

309505

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

數學解析習題彙編

上 冊

Г. Н. БЕРМАН 著
景 毅 等 譯



商務印書館

155769

315032

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

數學解析習題彙編

下 冊

Г. Н. БЕРМАН 著
景毅等譯



商務印書館

1655

水利系



8137號註冊證

代號0418

書號55720B

定價¥10,000

310

5/6218:5 G 中央人民政府高等教育部推薦
T1K7 高等學校教材試用本



數學解析習題彙編

上 冊

Г. Н. 別爾曼著
景毅 徐賢議 張琪譯

商 務 印 書 館

155769

~~315032~~

310 38
6216

310

5/6216:5 C

T2K/8

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



數學解析習題彙編

下 冊

Г. И. 別爾曼 著
景毅 徐賢議 張琪譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的別爾曼（Г. Н. Берман）著“數學解析習題彙編”（Сборник задач по курсу математического анализа）1953年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定作為高等學校教學參考書。

本書密切配合別爾曼特（А. Ф. Бермант）著“數學解析教程”（Курс математического анализа），全書章節也完全與“數學解析教程”一致，所選題材都能將理論貫穿到實際問題中去，而且有許多饒富興趣的題目，對於理論的深刻了解，確有很大幫助。

本書中譯本係按“教程”分作二冊出版，每冊末尾都附有解答，以備參考。

參加本書翻譯和校訂工作的為東北地質學院景毅、徐賢鑑、張瑛三位同志。

數學解析習題彙編

上 冊

景 毅 等 譯

★ 原 著 所 有 ★

商務印書館出版

上海河南中路二一四號

新華書店華東總分店 總經理

上海南京西路一號

商務印書館上海廠印刷

(55720A)

1954年2月初版 版面字數195,000

印數1—7,000 定價¥15,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別爾曼 (Г. Н. Берман) 著“數學解析習題彙編” (Сборник задач по курсу математического анализа) 1953 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定作為高等學校教學參考書。

本書密切配合別爾曼特 (А. Ф. Бермант) 著“數學解析教程” (Курс математического анализа), 全書章節也完全與“數學解析教程”一致, 所選題材都能將理論貫穿到實際問題中去, 而且有許多饒富興趣的題目, 對於理論的深刻了解, 確有很大幫助。

本書中譯本係按“教程”分作二冊出版, 每冊末尾都附有解答, 以備參考。

參加本書翻譯和校訂工作的為東北地質學院景毅、徐賢麟、張琪三位同志。

數學解析習題彙編

下 冊

景毅等譯

★ 版權所有 ★

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

新華書店華東總分店 總經售

上海南京西路一號

商務印書館上海廠印刷

(55720B)

1954 年 3 月初版 版面字數 117,000

印數 1—6,000 定價 ¥10,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

上册目錄

序

第一章 函數概念	1
§ 1. 函數及其表示法	1
§ 2. 函數的符號及分類	8
§ 3. 函數的圖形研究	6
§ 4. 一些最簡單的函數	11
§ 5. 冪函數、指數函數和對數函數	18
§ 6. 三角函數和反三角函數	21
§ 7. 計算問題	25
第二章 極限概念	27
§ 1. 基本定義	27
§ 2. 無窮大量，極限運算法則	29
§ 3. 連續函數	33
§ 4. 無窮小量的比較，函數極限值的計算	35
第三章 導數和微分，微分法	43
§ 1. 導數的概念，函數的變化率	43
§ 2. 函數的微分法	47
§ 3. 微分概念，函數的可微分性	65
§ 4. 作為變化率看待的導數(其他的例子)	69
§ 5. 累次微分法	77
第四章 函數和曲線的研究	83
§ 1. 函數“在一點處”的性態	83
§ 2. 一階導數的應用	84
§ 3. 二階導數的應用	94
§ 4. 函數研究中的補充問題，方程的解法	98
§ 5. 台勞公式及其應用	107
§ 6. 曲線的接觸度，曲率	110
§ 7. 計算問題	114

第五章 定積分	115
§ 1. 定積分概念	115
§ 2. 定積分的基本性質	116
§ 3. 定積分的基本性質(續), 牛頓-萊布尼茲公式	121
§ 4. 計算問題	125
第六章 不定積分, 積分法	126
§ 1. 不定積分的概念和不定積分法	120
§ 2. 積分的基本方法	130
§ 3. 可積函數的基本類型	139
第七章 定積分(續), 旁義積分	141
§ 1. 積分計算法	141
§ 2. 近似積分法	147
§ 3. 旁義積分	150
第八章 積分的應用	154
§ 1. 一些幾何的和靜力學的問題	154
§ 2. 物理上的一些問題	169
第九章 級數	180
§ 1. 數項級數	180
§ 2. 函數項級數	184
§ 3. 冪級數	189
§ 4. 台勞級數的幾種應用	191
§ 5. 計算問題	195
答案	196

下 册 目 錄

第十章 多變量函數，微分法	299
§ 1. 多變量函數	299
§ 2. 函數的最簡研究	302
§ 3. 多變量函數的導數和微分	306
§ 4. 微分法則，複合函數的微分	312
§ 5. 累次微分法	316
第十一章 微分法的應用	319
§ 1. 合勞公式，多變量函數的極值	319
§ 2. 矢量分析初階	324
§ 3. 曲線，曲面	330
第十二章 重積分及累次積分	336
§ 1. 二重積分及三重積分	336
§ 2. 重積分	337
§ 3. 變量置換	341
§ 4. 二重和三重積分的應用	342
§ 5. 積分法的其他問題	353
第十三章 曲線積分和曲面積分	359
§ 1. 對於長度的曲線積分	359
§ 2. 對坐標的曲線積分	361
§ 3. 曲面積分	367
§ 4. 各類積分間的關係	369
§ 5. 場論初階	370
第十四章 微分方程	376
§ 1. 一階方程	376
§ 2. 一階方程(續)	379

§ 3. 二階及高階方程	393
§ 4. 線性方程	397
§ 5. 微分方程組	404
§ 6. 計算問題	406
第十五章 三角級數	409
§ 1. 三角多項式	409
§ 2. 福里哀級數	410
§ 3. 克路洛夫法, 諧量分析法	412
答案	414
第十章	414
第十一章	427
第十二章	438
第十三章	443
第十四章	453
第十五章	476

數學解析習題彙編

第一章 函數概念

§ 1. 函數及其表示法

1. 平面凸多角形的內角和是其邊數的函數，問宗標可以取那些值？給出這個函數的解析表達式。

2. 一函數已給如下表：

自變量 x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
函數 y	-1.5	-1	0	3.2	2.6	0	-1.8	-2.8	0	1.1	1.4	1.9	2.4

用曲線連這些點作它的圖形，並依圖形決定函數在 $x=2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5$ 時的值使得表更“細密”一些。

3. 已給函數的圖形如圖 1 所示，把圖移到毫米紙上並選取自變量的某一些值及自變數和函數的尺度。由圖形量出所取各自變量值對應的函數值，並作這些值的表。

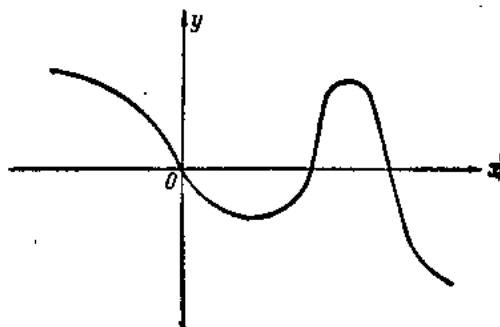
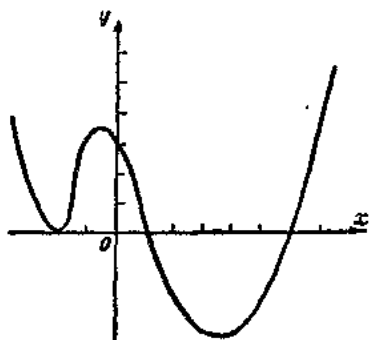


圖 1



■ 2

4. 已給函數的圖形如圖 2 所示，按圖形回答下面的問題：

(a) 自變量在什麼值時，函數變成 0？

(b) 自變量在什麼值時，函數是正的？

(B) 自變量在什麼值時，函數是負的？

5. 兩個電荷間的作用力和它們中間距離的依存關係是由函數

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{\varepsilon \cdot r^2}$$

來表示的(庫倫定律)。假定 $e_1 = e_2 = 1$ 且 $\varepsilon = 1$ ，試對 $r = 1, 2, 3, \dots, 10$ 作已給函數的值的表，並描其圖形。

6. 某種稅收是用下面方法來決定的，工薪在 100 盧布以內的不付，工薪在 100 盧布(不包括 100 盧布)到 200 盧布者付 1 盧布，工薪在 200 盧布(不包括 200 盧布)到 500 盧布者付 3 盧布，工薪在 500 盧布(不包括 500 盧布)到 1000 盧布者收 8 盧布，工薪在 1000 盧布以上(不包括 1000 盧布)者收其工薪的 1%。試畫出稅收(y)依工薪(x)所確定的函數的圖形(兩坐標軸上的尺度，應當取不同的)。

7. 已給圓柱體體積 $V (=1)$ 。試作一函數表示半徑 r 對它的高度 h 的依存關係。當 h 取下列各值：0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 時，求 r 的值。作函數的圖形。

8. 把以 a 和 b 為底的等腰梯形的面積看作底邊 a 上角 α 的函數，試寫出其表達式。當 $a=2$, $b=1$ 時作函數的圖形。

9. 在斜高 $l (=2)$ 給定時，試寫出圓錐體體積 V 作為它的高 h 的函數的表達式。

10. 當直角三角形斜邊 $c (=5)$ 一定時，試表示其一邊長 b 與另一邊長 a 的依從關係。驗證，這個函數的圖形就是半圓。

§ 2. 函數的符號及分類

符 號

11. 已給函數

$$(a) f(x) = \frac{x-2}{x+1}, \quad (b) \varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}.$$

求： $f(0), f(1), f(2), f(-2), f(-\frac{1}{2}), f(\sqrt{2}), |f(\frac{1}{2})|, \varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(-2), \varphi(4), \varphi(a)$ 。

12. 已給函數

$$f(u) = u^2 - 1,$$

求： $f(1), f(a), f(a+1), f(a-1), 2f(2a)$ 。

13. 已給函數

$$F(z) = 2^{z-2} \text{ 和 } \varphi(z) = 2^{2z-2}.$$

求： $F(0), F(2), F(3), F(-1), F(2.5), F(-1.5)$ 和 $\varphi(0), \varphi(2), \varphi(-1), \varphi(x), \varphi(-1) + F(1)$ 。

14. 已給函數

$$\psi(t) = t \cdot a^t,$$

求： $\psi(0), \psi(1), \psi(-1), \psi(\frac{1}{a}), \psi(a), \psi(-a)$ 。

15. $\varphi(t) = t^3 + 1$ 。求： $\varphi(t^2)$ 和 $[\varphi(t)]^2$ 。

16. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 。證明， $F(a) = F(-a)$ 。

17. $\Phi(z) = z^3 - 5z$ 。證明， $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ 。

18. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$ 。證明， $f(t) = f(\frac{1}{t})$ 。

19. $f(x) = \sin x - \cos x$ 。證明， $f(1) > 0$ 。

20. $\psi(x) = \log x$ 。證明， $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$ 。

21. $F(z) = a^z$ 。(1)證明，對於任意的 z ，關係式 $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$ 都是正確的。(2)證明， $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$ 。

22. 已給函數 $f(x)$ 的表：

自變量 x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
函數 $f(x)$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$

驗證，對於表中的值有等式 $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ 成立，如果預先知道函數有形式 $f(x) = m^x$ ，求它的解析表達式，作圖。

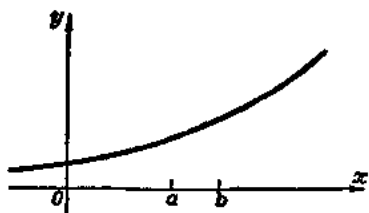


圖 3

23. 已給函數 $y = f(x)$ 的圖形和自變量 x 的值 a 與 b (圖 3)，在圖上作出 $f(a)$ 和 $f(b)$ 。比 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的幾何意義如何？

24. 試證，如果 $y = f(x)$ 圖上的任一條弦都高出於它所張的弧，則不等式 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，對所有的 $x_1 \neq x_2$ 都成立。

25. 已給函數 $f(x)$ 。指出方程 $f(x) = f(a)$ 的根。

26. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 。求方程 $(a)f(x) = f(0)$ ， $(b)f(x) = f(-1)$ 的所有的根。

27. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$ 。求方程 $f(x) = f(-2)$ 的所有的根。

28. $F(x) = x^2 + 6$ ， $\varphi(x) = 5x$ 。求方程 $F(x) = |\varphi(x)|$ 的所有的根。

29. $f(x) = x + 1$ ， $\varphi(x) = x - 2$ 。解方程 $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$ 。

疊函數

30. 已給： $y = z^2$ ， $z = x + 1$ 。把 y 表示為 x 的函數。

31. 已給： $y = \sqrt{z + 1}$ ， $z = \lg^2 x$ 。把 y 表示為 x 的函數。

32. 已給： $y = z^2$ ， $z = \sqrt[3]{x + 1}$ ， $x = a^t$ 。把 y 表示為 t 的函數。

33. 已給: $y = \sin x$, $v = \log y$, $u = \sqrt{1+v^2}$. 把 u 表示為 x 的函數。

34. 已給: $y = 1+x$, $z = \cos y$, $v = \sqrt{1-z^2}$. 把 v 表示為 x 的函數。

35. 用幾個基本初等函數表示下面的疊函數:

(1) $y = \sin^3 x$, (2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$, (3) $y = \log \operatorname{tg} x$,

(4) $y = \sin^2(2x+1)$, (5) $y = 5^{(3x+1)^4}$.

36. $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$. 求:

(a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$, (б) $\varphi[f(1)]$, (в) $\varphi[f(2)]$,

(г) $f[\varphi(x)]$, (д) $f[f(x)]$, (е) $f\{f[f(1)]\}$.

37. 如果 $f(x+1) - f(x) = 8x+3$, 試求函數表達式 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 裏的 a 和 b 的值。

38. 試指出滿足方程

$$f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$$

的 x 的值。

39. 驗試, 下列按照組成函數 $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ 的已知圖形作疊函數 $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ 的圖形的方法是正確的: 在函數 $\varphi(x)$ 的圖形上從對應於自變量 x 的已給值的點 A (圖 4), 引直線平行於 Ox 軸交第一和第三象限的分角線於點 B , 由 B 點引直線平行於 Oy 軸交函數 $f(x)$ 的圖形於點 C . 點 C 的縱坐標就代表疊函數 $F(x)$ 的值,

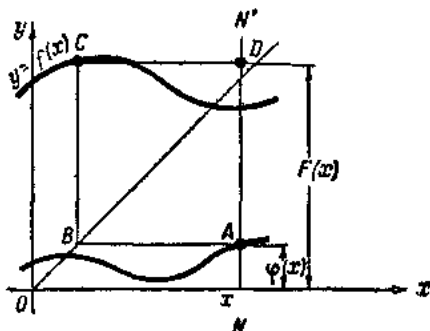


圖 4

如果由點 C 引直線平行於 Ox 軸, 則它與直線 NN' 的交點 D 就是函數 $F(x)$ 的圖形上對應於所取的 x 值的點。