所不同。

第一个问题“够不够买小鱼”是估计剩余金额的下界（至少剩余多少钱）：如果下界超过15.8元，那么肯定可以买小鱼。对于估计下届的问题，



购物金额的数量要适当放大：两袋面粉不超过 62 元，一块牛肉不超过 20 元，因此，剩余金额至少有 $100 - 62 - 20 = 18$ （元），够买小鱼。

第二个问题“能不能买大鱼”是估计剩余金额的上界（至多剩余多少钱）：如果上界不到 25.2 元，那么肯定不能买大鱼。对于估计上界的问题，购物金额的数量要适当缩小：两袋面粉至少要 60 元，一块牛肉不少于 19 元，因此，剩余金额至多有 $100 - 60 - 19 = 21$ （元），不够买大鱼。

“思维判断先于具体计算之前”，这种方法不仅能培养学生的计算能力，更重要的是能培养学生在日常生活中对事物的直观判断能力。

二、符号意识

《义务教育数学课程标准》（2011 版）中对符号意识的解释是：“能够理解并且运用符号表示数、数量关系和变化规律；知道使用符号可以进行运算和推理，得到的结果具有一般性。建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式。”其中有两点非常重要，第一点是“符号可以像数那样进行运算和推理”，第二点是“通过符号运算和推理得到的结果具有一般性”。

用符号来表达，对于揭示事物的本质非常重要，可是人类到真正学会用符号来表达，经历了一个相当漫长的岁月。元代数学家朱世杰（1249—1314）在 1303 年左右出版了数学著作《四元玉鉴》，在这部著作里，他述说了许多高维数学问题的解决方法，其中著名的有“四元术”（一种解多元高次联立方程的方法）、“招差术”（一种高次内插法）、“垛积数”（一种从立体层面考虑的三维的级数求和法）……但令人遗憾的是，这部书中无论是对问题的提出，还是对结果的描述，基本上都是采用具体的数值，没有抽象成一般性的符号表达，很难让人理解问题本质和结果所表示的含义，更难揣摩解决问题的思路。明清以后几乎没人能够理解朱世杰的工作。

事实证明，用符号来表述概念从而形成数学研究对象和用抽象的符号来表示研究对象之间的关系从而形成命题，对培养学生素养非常重要。那么抽象的方法是什么呢？亚里士多德在《形而上学》中是这样描述的：“数学家用抽象的方法对事物进行研究，去掉感性的东西诸如轻重、软硬、冷热，剩下的只有数量和关系，而各种规定都是针对数量和关系的规定。有时研究位置之间的关系，有时研究可通约性，时研究各种比例……数学家把共同原理用于个别情况……等量减等量余量相等，这便是一条对所有量都适用的共同



原理。对于数学研究而言，线、角或者其他量（的定义），不是作为存在而是作为关系。”抽象思维要把握两点：一是去掉现实世界中事物的那些感性的东西，只保留事物的数量特征或者图形特征，以及数量或者图形之间的关系，并且通过创造符号，建立概念来表达这些特征和关系。二是数学的使命不是去研究这些抽象概念本身，而是研究概念与概念之间的关系，并且通过建立运算法则和数学命题来表述这种关系。这种关系能使生活以及将来的工作中，透过现象看本质。

我们看到足球、篮球可以抽象出圆的概念，但是脱离了足球和篮球，我们仍然有圆的概念，用这个概念我们可以在纸上或黑板上画出圆来，甚至我们还能借助这个概念来定义圆，研究圆的各种性质。显然我们画出来的圆，是依赖于头脑中存在的抽象的圆，而不是曾经看到过的足球或篮球的简单复制。正如明代画家郑板桥所说的那样：“我画的是胸中之竹，不是眼中之竹。”我们称这样的存在为“抽象了的存在”。

我们以中国著名定理“勾股定理”为例来感悟这种符号意识。《周髀算经》记载，当周公问商高：古代伏羲在制订历法时是如何计算太阳高度的？商高回答：勾广三，股修四，径隅五。意思就是如果一个直角三角形两个直角边（勾和股）的长度分别是3和4，那么斜边（径）的长度就是5。我们注意到商高是用具体的数字来回答的，但商高显然已经知道“对应直角边成比例的两个直角三角形相似”这个结论，现代的我们可以将商高的数字表述理解为一般性的结论（遗憾的是《周髀算经》没有对定理进行过证明），这个结论用符号来表示就是 $a^2 + b^2 = c^2$ ，其中， a 和 b 分别表示两条直角边的长， c 表示斜边长。

从这个故事中我们发现，用符号来表达意见既简洁又确切。

三、培养学生创新意识

中国传统数学教育重视“双基”能力的培养，也就是对分析问题的能力和解决问题的能力的培养。随着社会的发展和时代要求的不断更新，我们在对教育理念的不断传承中也有新的认识，从曾经的“以知识为本”转变为今天的“以人为本”，这种新的教育理念强调培养学生的基本素质，强调培养学生的社会责任感、创新精神和实践能力。要达到这个要求，首要解决的是正确区分“发现问题”和“提出问题”的关系。发现问题的前提是勤于思考、敢于质疑，这与培养学生的创新意识关系密切；提出问题则要求能用数



学的语言阐明问题，这与培养学生的创新能力关系密切。

以《义务教育数学课程标准》（2011 版）中给出的两个例子为例：

例 28 利用计算器计算 15×15 , 25×25 , $\dots$, 95×95 , 并探索规律。

例 50 利用公式证明例 28 所发现的运算规律。

例 28 是在说“发现问题”，而例 50 表面上说的是“证明问题”，但要证明什么运算规律并没有说出，所以，从本质上来讲是在“提出问题”。在例 28 中我们发现，乘数和乘数是一样的，无论是“发现问题”还是“提出问题”，这里探讨的都是乘积与乘积之间的关系。发现问题、发现规律最有效的途径之一就是归纳推理，这就要求操作过程循序渐进。

下面，我们从小到大计算，依次找出乘数与乘积之间的关系：

$$15 \times 15 = 225, 25 \times 25 = 625, 35 \times 35 = 1225, \dots$$

看到这里，学生可以感悟到规律是存在的，但如何用语言来表达是需要教师引导的。我们可以做这样的分析：上面计算得到的乘积是一个三位数或者四位数，其中个位数和十位数都是 25，而百位数和千位数存在这样的规律： $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $\dots$ 学生在教师的引导下，可以开始尝试用语言来描述这个规律，这就是“发现问题”的过程，但还没实现“提出问题”。

这时我们需要学生做出语言方面的表达，因为在发现的基础上，需要进一步让学生表述出一个结论性的内容，这个其实就是我们所说的“数学命题”。这里的数学命题用语言可表达为：“个位数是 5 的两位数的平方是一个三位数或者四位数，其中后两位是 25，百位或者千位是乘数的十位数与这个数加 1 的乘积。”显然，像这样的表述对于小学生来说是很困难的，因此不可能要求学生用语言准确地表达，但这个思考的环节却是必要的，思维必须经历一个从混沌到清晰的过程。

数学只有利用符号，才能摆脱用语言表达的困境。那么对于上面这个命题，我们如何用符号来表达呢？用 a 表示乘数的十位数，则这个两位数可以表示为 $\textcircled{a}a\textcircled{\times}10+5$ 。那么，就可以将上述语言表述的结论用符号表示为

$$(\textcircled{a}a\textcircled{\times}10+5)^2 = a \times (a+1) \times 100 + 25\textcircled{+}$$

我们看到，可以用符号表达一个公式，这就是一个“提出问题”的过程。这是一个通过归纳推理后提出的问题，得到的结论不一定是正确的，需要进一步通过演绎推理进行验证。这里要指出的是，得到结论的过程是非常重要的，这是培养创新能力的核心。对于大部分数学问题，一旦用符号表达