《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》
推荐教辅图书
经人民教育出版社授权

配 人教版®

全新改版
更多精彩 为您呈现

宁夏专版

# 精讲精练

JINGJIANGJINGLIAN

高中数学
学生用书

选修1-2
（人教A）

《精讲精练》编写组 编

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练：人教A版：宁夏专版. 高中数学. 1-2：选修 /《精讲精练》编写组编. -- 银川：宁夏人民教育出版社，2014.8(2015.2重印)

ISBN 978-7-5544-0874-2

I.①精… II.①精… III.①中学数学课—高中—教学参考资料 IV.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第197155号

精讲精练　宁夏专版　高中数学　选修1-2(人教A)　　《精讲精练》编写组　编

责任编辑　田　燕
封面设计　晨　皓
责任印制　殷　戈

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社　出版发行

地　　址　宁夏银川市北京东路139号出版大厦(750001)
网　　址　www.yrpubm.com
网上书店　www.hh-book.com
电子信箱　jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话　0951-5014284
经　　销　全国新华书店
印刷装订　宁夏雅昌彩色印务有限公司
印刷委托书号　(宁)0016751

开　　本　890 mm×1240 mm　1/16
印　　张　8.5
字　　数　306千字
版　　次　2014年8月第1版
印　　次　2015年2月第2次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5544-0874-2/G·2682

定　　价　12.16元

课堂学习案

# 第一章　统计案例

## 1.1　回归分析的基本思想及其初步应用

踏着坚实的步伐，稳健启程　**自主初探·夯基础**　预习新知

### 自主学习

**一、线性回归模型**

1.

线性回归模型 $y=bx+a+e$
- ______和______是模型的未知参数
- $e$是______________
- 自变量$x$又称为______________变量
- 因变量$y$又称为______________变量

2.

回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$
- $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
- $\hat{a}=$______________
- $\bar{x}=$__________，$\bar{y}=$__________
- ______________是样本点的中心

思考：在线性回归模型 $y=bx+a+e$ 中，$e$ 的作用是什么？

**二、刻画回归效果的方式**

| 方式方法 | 计算公式 | 刻画效果 |
|---|---|---|
| $R^2$ | $R^2=$__________ | $R^2$ 越______，回归效果越好 |
| 残差图 | $\hat{e}_i$ 为相应于点$(x_i,y_i)$的残差，$\hat{e}_i=$______ | 残差点________地落在水平的带状区域中，说明选用的模型比较合适，其中这样的带状区域的宽度______，说明模型拟合精度越高，回归方程的预报精度越高 |
| 残差平方和 | $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ | 残差平方和越______，拟合效果越好 |

判断：(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)求线性回归方程前可以不进行相关性检验.　(　　)

(2)在残差图中，纵坐标为残差，横坐标可以选为样本编号.　(　　)

(3)利用线性回归方程求出的值是准确值.　(　　)

### 知识点拨

**1. 对回归分析的三点说明**

(1)回归分析的前提是两个变量之间具有相关关系.

(2)对两个变量之间数量变化进行一般关系的测定，确定一个相应的数学表达式，即线性回归方程，达到由一个已知量推测或控制另一个变量的值的目标，是统计的一个重要方法.

(3)线性回归方程是根据样本数据得到的一个确定性的函数关系，是用来对未知变量进行预测的，为了预测的效果更好，减小误差，应在求回归方程时尽量多地选取样本，选择代表性较强的样本，使得预测值尽量地接近真实值.

**2. 随机误差产生的三个原因**

(1)由线性回归模型近似真实模型所引起的误差. 可能存在非线性的函数能够更好地描述 $y$ 与 $x$ 之间的关系，但是现在却用线性函数来表述这种关系，结果会产生误差. 这种由模型近似所引起的误差包含在 $e$ 中.

(2)忽略了某些因素的影响. 影响变量 $y$ 的因素不只有变量 $x$，可能还包括其他许多因素，它们的影响都体现在 $e$ 中.

(3)观测误差. 由于测量工具等原因，导致 $y$ 的观测值产生误差(比如一个人的体重是确定的数，不同的秤可能会得到不同的观测值，与真实值之间存在误差)，这样的误差也包含在 $e$ 中.

**3. 利用 $R^2$ 进行两个模型拟合效果的比较**

对于给定的样本点$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，…，$(x_n,y_n)$，两个含有未知参数的模型.

(1)$\begin{cases}y=f(x,a)+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma_1^2\end{cases}$和

(2)$\begin{cases}y=g(x,b)+\omega,\\E(\omega)=0,D(\omega)=\sigma_2^2,\end{cases}$其中 $a$ 和 $b$ 都是未知参数，可以按如下的步骤来比较它们的拟合效果：

①分别建立对应于两个模型的回归方程$\hat{y}^{(1)}=f(x,\hat{a})$与$\hat{y}^{(2)}=g(x,\hat{b})$，其中$\hat{a}$和$\hat{b}$分别是参数 $a$ 和 $b$ 的估计值.

②分别计算模型(1)和模型(2)的 $R_1^2$，$R_2^2$.

③若 $R_1^2>R_2^2$，则模型(1)的拟合效果比模型(2)好；如果 $R_1^2<R_2^2$，则模型(1)的拟合效果不如模型(2).

## 核心归纳·抓要点

点燃智慧的明灯,探究悟道　　点拨技法

### 类型一　线性回归方程及相关性检验

**典型例题**

1. 已知 $x,y$ 的取值如表所示:

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2.2 | 4.3 | 4.8 | 6.7 |

若从散点图分析,$y$ 与 $x$ 线性相关,且$\hat{y}=0.95x+\hat{a}$,则$\hat{a}$的值等于　(　　)

A. 2.6　　B. 6.3　　C. 2　　D. 4.5

2. 以下是某地搜集到的新房屋的销售价格 $y$ 和房屋的面积 $x$ 的数据:

| 房屋面积($m^2$) | 110 | 90 | 80 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| 销售价格(万元) | 33 | 31 | 28 | 34 | 39 |

(1)画出数据对应的散点图.

(2)求线性回归方程.

(3)据(2)的结果估计当房屋面积为 150 $m^2$ 时的销售价格.

**解题探究**

1. 线性回归直线一定会经过的定点是什么?
2. $\hat{b}$和$\hat{a}$的求解公式是什么?

**自主解答:**

**拓展提升**

1. 求线性回归方程的步骤

- 过程计算:根据数据计算 $\bar{x},\bar{y}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$
- 代入计算:代入公式可以计算出 $\hat{b},\hat{a}$ 的具体数值
- 写出方程:由上面计算的结果可得出所求方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$

2. 求线性回归方程的三个关键点

- 关键点一:求线性回归方程前必须判断两个变量是否线性相关,如果两个变量本身不具备相关关系,或者它们之间的相关关系不显著,那么即使求出回归方程也是毫无意义的
- 关键点二:回归方程一定经过样本点的中心 $(\bar{x},\bar{y})$
- 关键点三:判断两个变量是否线性相关的一般方法是利用散点图

【变式训练】(2014·湖北高考)根据如下样本数据

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4.0 | 2.5 | −0.5 | 0.5 | −2.0 | −3.0 |

得到的回归方程为$\hat{y}=bx+a$,则　(　　)

A. $a>0,b<0$　　B. $a>0,b>0$

C. $a<0,b<0$　　D. $a<0,b>0$

### 类型二　线性回归分析

**典型例题**

1. 下列四个命题中正确的是　(　　)

①在线性回归模型中,$e$ 是 $bx+a$ 与预报真实值 $y$ 的误差,它是一个观测的量;

②残差平方和越小的模型,拟合的效果越好;

③用 $R^2$ 来刻画回归方程,$R^2$ 越小,拟合的效果越好;

④在残差图中,残差点比较均匀地落在水平的带状区域中,说明选用的模型比较合适,且带状区域宽度越窄,说明拟合精度越高,回归方程的预报精度越高.

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

2. 已知某商品的价格 $x$(元)与需求量 $y$(件)之间的关系有如下一组数据:

| $x$ | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | 10 | 7 | 5 | 3 |

(1)画出 $y$ 关于 $x$ 的散点图.

(2)求出回归直线方程.

(3)计算 $R^2$ 的值,并说明回归模型拟合程度的好坏(参考数据:$\overline{x}=18$,$\overline{y}=7.4$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1\ 660$,$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=327$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=620$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=0.3$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=53.2$.

**解题探究**

1. 刻画拟合效果的方式有哪些?
2. 利用 $R^2$ 的值怎样刻画拟合效果好坏?

**自主解答:**

**互动探究:** 在题 2 条件不变的情况下,画出残差图.

**拓展提升** "$R^2$、残差图"在回归分析中的作用

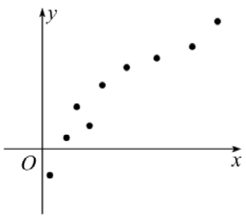
(1)$R^2$ 是用来刻画回归效果的,由 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$ 可知 $R^2$ 越大,意味着残差平方和越小,也就是说模型的拟合效果就越好.

(2)残差图也是用来刻画拟合效果的,判断依据是:残差点比较均匀地分布在水平的带状区域中,带状区域越窄,说明模型拟合精度越高,回归方程预报精度越高.

## 类型三 非线性回归分析

**典型例题**

1. 两个变量的散点图如图,可考虑用如下函数进行拟合比较合理的是 ( )




A. $y=a\cdot x^b$　　B. $y=a+b\ln x$

C. $y=a\cdot e^{bx}$　　D. $y=a\cdot e^{\frac{b}{x}}$

2. 某地区不同身高的未成年男性的体重平均值如表:

| 身高 $x$(cm) | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 体重 $y$(kg) | 6.13 | 7.90 | 9.99 | 12.15 | 15.02 | 17.50 |
| 身高 $x$(cm) | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 |
| 体重 $y$(kg) | 20.92 | 26.86 | 31.11 | 38.85 | 47.25 | 55.05 |

(1)试建立 $y$ 与 $x$ 之间的回归方程.

(2)若体重超过相同身高男性体重平均值的 1.2 倍为偏胖,低于平均值的 0.8 倍为偏瘦,则这个地区一名身高为 175 cm、体重为 82 kg 的在校男生的体重是否正常?

**解题探究**

1. 怎样通过散点图区分指数型函数模型和对数型函数模型?
2. 求解非线性回归模型问题的关键是什么?

**自主解答:**

**拓展提升**

1. **求非线性回归方程的步骤**

(1)确定变量,作出散点图.

(2)根据散点图,选择恰当的拟合函数.

(3)变量置换,通过变量置换把非线性回归问题转化为线性回归问题,并求出线性回归方程.

(4)分析拟合效果:通过计算相关指数或画残差图来判断拟合效果.

(5)根据相应的变换,写出非线性回归方程.

2. **常见的变形形式**

| 类型 | 变形方法 |
|---|---|
| 幂函数曲线 $y=ax^b$ | 两边取对数变形为 $\ln y=\ln a+b\ln x$,令 $y'=\ln y$,$x'=\ln x$,$a'=\ln a$,从而得到 $y'=a'+bx'$ |
| 指数曲线 $y=ae^{bx}$ | 两边取对数变形为 $\ln y=\ln a+bx$,令 $y'=\ln y$,$a'=\ln a$,从而得到 $y'=a'+bx$ |
| 倒指数曲线 $y=ae^{\frac{b}{x}}$ | 两边取对数变形为 $\ln y=\ln a+\dfrac{b}{x}$,令 $y'=\ln y$,$x'=\dfrac{1}{x}$,$a'=\ln a$ 得 $y'=a'+bx'$ |
| 对数曲线 $y=a+b\ln x$ | 令 $x'=\ln x$,得 $y=a+bx'$ |

**【变式训练】**在一次抽样调查中测得样本的 5 个样本点,数值如下表:

| $x$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 16 | 12 | 5 | 2 | 1 |

试建立 $y$ 与 $x$ 之间的回归方程.

## 案例规范·明思路

速递成功的秘籍，导引航向　　规范解题

### 规范解答　与线性回归方程有关的综合问题

【典例】(12 分)(2012·福建高考)某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

| 单价 $x$(元) | 8 | 8.2 | 8.4 | 8.6 | 8.8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 销量 $y$(件) | 90 | 84 | 83 | 80 | 75 | 68 |

(1)求回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$，其中 $\hat{b}=-20$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

(2)预计在今后的销售中，销量与单价仍然服从(1)中的关系，且该产品的成本是 4 元/件，为使工厂获得最大利润，该产品的单价应定为多少元？(利润＝销售收入－成本)

【规范解答】(1)由于 $\overline{x}=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=8.5$①，……… 2 分

$\overline{y}=\frac{1}{6}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)=80$①，………………………… 4 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=80+20\times8.5=250$，……………………………… 5 分

从而回归直线方程为 $\hat{y}=-20x+250$. ……………………………… 6 分

(2)设工厂获得的利润为 $L$ 元，依题意得

$L=x(-20x+250)-4(-20x+250)$② ……………………………… 9 分

$=-20x^2+330x-1\,000$

$=-20(x-8.25)^2+361.25$，………………………………………… 10 分

当且仅当 $x=8.25$ 时，$L$ 取得最大值，

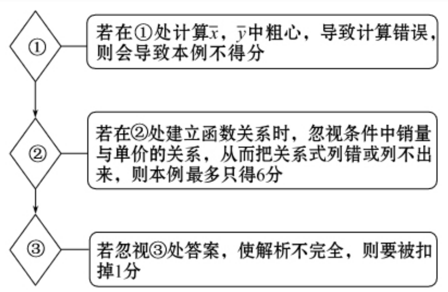
故当单价定为 8.25 元时，工厂可获得最大利润.③ ……………… 12 分

**条件分析**

回归直线方程中含有两个参数 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 且 $\hat{b}=-20$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，所以只要根据表格计算出 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，便可以代入求解 $\hat{a}$，进而写出回归直线方程.

在给定的等量关系中，可以先用变量 $x$ 表示出销售收入和成本(注意销量与单价的关系已经求出)，再表示利润函数，利用函数特征求出利润最大时的产品单价.

**失分警示**




**防范措施**

1. **正确计算的习惯**
在解题中，运算是基本的能力，运算能力是高考考查的重要能力之一，因此要养成正确计算的习惯，如本例求 $\overline{x}$，$\overline{y}$ 的值.

2. **题中条件的挖掘**
对题中的条件要善于发现并使用，如本例(2)中销量与单价的关系仍服从(1)中关系，即 $y=-20x+250$.

【类题试解】某兴趣小组欲研究昼夜温差大小与患感冒人数多少之间的关系，他们分别到气象局和某医院抄录了 1 至 6 月份每月 10 号的昼夜温差情况与因患感冒而就诊的人数，得到如下资料：

| 日期 | 1 月 10 日 | 2 月 10 日 | 3 月 10 日 | 4 月 10 日 | 5 月 10 日 | 6 月 10 日 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 昼夜温差 $x$(℃) | 10 | 11 | 13 | 12 | 8 | 6 |
| 就诊人数 $y$(人) | 22 | 25 | 29 | 26 | 16 | 12 |

该兴趣小组确定的研究方案是：先从这六组数据中选取 2 组，用剩下的 4 组求线性回归方程，再用被选取的 2 组数据进行检验.

(1)若选取的是 1 月与 6 月两组数据，请根据 2 至 5 月份的数据，用最小二乘法求出 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

(2)若由线性回归方程得到的估计数据与所选出的检验数据的误差均不超过 2 人，则认为得到的线性回归方程是理想的，试问该小组所得线性回归方程是否理想？

(参考公式：$\hat{b}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n-n\overline{x}\,\overline{y}}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$)

## 学业测试·速达标

放飞激扬的梦想,沙场点兵　　检测实效

1.在画两个变量的散点图时,下面哪个叙述是正确的　　(　　)

A.预报变量在 $x$ 轴上,解释变量在 $y$ 轴上

B.解释变量在 $x$ 轴上,预报变量在 $y$ 轴上

C.可以选择两个变量中任意一个变量在 $x$ 轴上

D.可以选择两个变量中任意一个变量在 $y$ 轴上

2.为研究变量 $x$ 和 $y$ 的线性相关性,甲、乙两人分别作了研究,利用线性回归方法得到回归直线方程 $l_1$ 和 $l_2$,两人计算知 $\overline{x}$ 相同,$\overline{y}$ 也相同,下列说法正确的是　　(　　)

A.$l_1$ 与 $l_2$ 一定重合

B.$l_1$ 与 $l_2$ 一定平行

C.$l_1$ 与 $l_2$ 相交于点$(\overline{x},\overline{y})$

D.无法判断 $l_1$ 和 $l_2$ 是否相交

3.下列四个命题:

(1)随机误差 $e$ 是衡量预报精确度的一个量,它满足 $E(e)=0$.

(2)残差平方和越小的模型,拟合的效果越好.

(3)用相关指数 $R^2$ 来刻画回归的效果时,$R^2$ 的值越小,说明模型拟合的效果越好.

(4)各点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$与该坐标平面上,与所有直线相应点的残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(\hat{b}x_i+\hat{a})]^2$ 中,直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$是与这些点的残差平方和中最小的直线.

其中真命题的个数有　　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4.若一组观测值$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$之间满足 $y_i=bx_i+a+e_i(i=1,2,\cdots,n)$,若 $e_i$ 恒为0,则 $R^2$ 的值为________.

5.某校高二(8)班学生每周用于数学学习的时间 $x$(单位:小时)与数学成绩 $y$(单位:分)构成如下数据(15,79),(23,97),(16,64),(24,92),(12,58).求得的回归直线方程为$\hat{y}=2.5x+\hat{a}$,则某同学每周学习20小时,估计数学成绩约为________分.

6.假定小麦基本苗数 $x$(千棵)与成熟期有效穗数 $y$(千棵)之间存在相关关系,今测得5组数据如下:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$(千棵) | 15.0 | 25.8 | 30.0 | 36.6 | 44.4 |
| $y$(千棵) | 39.4 | 42.9 | 42.9 | 43.1 | 49.2 |

(1)以 $x$ 为解释变量,$y$ 为预报变量,作出散点图.

(2)求 $y$ 与 $x$ 之间的线性回归方程.

(3)求 $R^2$,并说明基本苗数对有效穗数变化的贡献率.

课时提升卷(一)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

# 1.2　独立性检验的基本思想及其初步应用

## 自主初探·夯基础

踏着坚实的步伐,稳健启程　　预习新知

### 自主学习

**一、2×2列联表**

1.分类变量:变量的不同"值"表示个体所属的__________,像这样的变量称为分类变量.

2.列联表:列出的两个分类变量的________表,称为列联表.

3.2×2列联表:一般地,假设有两个分类变量 $X$ 和 $Y$,它们的取值分别为$\{x_1,x_2\}$和$\{y_1,y_2\}$,其样本频数列联表(称为2×2列联表)为:

| | $y_1$ | $y_2$ | 总计 |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a$ | $b$ | ________ |
| $x_2$ | $c$ | $d$ | ________ |
| 总计 | ________ | ________ | ________ |

### 知识点拨

**1.对"分类变量"的两点说明**

(1)这里的"变量"和"值"都应作为"广义"的变量和值进行理解.例如,对于性别变量,其取值为男和女两种.那么这里的变量指的是性别,同样这里的"值"指的是"男"和"女".因此,这里所说的"变量"和"值"不一定取的是具体的数值.

(2)分类变量是大量存在的.例如,吸烟变量有吸烟与不吸烟两种类别,而国籍变量则有多种类别.

**2.独立性检验与反证法的异同点**

独立性检验的思想来自于统计学的假设检验思想,它与反证法类似,假设检验和反证法都是先假设结论不成立,然后根据是否能够推出"矛盾"来断定结论是否成立.但二者"矛盾"的含义不同,反证法中的

思考:分类变量只有两个“取值”吗?

## 二、独立性检验

1. 定义:利用随机变量 $K^2$ 来判断“两个分类变量有关系”的方法称为两个分类变量的独立性检验.

2. 公式:$K^2=$__________(其中 $n=$__________).

判断:(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)$K^2$ 的观测值越大,两个分类变量相关性越强.　(　　)

(2)$k=1.3$ 时,说明在犯错误的概率不超过 0.25 的前提下认为两个变量有关系.　(　　)

(3)式子 $|ad-bc|$ 越大,$K^2$ 的值就越大.　(　　)

“矛盾”是指不符合逻辑的事件的发生;而假设检验中的“矛盾”是指不符合逻辑的小概率事件的发生,即在结论不成立的假设下,推出利用结论成立的小概率事件的发生.

3. 等高条形图和独立性检验的特点

(1)通过等高条形图,可以粗略地判断两个分类变量是否有关系,但是这种判断无法精确地给出所得结论的可靠程度.

(2)利用独立性检验来判断两个分类变量是否有关系,能够精确地给出这种判断的可靠程度,也常与图形分析法结合.

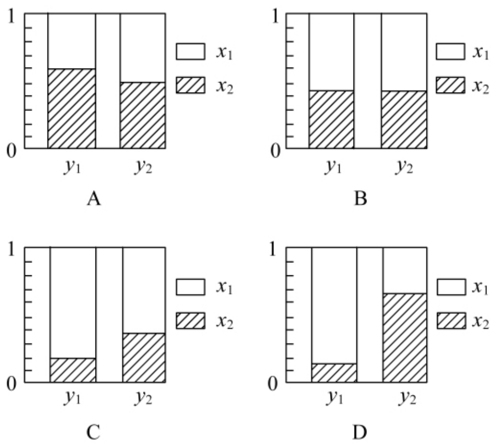
## 核心归纳 · 抓要点

点燃智慧的明灯,探究悟道　　点拨技法

### 类型一　等高条形图的应用

**典型例题**

1. 观察下列各图,其中两个分类变量 $x,y$ 之间关系最强的是　(　　)




2. 为了了解铅中毒病人与尿棕色素为阳性是否有关系,分别对病人组和对照组的尿液作尿棕色素定性检查,结果如下表.

| 组别 | 阳性数 | 阴性数 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 铅中毒病人 | 29 | 7 | 36 |
| 对照组 | 9 | 28 | 37 |
| 总计 | 38 | 35 | 73 |

试画出列联表的等高条形图,分析铅中毒病人和对照组的尿棕色素为阳性数有无差别,铅中毒病人与尿棕色素为阳性是否有关系?

**解题探究**

1. 等高条形图中的什么特征能明确哪组分类变量关系最强?
2. 等高条形图能精确地给出结论的可靠性吗?

自主解答:

**拓展提升** 利用等高条形图判断两个分类变量是否相关的步骤

统计 → 收集数据，统计结果

列表 → 列出2×2列联表，计算频率粗略估计

画图 → 画等高条形图，直观分析

**【变式训练】**某学校对高三学生进行了一项调查发现:在平时的模拟考试中,性格、　的学生426人中有332人在考前心情紧张,性格B　的学生594人中有213人在考前心情紧张.作出等高条形图,利用图形判断考前心情紧张与性格类别是否有关系.

## 类型二 独立性检验

**典型例题**

1.在独立性检验中,随机变量 $K^2$ 有两个Ж　值:3.841和6.635;当 $K^2>3.841$ 时,有95%的┆　说明两个事件有关,当 $K^2>6.635$ 时,有99%的┆　说明两个事件有关,当 $K^2\leqslant 3.841$ 时,认为两个事件无关,在一项打鼾与患心脏病的调查中,共调查了2 000人,经计算得 $k=20.87$,根据这一数据分析　(　　)

A.在犯错误的概率不超过0.05的前提下,认为打鼾与患心脏病有关

B.约有95%的打鼾者患心脏病

C.在犯错误的概率不超过0.01的前提下,认为打鼾与患心脏病有关

D.约有99%的打鼾者患心脏病

2.在对人们休闲方式的一次调查中,共调查了124人,其中女性70人,男性54人,女性中有43人主要的休闲方式是看电视,另外27人主要的休闲方式是运动,男性中有21人主要的休闲方式是看电视,另外33人的主要休闲方式是运动.

(1)根据以上数据建立一个2×2的列联表.

(2)判断性别与休闲方式是否有关系.

**解题探究**

1.判断给出的两个分类变量有关的主要依据是什么?

2.计算 $K^2$ 的观测值的关键是什么?

**自主解答:**

**互动探究:**在题2条件不变的情况下,画出等高条形图.

**拓展提升** 解决一般的独立性检验问题的步骤

确定 → 通过列联表确定 $a,b,c,d,n$ 的值;根据实际问题需要的可信程度 $\alpha$ 确定临界值 $k_0$

求值 → 利用 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,求出 $K^2$ 的观测值 $k$

判断 → 如果 $k\geqslant k_0$,就推断"两个分类变量有关系",这种推断犯错误的概率不超过 $\alpha$,否则就认为在犯错误的概率不超过 $\alpha$ 的前提下不能推断"两个分类变量有关系"

**【变式训练】**某聋哑研究机构,对聋哑关系进行抽样调查,在耳聋的657人中有416人哑,而另外不聋的680人中有249人哑,你能运用这组数据,得出相应结论吗?

# 案例规范 · 明思路

速递成功的秘籍，导引航向　　规范解题

## 规范解答 ▶ 独立性检验的综合应用

【典例】(12 分)调查某医院某段时间内婴儿出生的时间与性别的关系，得到下面的数据：出生时间在晚上的男婴为 24 人，女婴为 8 人；出生时间在白天的男婴为 31 人，女婴为 26 人.

(1)将下面的 $2\times2$ 列联表补充完整.

| 性别＼出生时间 | 晚上 | 白天 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男婴 | | | |
| 女婴 | | | |
| 总计 | | | |

(2)能否在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下认为婴儿性别与出生时间有关系？

【规范解答】

(1)

| 性别＼出生时间 | 晚上① | 白天① | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男婴 | 24 | 31 | 55 |
| 女婴 | 8 | 26 | 34 |
| 总计 | 32 | 57 | 89 |

………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由所给数据计算 $K^2$ 的观测值

$k=\dfrac{89\times(24\times26-31\times8)^2}{55\times34\times32\times57}\approx3.689$② $>2.706$. …………………… 8 分

根据临界值表知 $P(K^2\geqslant2.706)\approx0.10$. ………………………… 9 分

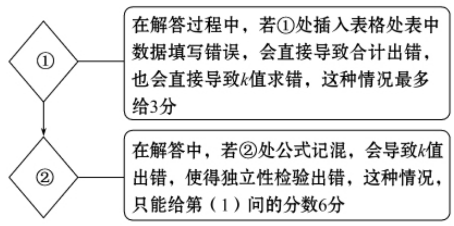
因此在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下认为婴儿的性别与出生的时间有关系. ………………………………………………………… 12 分

### 条件分析

题干中给出出生时间在白天和晚上的男婴及女婴的人数，根据这些数据可以列出 $2\times2$ 列联表.

根据给定的条件，可以计算 $k$ 值后与临界值表中的 6.635 比较. 若 $k\geqslant6.635$，则能，否则，就不能，这样给定概率前提，就只需与一个值比较即可.

### 失分警示




### 防范措施

1. 不要混淆数据

在解答独立性检验题目中，数据有时比较多，一定不要混淆，要分辨清楚，否则会影响解题的下一步，如本例 $2\times2$ 列联表中数据极易混淆.

2. 公式计算勿失误

计算中，有时公式复杂，要记忆准确，同时计算不能失误，如本例中 $K^2$ 的公式很复杂，计算中也不要粗心.

【类题试解】下表是某地区的一种传染病与饮用水的调查表：

| | 得病 | 不得病 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 干净水 | 52 | 466 | 518 |
| 不干净水 | 94 | 218 | 312 |
| 合计 | 146 | 684 | 830 |

利用列联表的独立性检验，判断能否在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为“该地区的传染病与饮用不干净的水有关”.

## 学业测试·速达标

放飞激扬的梦想,沙场点兵　　检测实效

1. 在研究两个分类变量之间是否有关时,可以粗略地判断两个分类变量是否有关的是 (　　)

A. 散点图　　B. 等高条形图

C. $2\times2$ 列联表　　D. 以上均不对

2. 对100只小白鼠进行某种激素试验,其中雄性小白鼠、雌性小白鼠对激素的敏感情况统计得到如下列联表:

| | 雄性 | 雌性 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 敏感 | 50 | 25 | 75 |
| 不敏感 | 10 | 15 | 25 |
| 总计 | 60 | 40 | 100 |

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\approx5.56$.

附表:

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

则下列说法正确的是 (　　)

A. 在犯错误的概率不超过0.001的前提下认为"对激素敏感与性别有关"

B. 在犯错误的概率不超过0.001的前提下认为"对激素敏感与性别无关"

C. 在犯错误的概率不超过0.05的前提下认为"对激素敏感与性别有关"

D. 在犯错误的概率不超过0.05的前提下认为"对激素敏感与性别无关"

3. 分类变量 $X$ 和 $Y$ 的列联表如下:

| | $Y_1$ | $Y_2$ | 总计 |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| $X_2$ | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| 总计 | $a+c$ | $b+d$ | $a+b+c+d$ |

则下列说法中正确的是 (　　)

A. $ad-bc$ 越小,说明 $X$ 与 $Y$ 关系越弱

B. $ad-bc$ 越大,说明 $X$ 与 $Y$ 关系越强

C. $(ad-bc)^2$ 越大,说明 $X$ 与 $Y$ 关系越强

D. $(ad-bc)^2$ 越接近于0,说明 $X$ 与 $Y$ 关系越强

4. 若由一个 $2\times2$ 列联表中的数据计算得 $K^2$ 的观测值 $k=4.013$,那么在犯错误的概率不超过________的前提下认为两个变量有关系.

5. 若两个分类变量 $X$ 和 $Y$ 的列联表为:

| | $Y_1$ | $Y_2$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 5 | 15 |
| $X_2$ | 40 | 10 |

则认为 $X$ 与 $Y$ 之间有关系时犯错误的概率不超过________.

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.50 | 0.40 | 0.25 | 0.15 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 0.455 | 0.708 | 1.323 | 2.072 | 2.706 |

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

6. 为了研究患慢性气管炎与吸烟量的关系,调查了228人,其中每天的吸烟支数在10支以上20支以下的调查者中,患者人数有98人,非患者人数有89人,每天的吸烟支数在20支以上的调查者中,患者人数有25人,非患者人数有16人.

(1)根据以上数据建立一个 $2\times2$ 的列联表.

(2)试问患慢性气管炎是否与吸烟量有关?

参考数据:

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.50 | 0.40 | 0.25 | 0.15 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 0.455 | 0.708 | 1.323 | 2.072 | 2.706 |

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

课时提升卷(二)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

# 阶段复习课

## 知识整合·促贯通

沿着智慧的航线，脉动经纬　　融会贯通

### 类型一 回归分析的一般概念

1. **一般概念的重要性**

在统计回归分析中，一般概念的考查是高考常考的知识点，如散点图、线性相关(正相关、负相关)、回归直线、残差、残差图和相关指数 $R^2$. 深刻理解这些概念是解决问题的关键.

2. **刻画回归效果的几种方式**

| | |
|---|---|
| 残 差 | 把随机误差的估计值 $\hat{e}_i$ 称为相应于点 $(x_i, y_i)$ 的残差 |
| 残差图 | 作图时纵坐标为残差，横坐标可以选为样本编号或解释变量或预报变量等，这样作出的图形称为残差图 |
| 残差图法 | 残差点比较均匀地落在水平的带状区域内，说明选用的模型比较合适，这样的带状区域的宽度越窄，说明模型拟合精度越高 |
| 残差平方和 | 残差平方和为 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$，残差平方和越小，模型拟合效果越好 |
| 相关指数 $R^2$ | $R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$，$R^2$ 表示解释变量对于预报变量变化的贡献率，$R^2$ 越接近于 1，表示回归的效果越好 |

【典例 1】有下列说法：

①在残差图中，若残差点比较均匀地落在水平的带状区域内，说明选用的模型比较合适；

②用相关指数 $R^2$ 来刻画回归效果，$R^2$ 越大，说明模型的拟合效果越好；

③比较两个模型的拟合效果，可以比较残差平方和的大小，残差平方和越小的模型，拟合效果越好.

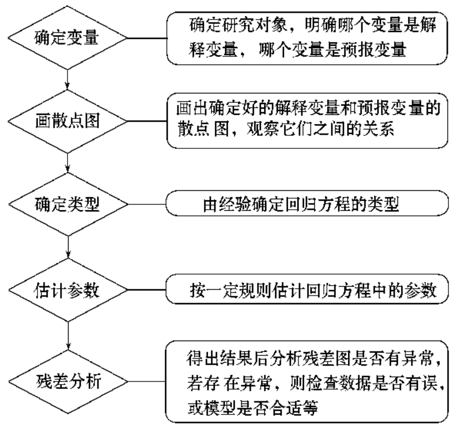
其中正确命题的个数是 (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

记录空间：

### 类型二 线性回归分析的应用

回归分析的基本步骤




【典例 2】已知某连锁经营公司所属 5 个零售店某月的销售额和利润额资料如表：

| 商店名称 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 销售额 $x$(千万元) | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| 利润额 $y$(千万元) | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |

(1)画出散点图.

(2)根据如下的参考公式与参考数据，求利润额 $y$ 与销售额 $x$ 之间的线性回归方程.

(3)若该公司还有一个零售店某月销售额为 10 千万元，试估计它的利润额是多少.

(参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

其中：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=112$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=200$)

自主解答：

## 类型三 独立性检验及应用

1. $K^2$ 公式的求解

(1)$K^2$ 公式虽然不需要记忆,但公式与列联表中的数据的位置关系密切,规律性较强,注意观察.

(2)公式比较复杂,代入计算时,应细心,防出错.

2. 进行独立性检验时的三个问题

(1)独立性检验适用于两个分类变量.

(2)两个分类变量是否有关系的直观判断:

一是根据 2×2 列联表计算 $|ad-bc|$,值越大关系越强;

二是观察等高条形图,两个深色条的高度相差越大关系越强.

(3)独立性检验是对两个分类变量有关系的可信程度的判断,而不是对其是否有关系的判断.独立性检验的结论只能是有多大的　　确认两个分类变量有关系,而不能是两个分类变量一定有关系或没有关系.

3. 独立性检验的基本步骤

要判断"Ⅰ与Ⅱ有关系"可按下面的步骤进行:

(1)提出统计假设 $H_0$:Ⅰ与Ⅱ没有关系.

(2)根据 2×2 列联表与 $K^2$ 统计量的表达式计算 $K^2$ 的观测值 $k$ 的大小.

(3)查对Ж　值表,然后作出相应的判断.

【典例 3】为了调查胃病是否与生活规律有关,在某地对 540 名 40 岁以上的人进行了调查,结果是:患胃病者生活不规律的共 60 人,患胃病者生活规律的共 20 人,未患胃病者生活不规律的共 260 人,未患胃病者生活规律的共 200 人.

(1)根据以上数据列出 2×2 列联表.

(2)判断 40 岁以上的人患胃病与否和生活规律是否有关.

自主解答:

### 跟踪训练

1. 炼钢时钢水的含碳量与冶炼时间有　　(　　)

A. 确定性关系　　B. 相关关系

C. 函数关系　　D. 无任何关系

2. $y$ 与 $x$ 之间的线性回归方程过点　　(　　)

A. $(0,0)$　　B. $(\overline{x},0)$

C. $(0,\overline{y})$　　D. $(\overline{x},\overline{y})$

3. 为了评价某个电视栏目的改革效果,在改革前后分别从某居民点抽取了 1 000 位居民进行调查,经过计算得 $K^2\approx4.358$,根据这一数据分析,下列说法正确的是　　(　　)

A. 有 95%的人认为该栏目优秀

B. 有 95%的人认为该栏目是否优秀与改革有关系

C. 在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为该电视栏目是否优秀与改革有关系

D. 没有理由认为该电视栏目是否优秀与改革有关系

参考数据如表:

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.50 | 0.40 | 0.25 | 0.15 | 0.10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 0.455 | 0.708 | 1.323 | 2.072 | 2.706 |

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

4. 为了调查某地区老年人是否需要志愿者帮助,用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人,结果如下:

| 性别 / 是否需要帮助 | 男 | 女 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 需要 | 40 | 30 | 70 |
| 不需要 | 160 | 270 | 430 |
| 总计 | 200 | 300 | 500 |

(1)估计该地区老年人中,需要志愿者提供帮助的老年人的比例.

(2)能否在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?

附:

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

单元质量评估(一)
一卷一测综合演练,亮剑扬戟决胜考场

# 第二章　推理与证明

## 2.1　合情推理与演绎推理

### 2.1.1　合 情 推 理

**自主初探 · 夯基础**

踏着坚实的步伐,稳健启程　　预 习 新 知

**自主学习**

**一、归纳推理和类比推理**

合情推理

- 归纳推理
  - 定义:由某类事物的______具有某些特征,推出该类事物的______都具有这些特征的推理,或者由______概括出______的推理
  - 特征:由___到___、由___到___
- 类比推理
  - 定义:由两类对象具有某些___特征和其中一类对象的某些___特征,推出另一类对象也具有这些特征的推理
  - 特征:由特殊到特殊

判断:(正确的打"√",错误的打"×")

(1)统计学中,从总体中抽取样本,然后用样本估计总体,这种估计属于归纳推理.　(　　)

(2)类比推理得到的结论可以作为定理应用.　(　　)

(3)由个别到一般的推理为归纳推理.　(　　)

**二、合情推理**

含义 → 归纳推理和类比推理都是根据已有的事实,经过_____、_____、___、___,再进行___、___,然后提出___的推理,我们把它们统称为合情推理

过程 → 从具体问题出发 → 观察、分析、比较、联想 → 归纳、类比 → 提出猜想

思考:合情推理的结论一定正确吗?

**知识点拨**

**1. 归纳推理的特点**

(1)归纳推理的前提是几个已知的特殊现象,归纳所得的结论是尚属未知的一般现象,该结论超越了前提所包括的范围.

(2)由归纳推理得到的结论具有猜测的性质,结论是否真实,还需经过逻辑证明和实践检验,因此,归纳推理不能作为数学证明的工具.

(3)人们在进行归纳推理的时候,总是先搜集一定的事实资料,有了个别性的、特殊性的事实作为前提,然后才能进行归纳推理,因此归纳推理要在观察和试验的基础上进行.

(4)归纳推理是一种具有创造性的推理,通过归纳推理能够发现新事实,获得新结论,是科学发现的重要手段.

**2. 类比推理的特点**

(1)类比推理是从人们已经掌握了的事物的特征,推测正在被研究的事物的特征,所以类比推理的结果具有猜测性,不一定可靠.

(2)类比在数学发现中具有重要作用. 例如,通过空间与┆　、向量与数、无限与有限、不等与相等的类比,发现可以H　的问题及其H　方法.

(3)由于类比推理的前提是两类对象之间具有某些可以清楚定义的类似特征,所以进行类比推理的关键是明确指出两类对象在某些方面的类似特征.

**核心归纳 · 抓要点**

点燃智慧的明灯,探究悟道　　点 拨 技 法

**类型一　数、式中的归纳推理**

**典型例题**

1.(2014 · 新课标全国卷Ⅱ)数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$,$a_8=2$,则$a_1=$________.

2.已知:$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,设$f_1(x)=f(x)$,$f_n(x)=f_{n-1}(f_{n-1}(x))$($n>1$,且$n\in\mathbf{N}^*$),则$f_3(x)$的表达式为______,猜想$f_n(x)$($n\in\mathbf{N}^*$)的表达式为________________.

**解题探究**

1. 要求$a_1$需求出哪些量?
2. $f_{n-1}(f_{n-1}(x))$与$f(f_{n-1}(x))$表达式相同吗?

记录空间：

互动探究：
题 2 中，若把“$f_n(x)=f_{n-1}(f_{n-1}(x))$”改为“$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$”，其他条件不变，其结论 $f_n(x)$ 的表达式如何呢？

**拓展提升**

1. **归纳推理的一般模式**

| | | |
|---|---|---|
| $S_1$ 具有性质 $P$，<br>$S_2$ 具有性质 $P$，<br>…<br>$S_n$ 具有性质 $P$，<br>（$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是 $A$ 类事物的对象） | $\xrightarrow{\text{猜想}}$ | $A$ 类事物具有性质 $P$ |

2. **归纳推理的思维过程**

试验、观察 → 概括、推广 → 猜测一般性的结论

3. **由已知数、式进行归纳推理的方法**

(1)要特别注意所给几个等式(或不等式)中项数和次数等方面的变化规律.

(2)要特别注意所给几个等式(或不等式)中结构形式的H .

(3)提炼出等式(或不等式)的综合特点.

(4)运用归纳推理得出一般结论.

**【变式训练】**(2013·陕西高考)观察下列等式：

$(1+1)=2\times1$

$(2+1)(2+2)=2^2\times1\times3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times1\times3\times5$

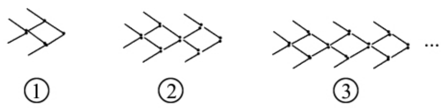
…

照此规律，第 $n$ 个等式可为____________________.

## 类型二　几何图形中的归纳推理

**典型例题**

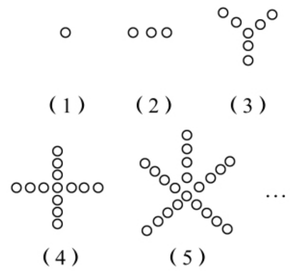
1. 用火柴棒摆“金鱼”，如图所示：



按照上面的规律，第 $n$ 个“金鱼”图需要火柴棒的根数为(　　)

A. $6n-2$　B. $8n-2$　C. $6n+2$　D. $8n+2$

2. 根据如图的 5 个图形及相应的圆圈个数的变化规律，试猜测第($n$)个图形有多少个圆圈.



解题探究

1. 从图形变化，可看出相邻两个图形中火柴棒数目的关系怎样？
2. 图形中的归纳推理与数列中的数的变化规律有什么关系？

自主解答：

**拓展提升** **归纳推理在图形中的应用策略**

通过一组平面或空间图形的变化规律，研究其一般性结论，通常需形状问题数字化，展现数字之间的规律、H ，然后进行归纳推理. 解答该类问题的一般策略是：

寻找关系 → 从图形的数量规律入手，寻找数值变化与数量的关系

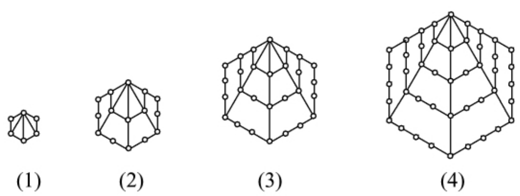
↓

结构联系 → 从图形的结构变化规律入手，找到图形的结构每发生一次变化后，与上一次比较，数值发生了怎样的变化

↓

归纳结论 → 常转化为数列中的归纳推理问题，如可通过图形展现的有关数据，构造某一数列的前几项，然后利用归纳数列的某一问题进行解决

**【变式训练】**如图，在一次珠宝展览会上，某商家展出了一套珠宝首饰，第一件首饰是 1 颗珠宝，第二件首饰是由 6 颗珠宝构成如图(1)所示的正六边形，第三件首饰是由 15 颗珠宝构成的如图(2)所示的正六边形，第四、五件首饰分别是由 28 颗和 45 颗珠宝构成的如图(3)和(4)所示的正六边形，以后每件首饰都在前一件的基础上，按照这种规律增加一定数量的珠宝，使它构成更大的正六边形，依此推断第六件首饰上应有________颗珠宝，第 $n$ 件首饰上应有________颗珠宝.



## 类型三　类比推理的应用

**典型例题**

1. 类比三角形中的性质：

(1)两边之和大于第三边；

(2)中位线长等于对应底边的一半；

(3)三内角平分线交于一点.

可得四面体的对应性质：

(1)任意三个面的面积之和大于第四个面的面积；

(2)过四面体的交于同一顶点的三条棱的中点的平面面积等于第四个面面积的$\frac{1}{4}$；

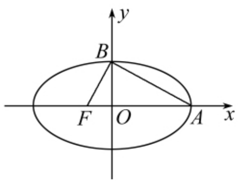
(3)四面体的六个二面角的平分面交于一点.

其中类比推理方法正确的有　(　　)

A. (1)　　B. (1)(2)

C. (1)(2)(3)　　D. 都不对

2. 如图所示，椭圆中心在坐标原点，$F$为左焦点，当$\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$时，其离心率为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，此类椭圆被称为"黄金椭圆".类比"黄金椭圆"，可推算出"黄金双曲线"的离心率$e$等于　(　　)




A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　C. $\sqrt{5}-1$　D. $\sqrt{5}+1$

**解题探究**

1. 在平面几何与立体几何的类比中，三角形类比成四面体，线段长度类比成什么，线类比成什么？

2. 类比"黄金椭圆""黄金双曲线"应满足什么条件？

记录空间：

**拓展提升**

**1. 类比推理的一般模式**

$A$类事物具有性质$a,b,c,d$；

$B$类事物具有性质$a',b',c'$($a,b,c$与$a',b',c'$相似或相同)，

所以猜想：$B$类事物可能具有性质$d'$.

**2. 类比推理的思维过程**

观察、比较→联想、类推→猜测新的结论.

即在两类不同事物之间进行对比，找出若干相同或相似之处后，推测这两类事物在其他方面的相同或相似之处.

**3. 运用类比推理的一般步骤**

(1)找出两类事物之间的相似性或一致性.

(2)用一类事物的性质推测另一类事物的性质，得出一个明确的结论.

①如果类比的两类事物的相似性越多，相似的性质与推测的性质之间越相关，那么由类比得出的结论就越可靠.

②事物之间的各个性质并不是孤立存在的，而是相互联系，相互制约的，如果两个事物在某些性质上相同或相似，那么它们在另一些性质上也可能相同或相似，因而类比的结论可能是真的，类比也可能具有必然性.

③类比的结论具有偶然性，即可能真，也可能假.

**【变式训练】**在公比为4的等比数列$\{b_n\}$中，若$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项积，则有$\frac{T_{20}}{T_{10}},\frac{T_{30}}{T_{20}},\frac{T_{40}}{T_{30}}$也成等比数列，且公比为$4^{100}$；类比上述结论，相应地，在公差为3的等差数列$\{a_n\}$中，若$S_n$是$\{a_n\}$的前$n$项和.

(1)写出相应的结论，判断该结论是否正确？并加以证明.

(2)写出该结论的一个更为一般的情形(不必证明).

## 案例展示·析误区

破译思维的密码，点拨迷津　　规避误区

### 易错误区 对归纳推理的特征掌握不准确致误

【典例】对任意正整数 $n$，猜想 $2^n$ 与 $n^2$ 的大小关系是________.

【解析】当 $n=1$ 时，$2^1>1^2$；

当 $n=2$ 时，$2^2=2^2$；

当 $n=3$ 时，$2^3<3^2$；

当 $n=4$ 时①，$2^4=4^2$；

当 $n=5$ 时①，$2^5>5^2$；

当 $n=6$ 时①，$2^6>6^2$，

所以可以猜想

当 $n=3$ 时，$2^n<n^2$；

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq3$ 时，$2^n\geqslant n^2$.

答案：当 $n=3$ 时，$2^n<n^2$；当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq3$ 时，$2^n\geqslant n^2$

【类题试解】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+2$，则猜想 $a_n=$　　(　　)

A. $2^{n-2}-\frac{1}{2}$　　B. $2^n-2$

C. $2^{n-1}+1$　　D. $2^{n+1}-4$

**误区警示**

错解：$n=1$时，$2^n>n^2$；$n=2$时，$2^n=n^2$；$n\geqslant3$时，$2^n<n^2$

错因：错解中只列举了$n=1,2,3$时的情况而忽视了①处，由此得到的猜想不一定准确，还应多举几个例子，以掌握更多的特征，从而才能得到更准确的猜想

**防范措施**

1. 防止以偏概全

在进行归纳推理时，为避免出现以偏概全的情形，对于特殊项要多验证几项，如本例 $n=3$ 验证后，再验证 $n=4$，$n=5$，$n=6$，再作猜想，以掌握更多归纳特征，同时要根据变化规律和趋势作判断.

2. 归纳要全面

在进行归纳时，要对所归纳的命题加以分析、归纳、综合，从而得到更加全面、科学、正确的猜想，如本例中，要注意猜想 $n=3$，$n=2$ 和 4 及 $n\neq2,3,4$ 的所有情况.

## 学业测试·速达标

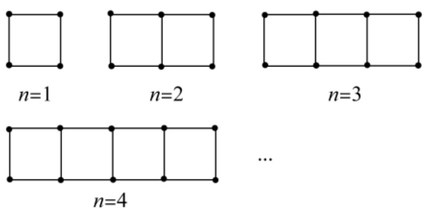
放飞激扬的梦想，沙场点兵　　检测实效

1. 关于归纳推理，下列说法正确的是　　(　　)
   A. 归纳推理是一般到一般的推理
   B. 归纳推理是一般到个别的推理
   C. 归纳推理的结论一定是正确的
   D. 归纳推理的结论不一定成立

2. 各项都为正数的数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=10$，…，猜想数列$\{a_n\}$的通项为　　(　　)
   A. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$　　B. $a_n=\frac{n(n+2)}{2}$
   C. $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$　　D. $a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{2}$

3. 数列$\{a_n\}$：2，5，11，20，$x$，47，…中的 $x$ 等于________.

4. 观察下列由火柴杆拼成的一列图形中，第 $n$ 个图形由 $n$ 个正方形组成：




通过观察可以发现：第 4 个图形中，火柴杆有________根；第 $n$ 个图形中，火柴杆有________根.

5. 点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$在圆 $C$：$x^2+y^2=1$ 上，经过点 $M$ 的圆的切线方程为$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$；又点 $Q(2,1)$在圆 $C$ 外部，容易证明直线 $2x+y=1$ 与圆相交；点 $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$在圆 $C$ 的内部，直线$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=1$ 与圆相离. 类比上述结论，你能给出关于一点 $P(a,b)$与圆 $x^2+y^2=r^2$ 的位置关系与相应直线 $ax+by=r^2$ 与圆的位置关系的结论吗？

**课时提升卷(三)**

一课一练日积月累，披坚执锐稳固提能