北京导航领航考研班专用用书

2005年考研精品

（含新大纲全部内容）

数学题型训练及高分过关

主编 铁军

编者：铁军 冯敬海 崔荣泉 江苏

组编 北京导航培训
北京领航培训

前　言

《2005年考研数学题型训练综合版》终于面世和广大的研究生考生见面了。本书是北京导航培训集团考研数学首席辅导名师铁军教授的倾心之作，涵盖了考研数学的高等数学、线性代数、概率论和数理统计三个学科。在教育理论上是对传统机械数学教学模式的突破和完善，其教育理念上完全适应当前研究生数学考试应试教育和素质教育的双重需要；在教学方法上注重于对学生思维方式的全方位、多元化的引导。铁军教授明确提出的“思维至上”，对学生学习数学的思维习惯和思维方式的形成无疑具有深远的指导意义，从根本上帮助学生解决了如何更加科学地确立考研数学知识体系，怎样填补从知识点到解题之间的黑洞，彻底摒弃在研究生考试有限时间内依题解题的不良习惯等一系列问题。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有以下特点：

1、概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法(即所谓变形、变式)来考查考生对其掌握的熟练程度。

2、综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力和数学素质。

3、运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面(或不同角度或几个相关的知识点)考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运用自如。

此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力，这是必不可少的地方，不论是对工学、经济学、还是管理学各专业的考生来说，都是这样，概莫能外。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书特色如下；

1、全面涵盖大纲所要求的知识点，对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误及错用公式和定理。

2、本书根据考研数学的知识体系，科学安排相应章节，使读者复习时循序渐进，理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础。同时对考研数学的各类题型，深入分析研究，总结出解题方法和技巧。

3、以“思维至上”为出发点，介绍许多新的快速解题方法、技巧，帮助节约宝贵的解题时间。同时，设计和改造的众多的新题，使读者在做似曾相识的题型中熟悉考研综合题的编制过程和规律性，减少对试题的神秘感。

铁军教授系常年工作在辅导数学教学一线的考研名师，理论功底深厚、全面。深刻了解考生不同层次的复习需求，依据研究生数学考试大纲的要求，通过对最近几年各知识点已有的考题的分析及各类题型的精确统计，准确指点考试夺分所必备的基础知识、应掌握的规律和应谙熟的重要题型的解题技巧，科学预测各类题型的命题趋势，探索考研试题内容和形式的变迁轨迹，对于应对考研试题模式有很大的启示。本书不仅是铁军教授数学教学思想的深邃体现，还是铁军教授十数年时间苦心孤诣致力于全新数学教育理论潜心研究的厚积薄发，相信会在数学施教理论上令你耳目一新。

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可以作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

目 录

启发篇　高数线代解题的六个重要考点

在考研数学试题中，考点起着极其重要的作用，它们是知识与技巧的综合，是解题方法的灵魂。下面首先介绍高数线代解题的六个重要考点，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必认真体会。

考点一：设函数$f(x)$在区间I上连续，且对任$x\in I$，均有$f(x)\neq 0$，则函数$f(x)$在区间I上必恒正或恒负（即$f(x)$在区间I上必恒大于零或恒小于零）。

【证明】反证之。假设$f(x)$在区间I上不恒正且不恒负，则必存在$x_1\in I,x_2\in I,$使$f(x_1)>0,f(x_2)<0$.又因为函数$f(x)$在区间I上连续，所以$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$或区间$[x_2,x_1]$上连续，且区间端点的函数值异号，即$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，故由闭区间上连续函数的零点定理知，至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$或$\xi\in(x_2,x_1)$，使$f(x)=0$，这与已知条件$f(x)\neq 0$矛盾。因此，所作的假设是错误的，函数$f(x)$在区间I上必恒正或恒负（即$f(x)$在区间I上必恒大于零或恒小于零）。

例 1. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 f[f(x)]=x，证明在$(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个x_0满足 $f(x_0)=x_0$。

【证明】假设对于$x\in(-\infty,+\infty)$的所有 x 都有

$f(x)\neq x,$则令$F(x)=f(x)-x,$其在$(-\infty,+\infty)$ 内连续且必为同号。否则，若$F(x_1)>0,F(x_2)<0,x_1\neq x_2$不妨设$x_1<x_2$，则由零点定理$\therefore$存在$x_0$使$F(x_0)=x_0$。

所以，如果恒有 F(x)>0（即 f(x)>x），

$$\therefore F[f(x)]>0即f[f(x)]-f(x)>0$$

于是有$f[f(x)]>f(x)>x$，与假设矛盾。同理可证若恒有$F(x)<0(即f(x<x))$

可推出 $F[f(x)]<0 \Rightarrow f[f(x)]-f(x)<0$

$\therefore f[f(x)]<f(x)<x$，也与假设矛盾。

故知在 $[-\infty,+\infty]$ 内至少有一个 x_0 使 $f(x_0)=x_0$

例 2. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$ 。

（1）证明：存在$\xi\in[0,1]$,使$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$

（2）证明：存在$\eta\in[0,1]$,使$f(\eta)=f(\eta+\frac{1}{n})$

【证明】（1）记 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ 上连续

其定义域为 $[0,\frac{1}{2}]$，F（x）在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续。

$\because F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1),$

又$f(0)=f(1)$,故$F(0)F\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

如果 $F(0)\cdot F\left(\frac{1}{2}\right)=0$,则$F(0)=0$或$F\left(\frac{1}{2}\right)=0$

此时存在$\xi=0$或$\xi=\frac{1}{2}$,使$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$成立。

如果 $F(0)\cdot F\left(\frac{1}{2}\right)<0$，由零点定理知，

存在$\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset[0,1]$使$F(\xi)=0$即$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$成立

（2）设 $G(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$有,$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上连续。

且 $G(0)+G\left(\frac{1}{n}\right)+G\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+G\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

反证之。假设在区间$[0,\frac{n-1}{n}]$上$G(x)\neq 0$，因为$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上连续，所以由考点一知，$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上必恒正或恒负，不妨设$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上恒正，即$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上恒大于零，则必有 $G(0)+G\left(\frac{1}{n}\right)+G\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+G\left(\frac{n-1}{n}\right)>0$，

这与$G(0)+G\left(\frac{1}{n}\right)+G\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+G\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0$矛盾。故

$G(x)$在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上至少存在一点$\xi$使$G(\xi)=0$，结论成立。

例 3. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$。证：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

【证明】若$f(x)$在$(0,\pi)$内无零点，则因$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，$f(x)$在$[0,\pi]$上必恒正或恒负，有$\int_a^b f(x)dx\neq 0$，与$\int_0^\pi f(x)dx=0$矛盾。故至少存在$\xi_1\in(0,\pi)$，使$f(\xi_1)=0$，又若$f(x)$在$(0,\pi)$内有且仅有一个零点ξ_1，则由介值定理及$\int_0^\pi f(x)dx=0$知$f(x)$在区间$(0,\xi_1)$和$(\xi_1\ \pi)$内必异号。而$\cos x-\cos\xi_1$在$(0,\xi_1)$内取正号；在$(\xi_1\ \pi)$内取负号，也异号，于是$f(x)(\cos x-\cos\xi_1)$不变号。从而$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx\neq 0$矛盾，$\therefore f(x)$在$(0,\pi)$内至少有两个零点：$\xi_1\neq\xi_2$。

例 4. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$证明在$(0,\pi)$内$f(x)$至少有两个零点。

【证明】反证之，如果$f(x)$在$(0,\pi)$内无零点（或有一个零点，但$f(x)$不变号，证法相同），即$f(x)>0$(或<0)，由于在$(0,\pi)$内，$\sin x>0$，$\therefore$必有$\int_0^\pi f(x)\sin xdx>0$(或$<0$)这与已知矛盾。

如果$f(x)$在$(0,\pi)$内有一个零点，且改变一次符号，设其零点为$a\in(0,\pi)$，于是在$(0,a)$与$(0,\pi)$内$f(x)\sin(x-a)$同号，因此$\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)dx\neq 0$，但是，又

$\because \int_0^\pi f(x)\sin(x-a)dx\neq 0=\int_0^\pi f(x)[\sin x\cos a-\cos x\sin a]dx$

$=\cos a\int_0^\pi f(x)\sin xdx-\sin a\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$

这个矛盾说明 $f(x)$ 也不能在 $(0,\ \pi)$ 内只有一个零点，因此它至少有两个零点。

考点二：在已知条件或欲证结论中涉及到无穷小量阶的比较的话，则“不管三七二十一”，先用 无穷小量阶的比较的定义处理一下再说。

例 5. 已知当 $x \to 0$时$x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt$与$Ax^k$ 是等价无穷小，求常数 A 和 K。

【详解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{Ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{Akx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x^4)}{Akx^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{Akx^{k-2}}$$

若$k-2>8$则极限趋 于∞;

若 $k-2<8$，则极限趋于 0，与等价无穷小矛盾。故 k-2=8, k=10 $\therefore$ 极限$\frac{1}{10A}=1, \therefore A=\frac{1}{10}$ 。

例 6. 设函数 f(x)在 x=0 的某邻域内有一阶连续导数，且$f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 af(h)+bf(2h)-f(0)在$h\to 0$时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a, b 的值。

【详解】 $\because \lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=0$ $\therefore$ 由连续性有：

$af(0)+bf(0)-f(0)=1,因为f(0)\neq 0$ $\therefore a+b-1=0$ 。 又

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}[af'(h)+2bf'(2h)]$$
$$=af'(0)+2bf'(0)=0,因f'(0)\neq 0$$

$\therefore a+2b=0$

由联立方程组$\begin{cases}a+b=-1=0\\ a+2b=0\end{cases}$，得$a=2,b=-1$。

例 7. 设 $f(x,y)$在$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq R^2\}$上连续，又$f(0,0)\neq 0$，则$R\to 0$时，

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$是$R$的________阶无穷小。

【详解】本题就是确定 n 为何值时，使$\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{R^n}=A\neq 0$。

由积分中值定理知，$\exists(x_0,y_0)\in D$，使$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0)\pi R^2$.

则$\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{R^2}=\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)\pi R^2}{R^2}=f(0,0)\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\pi R^2}{R^2}=\pi f(0,0)\neq 0$

所以，$R\to 0$时，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$是$R$的二阶无穷小。

考点三：如果在二重积分的被积函数中含有绝对值，则先令绝对值中的函数为零，将积分区域分割，再利用二重积分的可加性进行计算。

例 8. 计算$I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}dxdy$，其中$D:|x|\leq 1,0\leq y\leq 2$

【详解】令$y=x^2$，则抛物线$y=x^2$将积分区域D分割成两部分，因此有：

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy\\&=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}dy+\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

例 9. 计算$\iint\limits_D|\sin(x-y)|d\sigma$,其ハ$D:0\leq x\leq y\leq 2\pi$

【详解】令$\sin(x-y)=0$，则直线$y=x+\pi$和$y=x$将积分区域D分割成三部分，因此有：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D |\sin(x-y)| d\sigma \\
&= \iint_{D_1} \sin(x-y) d\sigma + \iint_{D_2} \sin(y-x) d\sigma \\
&= \int_0^{\pi} dx \int_{x+\pi}^{2\pi} \sin(x-y) dy + \int_0^{\pi} dx \int_x^{x+\pi} \sin(y-x) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_x^{2\pi} \sin(y-x) dy \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

考点四：在证明正项级数收敛或常数项级数的绝对收敛问题时，首先想到使用正项级数的比较审敛法，实在不行就用级数收敛的定义。

例 10．设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值。

（2）证：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

【证明】（1）$\because \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\tan x = \frac{1}{n(n+1)}$，

$\therefore S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ 。

（2）$\because a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \underline{\underline{t=\tan x}} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$，

$\therefore \frac{a_n}{n^{\lambda}} < \frac{1}{n^{\lambda}(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛。

例 11．设 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$，$(n = 1,2,\cdots)$

求证：（1）$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛

【证明】(1)由$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，且$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)\geq 0$，

即$a_n\geq a_{n+1}$，故$\{a_n\}$单调减有下界$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在。

（2）由（1）可知

$0\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$存在。

设$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_1-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$收敛。

$\therefore$原级数收敛。

例 12．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}},(\lambda>0)$（　　）。

（A）发散　　　（B）条件收敛

（C）绝对收敛　（C）收敛性与λ有关

【详解】选（C）

$\because\frac{1}{n^2+\lambda}<\frac{1}{n^2}\ \therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$收敛　又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$收敛

由$\left(|a_n|-\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right)^2=a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}-\frac{2|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\geq 0$，即$a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\geq\frac{2|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

$\therefore$原级数绝对收敛。

例 13．设有方程$x^{2n}+8nx^3-\cos x=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根x_n，并证明 P>3 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^p$收敛。

【详解】 令 $f_n(x)=x^{2n}+8nx^3-\cos x$，当 x>0 时，$f_n'(x)=2nx^{2n-1}+24nx^2+\sin x>0$，故 $f_n(x)$在$[0,+\infty]$上单调增加。而 $f_n(0)=-1<0, f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+8n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3>0$，由连续函数的介值定理知，$x^{2n}+8nx^3-\cos x=0$ 存在唯一正实根 x_n。

又由 $x_n^{2n}+8nx_n^3-\cos x_n=0$ 与 $x_n>0$ 知

$$0<x_n=\sqrt[3]{\frac{\cos x_n-x_n^{2n}}{8n}}<\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}。$$

故当 P>3 时，$0<x_n^P<\frac{1}{2^P n^{\frac{P}{3}}}$，且 $\frac{P}{3}>1$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{P}{3}}}$ 收敛，故由正项级数的比较审敛法知，当 P>3 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^P$ 收敛。

例 14. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'=x+y$ 当 $y(0)=1$ 时的一个特解，试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$ 的收敛性。

【详解】 因为 $y'=x+y$，所以 $y''=1+y'$. 由 y(0)=1，得 $y'(0)=1, y''(0)=2$。

根据泰勒公式，得

$$y\left(\frac{1}{n}\right)=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)\left(\frac{1}{n}\right)^2+0\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}}=1$。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由正项级数的比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right|$ 收敛，故原级数绝对收敛。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

考点五：n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是对于特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 的每个 k_i 重根 λ_i，秩 $(\lambda_i E-A)=n-k_i$。

例 15. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，试确定常数 a 的值，并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

【详解】矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\left[(\lambda-2)^2-16\right]=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$

因为 n 阶方阵 A 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 对于 k_i 重特征根 λ_i，秩 $(\lambda_i E-A)=n-k_i$。

由于 A 相似于对角阵 Λ，故对 A 的二重特征根 $\lambda_1=\lambda_2=6$，秩 $(6E-A)=3-2=1$，而

$$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{pmatrix}，\therefore a=0。$$

令 $(-2E-A)x=0$，得方程组

$$\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

即 $\begin{cases}2x_1+x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$，其基础解系为

$\xi_3=(-1,\ \ 2\ \ 0)^T$ 且 ξ_3 为 $\lambda_3=-2$ 的一个特征向量。

令 $(6E-A)x=0$，得方程组

$$\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0，即$$

$2x_1 - x_2 = 0$，其基础解系为

$\xi_1 = (1,\ 2,\ 0)^T, \xi_2 = (0,\ 0,\ 1)^T$

ξ_1与ξ_2为$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$的特征向量。

令 $p = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{pmatrix} = \Lambda$

例 16. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值。试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵。

【解题思路】因为 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值。所以，A 对应于 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量有两个。故秩（2E-A）=1。对矩阵 2E-A 作初等行变换，通过秩(2E-A)=1 确定出 x 和 y 的值。从面确定出 A. 再按教材中的常规方法求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形。

【详解】因为 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值，所以 A 的对应于 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量有两个，故秩（A-2E）=1，对 A-2E 作初等行变换：

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & x+y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

由此得 x=2, y=-x=-2，将此结果代入 A 中，并计算特征多项式。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$$

故特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 特征方程组的系数矩阵

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 由此可求得 2 个线性无关的特征向量

$\alpha_1 = (1,-1,0)^T, \alpha_2 = (1,0,1)^T$

对 $\lambda_3=6$，特征方程组的系数矩阵

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可求得第 3 个特征向量 $\alpha_3=(1,-2,3)^T$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

例 17．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 y 的值，并讨论 A 是否可相似对角化。

【详解】A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & y-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2+(1-y)\cdot 2-y=0,$ 解得 $y=2$

故 $|A-\lambda E|=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

当 y=2 时，A 的特征值为 2，2，-1，矩阵

$A-2E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，故特征值 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可对角化。

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则

$\lambda^2+(1-y)\lambda-y$ 为完全平方，不妨设 $\lambda^2+(1-y)\lambda-y=(\lambda-a)^2=\lambda^2-2a\lambda+a^2$，则有

$\begin{cases}1-y=-2a\\ -y=a^2\end{cases}$，即 $a^2+2a+1=(a+1)^2=0$，故 a=-1, y=-1，因此，

$$|A-\lambda E|=(2-\lambda)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]=(2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

所以 y=-1 时，A 的特征值为 2，-1，-1 而矩阵 A-（-1）E=$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的秩为 1，故$\lambda=-1$对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可相似对角化。

综上所述，当 y=2 或 y=-1 时，矩阵 A 的特征方程均有一个二重根，且此时 A 必可相似对角化。

例 18. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【详解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-(\lambda-2)&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

当$\lambda=2$是特征方程的二重根，则有$2^2-16+18+3a=0$, 解得

a= -2.

当 a= -2 时，A 的特征值为 2,2,6, 矩阵 2E-A=$\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}$的秩为 1，故$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可相似对角化。

若$\lambda=2$不是特征方程的二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$为完全平方，从而 18+3a=16，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

当$a=-\dfrac{2}{3}$时，A 的特征值为 2，4，4，矩阵 4E-A=$\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}$秩为 2，故$\lambda=4$对

应的线性无关的特征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化。

考点六：任意 n+1 个 n 维向量构成的向量组必线性相关。

例 19. 已知三维向量组（I）α_1,α_2 线性无关，（II）β_1,β_2 线性无关。

（1）证明：存在向量 $\zeta\neq 0$，ζ 即可由 α_1,α_2 线性表示，也可由 β_1,β_2 线性表示。

（2）当 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$,时，求（1）中的 ζ。

【详解】(1) $\because$ 4 个三维向量 α_1,α_2，β_1,β_2 必线性相关。

$\therefore$ 存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$ 成立，其中 k_1,k_2 不全为 0。（若 $k_1=k_2=0$ 则有 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$，而 β_1,β_2 线性无关 $\therefore$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ 这和前面所说的数 k_1、k_2，λ_1,λ_2 不全为 0 矛盾）同理，λ_1,λ_2 也不全为 0，令 $\zeta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-(\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2)$ 则 ζ 既可由 α_1,α_2 线性表示，也可由 β_1,β_2 线性表示。下面证明 $\zeta\neq 0$

$\because$ α_1,α_2 线性无关，

$\therefore$ 对不全为 0 的数 k_1,k_2 必有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq 0$

又 $\because$ β_1,β_2 线性无关

$\therefore$ 对不全为 0 的数 λ_1,λ_2 必有 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2\neq 0$

$\therefore$ $\zeta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-(\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2)\neq 0$。

这里用到如下性质：

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 对任意一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$ 请熟记。

（2）$\because$ 4 个三维向量 α_1,α_2，β_1,β_2 必线性相关，$\therefore$ 存在不全为 0 的数 k_1,k_2，λ_1,λ_2 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立。写成矩阵形式

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&4\\2&3&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=0$$

作初等行变换：$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&4\\2&3&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-2&4\\0&2&3&-6\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&-2\\0&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&2\\0&0&5&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

∴原方程组等价为$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=0$　即$\begin{cases}k_1+2k_2+\lambda_1=0\\k_2=0\\\lambda_1-2\lambda_2=0\end{cases}$

∵系数矩阵的秩=3，未知数个数为 4，

∴基础解系中只含 4-3=1 个线性无关解向量，

取自由未知量$\lambda_2=1$，∴$\lambda_1=2$，$k_2=0$，$k_1=-1$．∴基础解系$(k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)^T=(-2,0,2,1)^T$。通解为$k(-2,0,2,1)^T$　取$k_1=-2k,k_2=0\cdot k=0,\lambda_1=2k,\lambda_2=k$

∴$\zeta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-2k\alpha_1+0\cdot\alpha_2=-2k\alpha_1$，（$k$为任意实数）

或$\zeta=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=2k\beta_1+k\beta_2$（$k$为任意实数）

例 20．设 A，B 均是n阶矩阵，且秩 A+秩$B<n$。

证明：A，B 有公共的特征向量。

【证明】设秩$A=r$，秩$B=s$，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系。

则$\alpha_i\neq0$，$i=1,2,\cdots,n-r$且$A\alpha_i=0=0\cdot\alpha_i$，∴0 是 A 的一个特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是矩阵 A 的属于特征值 0 的特征向量。

同理，$Bx=0$的基础解系$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$也是 B 的属于特征值 0 的特征向量。

∵$(n-r)+(n-s)=n+(n-r-s)>n$

∴$(n-r)+(n-s)$个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$必线性相关。故存在不全为 0 的数，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-s}\beta_{n-s}=0$

令$\zeta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-s}\beta_{n-s}$

则必有$\zeta\neq0$，反证之。

假设$\zeta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-s}\beta_{n-s}=0$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$线性无关，必有$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=l_1=l_2=\cdots=l_{n-s}=0$。这与$k_1,k_2\cdots k_{n-r},l_1,l_2\cdots l_{n-s}$不全为 0 矛盾。故假设不成立，必有$\zeta\neq0$。

又∵$A\zeta=A(k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r})=0\cdot\zeta=0$

$B\zeta=B(l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-r}\beta_{n-r})=0\cdot\zeta=0$

∴ζ是 A，B 的公共特征向量，ζ对应的特征值为 0。

例 21．设 A 是 n 阶矩阵，证明：$秩A^n=秩A^{n+1}=秩A^{n+2}=\cdots$。

【证明】先证明$秩A^n=秩A^{n+1}$。

只需证明方程组$A^Tx=0$与$A^{n+1}x=0$同解即可，显然，方程组$A^nx=0$的解都是的$A^{n+1}x=0$的解。下面证明$A^{n+1}x=0$的解都是$A^nx=0$的解。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com