代數術

代數術卷五

英國華里司輯
英國傅蘭雅口譯
金匱華蘅芳筆述

論代數之比例

第四十九款　凡任將兩箇同類之幾何大小相比。有二種意。一。可想此比彼大若干。或此能容彼若干分之幾。二。可想此與彼相比若何。或此爲法。彼爲實。可得若干數。

此二意。一。爲算數比例。二。爲幾何比例。此二種比例之名。本無深意。惟西國各書中已慣用之。故不得不

仍其舊名.

算數比例 此爲第一題

第五十款　凡有四箇數.若第一數與第二數之較.等于第三數與第四數之較.則此四箇數可謂之有算數比例之數.

如二　五　九　十二　之類是也.其公式爲甲　甲丄丁　乙　乙丄丁.

若此四數中.其中間之兩數相等.則此四數.可謂之有加減數之比例.

第五十一款　凡四數.有算數比例者.其最要之理如下.

凡有算數比例之數.其首末兩數之和.必與中間兩數

之和相等.

如甲　甲丄丁　乙　乙丄丁其丁為第一數與第二數之較.亦為第三數與第四數之較.則其第一數與第四數之和.為甲丄乙丄丁.而第二數與第三數之和為甲丄丁丄乙.此卽本款之證也.

由此可見若有三數.為有算數比例之數.則首末二數之和.必等于中一數之倍.

第五十二款　任何四箇數.為算數比例.其三箇為已知之數.一為未知之數.則由前款之理.其未知之數可知.

如甲乙天丙欲求天之同數因$甲+丙=乙+天$所以$天=甲+丙-乙$

由此可見若有三箇算數比例之數而其內有一數未知者亦可由已知之兩數求得之言亦可作三率比例也

第五十三款　任有多少數為級數若相連之兩級其較數恆同者謂之遞加減之比例數

如二　四　六　八　十　是也　總言之此種級數可作一公式如$甲$　$甲+丁$　$甲+二丁$　$甲+三丁$　$甲+四丁$　$甲+五丁$　$甲+六丁$　此公式中甲為首數丁為公較數

細觀前級數公式.則知其中有二例.

一例　其末級.必等于第一級之外.又加諸級之各較數.

如其數有七級.則其末級必爲甲＋六丁.　如其數有十級.則其末級必爲甲＋九丁.　總言之.其級若有卯層.令末級＝人　一級＝甲　公較＝丁　則其公式爲人＝甲＋(卯－一)丁.

二例　其首末二級之和.必等于離首末二級相等處兩級之和

如其數共有七級。甲爲一級。甲丄六丁爲末級。其首末二級之和。爲二甲丄六丁。惟第二級與第六級之和。亦與此同。而第三級與第五級之和。又與此同。如是推之。以至無論共有若干級。每以初級以下之第幾級。與末級以上之第幾級相幷。其和數恆同。若諸級之層數爲奇。則其居中之級。離首末兩級俱等。所以必倍之而與首末兩級之和相等。

由第二例。得一公法。可以求諸級之總數。其理因以首末二級之和。加首下一級。與末上一級之和。又加首下

第二級與末上第二級之和。如是累加。以至相遇相過。至再加首末二級之和而止。則其總數必比諸級之總數多一倍。所以取首末二級之和。以諸級之層數乘之。卽等于諸級總數之倍。

如令總數爲申。層數爲卯。卽得公式

$$二申＝卯(甲+人)$$

。卽

$$申＝\frac{卯}{二}(甲+人)$$

由此可見若有奇數多級。如一。三。五。七。九。以至卯層。則其諸級之總數必等于層數之平方。

此因 $甲＝一$。$丁＝二$。$人＝一+(卯-一)丁$。所以其公式可作

$$申＝\frac{卯}{二}\times二卯＝卯^{二}$$

幾何比例 此爲第二題

第五十四款 凡四箇數若以第二數約其第一數等于第四數約其第三數則此四數爲有幾何比例之數簡言之亦云有比例之數

如十二．四．十五．五．則此四數爲有幾何比例之數其公式爲甲∶乙∷卯甲∶卯乙．此式可任代四箇有比例之數

因 $\frac{甲}{卯甲}=卯$．$\frac{乙}{卯乙}=卯$． 故也．

如有任四箇有比例之數甲．乙．丙．丁欲作四率比例．

則書之如甲∶乙∷丙∶丁或作甲∶乙＝丙∶丁如欲讀此式則云甲與乙之比若丙與丁之比或云甲與乙之比等于丙與丁之比亦通

凡四箇有比例之數其第一第三兩數謂之前率其第二第四兩數謂之後率總言之謂之四率比例

凡四率比例若其中間之兩率（謂二率三率也）相同則其首末兩率偕中間之任一率爲三率比例

如四六九爲三率比例數 其公式爲甲卯∶甲∷甲∶$\frac{甲}{卯}$

凡三率比例之中率爲首末二率之中比例

第五十五款　凡四率比例其要理如下

一例　凡四率比例其一四兩率相乘之數恆與二三兩率相乘之數等

如 甲:乙::丙:丁 爲有比例之率其甲與乙之比若丙與丁之比則依比例之理

$$\frac{乙}{甲}=\frac{丁}{丙}$$

若兩邊各以乙丁乘之則得

$$\frac{乙}{甲乙丁}=\frac{丁}{丙乙丁}$$

即 甲丁=乙丙

由此可見凡有三率比例其首末兩率相乘必等于中率之平方

又可見四率之中若有某率之數未知則可從已知之三箇率數求得之

設甲乙丙爲已知之一二三率欲求其第四率命四率爲天則 $甲:乙::丙:天$ 而 $甲天=乙丙$ 兩邊之項各以甲約之則得 $天=\frac{甲}{乙丙}$

二例 凡四數中若任以兩數相約等于餘兩數相約則此四數爲四率比例

如有四率比例 $甲:乙::丙:丁$ 則 $甲丁=乙丙$ 設兩邊各以 $乙丁$ 約之得 $\frac{乙丁}{甲丁}=\frac{乙丁}{乙丙}$

即 $\frac{乙}{甲}=\frac{丁}{丙}$

由此可見凡三數中若以一數自乘等于餘兩數相乘者則此三數必爲三率比例

凡四率比例式如甲:乙::丙:丁可變其排列之次而不滅其相比之理演之如後

一可更之以前率作後率後率作前率如乙:甲::丁:丙

二可交互之以前率之後易後率之前如甲:丙::乙:丁

三可加之如甲⊥乙:甲::丙⊥丁:丙或甲⊥乙:乙::丙⊥丁:丁

四可減之如甲丅乙:甲::丙丅丁:丙或甲丅乙:乙::丙丅丁:丁

五可加減之如

丁丅丙:丁丄丙::乙丅甲:乙丄甲

六可任以他數乘其前率或後率如丁己:丙卯::乙己:甲卯

七可任以他數約其前率或後率如$\frac{己}{丁}:\frac{卯}{丙}::\frac{己}{乙}:\frac{卯}{甲}$

以上各變式無他繆巧不過取其一四兩率相乘二三兩率相乘必得丙乙＝丁甲而已此卽比例之理也

設有四數爲有比例之數又有四數亦爲有比例之數此兩箇四率比例若各齊其本率相乘所得之四數

仍有比例

如有式 甲:乙::丙:丁 及 戊:己::庚:辛 則齊其率數相乘得 甲戊:乙己::丙庚:丁辛 此因 甲丁 本等于 乙丙 而 戊辛 本等于 己庚 故其合爲一式之後 甲丁戊辛=乙丙己庚 即 甲戊丁辛=乙己丙庚

由此可見任有若干四率比例若齊其本率連乘之皆可合爲一箇比例

第五十六款 有任何數無論若干級若任取相連之兩級以上級約下級其所得之數恆同者則此種級數謂之連比例率數

如二・四・八・十六・三十二・此種級數・謂之連比例率數

又如 $\frac{一}{二}$ $\frac{一}{四}$ $\frac{一}{八}$ $\frac{一}{十六}$ 等式亦爲連比例式　其公式爲

甲　甲末　甲末^{二}　甲末^{三}　甲末^{四}　甲末^{五}・ 甲爲首率・末爲每級之增乘數

細觀連比例之公式有二例・

一例　凡連比例率・其末率・必等于首率與增乘數之某方相乘・其某方之方數・必等于諸級之層數減一之數・

如以人代末率・卯代層數・則 人 〓 甲末^{卯丅一}・

二例　凡連比例率其首末二率相乘必等于離首末二率相等之任兩率相乘之數

如以$\text{甲末}^{五}$為末率則

$$\text{甲}\times\text{甲末}^{五}=\text{甲末}\times\text{甲末}^{四}=\text{甲末}^{二}\times\text{甲末}^{三}$$

凡連比例率欲求其某率以上之總數可以下式推之