北京邮电大学世纪学院青年教师教学基本功大赛集锦

——优秀教案

夏素霞◇编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

夏素霞，北京邮电大学世纪学院副院长，党委委员。

1968年出生，女，汉族，中共党员，副教授。

曾任南京工程学院教师、教研室主任。历任北京邮电大学世纪学院计算机科学与技术系主任、教务处处长、学院院长助理、学院党委委员。

北京邮电大学世纪学院
青年教师教学基本功大赛集锦

——优秀教案

夏素霞　编　著

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书将北京邮电大学世纪学院建院以来教师教学基本功大赛获奖作品及其他优秀青年教师教案汇编成册，使之以文字形式再现教师教学风采，同时留下宝贵资料供他人学习借鉴。获奖作品涵盖理学、工学、艺术学、文学、管理学等学科类别，并按照系（院、部）分类编排。本书教案在编排体例上，注重学生特点分析，合理设计单元教学目标及教学过程，突出教学重点及难点，开创诸多创新性教学技巧及方法。对广大青年教师教学提供宝贵的指导意义！

图书在版编目（CIP）数据

北京邮电大学世纪学院青年教师教学基本功大赛集锦：优秀教案 / 夏素霞编著. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5635-4430-1

Ⅰ.①北…　Ⅱ.①夏…　Ⅲ.①高等学校－教案（教育）－北京市　Ⅳ.①G642.421

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 176025 号

书　　名：北京邮电大学世纪学院青年教师教学基本功大赛集锦——优秀教案
著作责任者：夏素霞　编 著
责 任 编 辑：满志文
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：21.75
字　　数：539 千字
版　　次：2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4430-1　　　　定　价：46.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

序

此书出版之际，正值北京邮电大学世纪学院建院十周年。2005－2015 年，世纪学院走过建院初期的艰辛创业，历经十年跬步积淀，而今地处延庆迎来新的跨越发展。

十年，世纪学院桃李芬芳，孕育了众多行业领军人才；

十年，世纪学院风雨兼程，世纪人同心同德共谋学院发展；

十年，世纪学院教学成果丰硕，涌现出一批批教学、科研楷模；

十年，世纪学院完成华丽转身，地处延庆以新的契机为首都高校人才培养再立新功；

新十年，世纪人将再接再励，以更加饱满地热情谱写新的华美篇章！

兴国必兴教，兴教必重师。党的十八大报告提出："要加强教师队伍建设，提高师德水平和业务能力，增强教师教书育人的荣誉感和责任感。"通过我院青年教师教学基本功大赛及优秀教案选拔既有效提高了青年教师队伍的教育教学专业素质，更培养了一批忠诚党的教育事业，执着追求教育理念、敬业勤奋，脚踏实地潜心教学的青年教师骨干。

教学是教师最基本和最重要的工作，是教师的第一要务。教师的教学能力是影响教学质量高低的决定性因素。青年教师是教学科研的生力军和教学骨干的后备军，是学院实现可持续发展和提高现代教育教学质量的关键因素，是学院"立足延庆、辐射京北"战略目标践行的核心要义。学院教学质量的高低很大程度上依赖于青年教师教学质量的高低，亦取决于青年教师教学能力的高低。青年教师是学院未来发展的希望！

《北京邮电大学世纪学院青年教师教学基本功大赛集锦－优秀教案》以学院教师教学基本功大赛优秀获奖教案为基础，同时，甄选其他优秀青年教师教案编录其中。力求将建院以来优秀青年教师教学成果结集出版，使之以文字形式再现教师教学风采，同时留下宝贵资料供他人学习借鉴。本书教案在编排体例上，注重学生特点分析、因材施教，合理设计单元教学目标及教学过程，突出教学重点及难点，开创诸多创新性教学技巧及方法。

如在讲《理论力学》中复合运动的基本概念及速度合成定理时。这其中难点是牵连运动的判断。在上课过程中老师多次使用动画演示，这很好的增强了学生的视觉效应，也提高了学生的兴趣，也给枯燥无味的理论课注入了一丝的活力，将难点变得可爱和生动。在学生容易混淆的地方，老师通过运用列表对比的方式，让学生有了明确且清晰的认识。在课堂的实际讨论中也是以学生为主，让其有更好的独立思考能力。

《传播学基础及应用》是媒体专业本科学生的一门必修课程，它介绍了传播学的基本概念、基本理论和基本观点。同时也是一门相对来说比较枯燥无聊的课程。为了改变这一现状，老师在上课中将案例法、活动法、讨论法、演示法等多样的教学方法与课本知识相结合，这使得理论课的内容变得饱满而丰富。而在教案的编写中随处可见新鲜出炉的传播案例、时下热门的讨论话题以及有趣的课堂活动。正是这些用心的设计，吸引学生参与到课堂教学，保证了教学目标的实现，也让本来无趣的课程变得引人入胜。

《数据结构》课程是计算机专业的核心基础课程，是一门理论与实践相结合的课程，整个计算机专业教学体系中处于举足轻重的地位。老师在导入课程时通过实践案例引起学生的思考，在思考中，发现问题并解决一些浅显的问题。在这一过程中培养了学生独立解决问题的能力。而在教学内容中教师对内容的组织和处理恰当，围绕重点逐步展开。并且精心的设计问题链，引导学生层层深入思考，分析和解决问题，抓住关键问题进行突破，并适时进行归纳和总结。并对教学内容进行适度扩展，关注教学内容的整体高度和本质理解，通过迷宫求解问题，让其实际应用更进一层，有助于学生理解和掌握复杂问题下的思维训练。

在教授《消费者行为学》这门课时教师尤为突出简洁性。因为教材中的内容叙述过多，如果照搬教材授课，学生难以抓住重点，对《消费者行为学》的用途及框架会一片茫然。所以，在教学设计时简化了教材结构，突出主线，强调学生掌握关于课程的三个方面：为什么、是什么、怎么学。同时也把举例子讲故事等教学手段融入这门课中，提高了学生学习的积极性。并且时不时的提出问题，加大学生的课堂压力，从而提高学生的注意力，保证了课堂的效率。

在基础课程教学方面亦有诸多教学创新，如《高等数学》是我院通信工程、电子科学与技术及物流工程等专业学生的一门必修的重要基础理论课。对一些学生而言也是痛苦的代名词。而教师在本课的教学设计则是让学生经历“创设情境，引入新课——动手操作，探索求知——巩固知识，提升思维——小结整理，形成系统——布置作业，拓展提高”的活动过程，学生以探索者的身份学习，体验对知识的认识从模糊到清晰，从直观感悟到精确掌握，激发了学生学习的兴趣，调动了学生学习的积极性。让《高等数学》不再让人望而却步。

在体育教学中，我院教师实践探索，摸索出了一套较为行之有效的教学办法。让学生在上体育课期间得到的不光是身体上的锻炼，也让其在玩乐的同时体会团队协作的重要性，锻炼提升以自身的意志力。使学生真正的能德智体全面发展。

英语对于我院的大部分人来说可能也是一个头疼的问题，我们现阶段所能做的就是充分的调动起学生的积极性，让学生可以积极的参与到课堂当中。在英语教学过程中，我院教师不断的汲取经验，不断的进行创新，并且不时的穿插翻转课堂教学法。把以教师讲授为主的精读课程变成以学生学习为主、教师讲授为辅的教学模式。

但是，我们也不难看到，青年教师成长需要教学经验的不断积累，需要教学实践的逐步沉淀与升华，本书教案如有不足之处还望读者见谅！因此，本书不仅是一篇篇优秀教案的展示，更是一个助力青年教师成长、成才的起航载体。它对强化青年教师软实力，夯实高等教学的基础，产生了深远影响，是进行教职工队伍素质建设的强有力的助推器。

在此，向长期以来在北京邮电大学世纪学院教育教学一线默默耕耘、无私奉献，为学院培养大批高素质人才的广大教师和教育工作者致敬！向给予本书出版大力支持的学院领导、各系(院)领导表示衷心感谢！希望广大青年教师继续积累经验、提升水平，为实施科教兴国和人才强国战略，促进学院教育事业科学发展，再立新功！

时值学院建院十周年之际，谨以此书献礼！

祝愿世纪学院蓬勃发展、结出累累硕果！

编 者

目　　录

微分中值定理……………………………………………………………………………… 金红伟(1)
排球基本技术与战术 ………………………………………………………………………… 兰青(14)
微积分基本公式 ……………………………………………………………………………… 杨硕(29)
体育专项 ……………………………………………………………………………………… 周凌(38)
放大电路基础 ………………………………………………………………………………… 郭琳(44)
数字基带信号的接收 ………………………………………………………………………… 李殷(57)
创建表、修改和删除表…………………………………………………………………… 任国芳(70)
连续时间傅里叶变换的定义与性质 ……………………………………………………… 赵东峰(89)
运输及运输方式………………………………………………………………………… 刘艳辉(110)
点的复合运动分析……………………………………………………………………… 盛海燕(119)
线性规划灵敏度分析…………………………………………………………………… 张欣伟(131)
读组合体视图…………………………………………………………………………… 赵静静(139)
Android 用户界面 ……………………………………………………………………… 陈沛强(148)
与数据结构的第一次亲密接触(绪论)…………………………………………………… 邓玉洁(168)
进程与线程……………………………………………………………………………… 于桂玲(178)
基础日语入门……………………………………………………………………………… 张羽(191)
队列及应用……………………………………………………………………………… 郑凯梅(213)
ARM 体系结构编程 ……………………………………………………………………… 朱红伟(228)
消费者行为学概述………………………………………………………………………… 刘冰(241)
影视短作品的创作步骤及实践…………………………………………………………… 侯明(251)
人类传播的类型………………………………………………………………………… 柳秋华(263)
脚本游戏开发…………………………………………………………………………… 王新蕊(279)
消费者行为学…………………………………………………………………………… 周艳霞(297)
Why I Teach ……………………………………………………………………………… 秦罡引(314)
The Day Mother Cried ………………………………………………………………… 屈璟华(322)
A Rose for Emily ……………………………………………………………………… 夏文玲(334)

微分中值定理

一、教师简历

金红伟，女，1979年2月出生，北京邮电大学世纪学院基础教学部讲师。

研究方向：模糊数学。

教育经历：2002年7月毕业于河北师范大学数学教育专业，获理学学士学位；2005年3月毕业于北京科技大学应用数学专业，获理学硕士学位。

科研情况：参与北京邮电大学世纪学院教改项目《数学建模融入到各学科的应用案例库》中统计学模型和模糊数学模型部分，参与修订北京邮电大学世纪学院精品课程《高等数学》下册及《高等数学学习指导书》的部分内容，发表论文5篇。

所获奖励：2012年北京邮电大学世纪学院基础部优秀教案评比一等奖，2013年北京邮电大学世纪学院基础部教师授课基本功大赛一等奖。

二、教案

北京邮电大学世纪学院基础教学部

- **主题**：微分中值定理
- **课程**：高等数学
- **教师**：金红伟

(一) 课程基本信息

【课程名称】

中文：高等数学

英文：Advanced Mathematics

【授课类型】公共基础课

【学时】224学时(含习题课64学时)

【学分】10学分

【授课对象】全院理工科各专业大学一年级学生

【课程教材】

北京邮电大学世纪学院数理教研室. 高等数学[M]. 1 版. 北京：北京邮电大学出版社，2009.

【参考教材】

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007.
[2] 闫德明. 高等数学[M]. 1 版. 北京：清华大学出版社，2012.
[3] 马知恩，王绵森. 工科数学分析基础[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2006.
[4] 赵树嫄. 微积分[M]. 3 版. 北京：中国人民大学出版社，2007.

【课程简介】

高等数学是我校通信工程、电子科学和物流工程等专业学生的一门必修的重要基础理论课。通过本课程的学习，使学生掌握一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数与常微分方程等方面的基本知识，学会用运动和变化的观点思考问题，逐步培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力和自学能力以及熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析和解决问题的能力，为学习后继专业基础课以及相关的专业课程打下必要的数学基础。

【课程目标】

高等数学是学生提高文化素质和学习相关专业知识的重要基础。通过本课程的学习要使学生掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本运算技能，为今后各专业的后继学习或熟练使用数学工具奠定必要的数学基础。引导学生在生活实践中使用数学，在其他课程中应用数学，增强运用数学方法、借助计算机来分析和解决实际问题的能力，形成积极应用数学的氛围。在教学活动中，渗透素质教育，使学生提高逻辑思维能力，注重培养严谨求实的科学态度，树立科学的世界观。

【教学方法】

在教学中，根据教学内容、教学目标和学生的认知水平，我主要采取教师启发讲授，适当点拨和学生探究学习的教学方法。教学过程中，教师可以系统地传授知识，充分发挥教师的主导作用，根据教材提供的线索，安排适当的教学情境，引导学生独立自主地开展思维活动，深入探究，在思考中体会数学图像变换过程中所蕴涵的数学方法。除使用常规的教学手段外，还将使用多媒体投影和计算机来辅助教学，目的是充分发挥其快捷、生动和形象的特点，为学生提供直观感性的材料，有助于学生对问题的理解和认识。

(二) 学生特点分析

【知识结构特点】

基础知识和专业知识是大学生知识结构的重要组成部分。一方面，学生入学成绩低，对初中和高中知识掌握不牢固，造成学生知识面狭窄，基础知识薄弱。另一方面，学生片面重视外语和计算机等实用技能性知识，而忽视专业知识的学习，导致学生对所学知识运用能力差的现象。

【年龄特点】

大学一年级学生正处于青年期向成年期的转变，处于从个体走向成熟、走向独立的转变。开始掌握了辨证思维，情感也更加具有社会道德和责任感，但由于正处于青年期，半幼稚和半成熟、独立性和依赖性错综复杂，充满了矛盾。他们在认知方面很容易偏激，受外界的影响很大，具有很强的可塑性。

(三)教学目的和教学要求

【教学目的】

(1)知识层面:理解罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理的条件与结论,并深刻理解三个定理之间的异同及其几何意义。

(2)能力层面:首先让同学们知道微分中值定理包括三大定理(罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理),然后通过学习罗尔定理,类比学习理解拉格朗日定理,培养学生分析、抽象、概括和迁移的学习能力。

(3)情感层面:在教学过程中,让学生发现数学知识的融会贯通,培养数形结合的思想,以及严密的思维方法,体会数学研究与数学应用的乐趣,完善知识结构。

【教学要求】

通过本课程的教学,应使学生熟练掌握罗尔中值定理和拉格朗日中值定理,了解柯西定理;正确理解并掌握三大定理的条件、结论和证明方法;熟练运用微分中值定理证明恒等式、不等式和方程根的存在性;了解拉格朗日中值定理的三个推论。在课堂讲授的同时,辅以课堂练习与讨论,引导学生认真阅读教材,独立完成作业,逐步培养学生的观察能力、分析归纳能力和逻辑推理能力,增强学生对知识的主动建构的能力,提高学生分析问题和解决问题的能力。

(四)教学重点及难点

我所教授的学生是独立学院大学一年级的学生,由于学生的数学基础比较薄弱,对于高等数学中理论性的内容,本着"领会实质,掌握应用"的原则,我将本次课的教学重难点制定如下:

【教学重点】

因为本节的教学目标要求学生能运用微分中值定理进行计算和证明,其理论依据就是中值定理,而定理的推导和应用的过程又能促成学生的数学思想和各种能力的提高。因而费马引理的证明;罗尔定理、拉格朗日中值定理与柯西中值定理这三个定理的证明;用罗尔定理解决关于多项式方程实根个数的问题和方程根的存在性;用拉格朗日中值定理证明不等式和恒等式为本单元的重点。

【教学难点】

(1)知识教学方面:在中学时代学生比较习惯由已知直接推理的思维模式,而本节用构造函数的方法证明,要摆脱已有的习惯思维模式,有一定的难度,故本节难点为如何构造辅助函数来证明拉格朗日中值定理、柯西中值定理、不等式、恒等式和方程根的存在性。

(2)情感教育方面:如何营造课堂积极求解的氛围,以激发学生的创造力,增强学生知难而进的决心。

【课后作业】

注意双基训练与发展能力相结合,设计递进式分层作业,面向全体学生,突出本节课的知识点,不仅达到复习巩固的目的,兼顾学有余力的同学有自由发展的空间,还能让学生了解高等数学对专业学习的重要性。

(1)阅读作业:收集并整理罗尔、拉格朗日和柯西三位数学家的生平资料以及他们在创

立微积分时所做的开创性的工作。

(2) 书面作业(必做题):教材 142 页第 3、8(1)题。

(3) 拓展作业(选做题):教材 142 页第 9、10 题。

(4) 专业相关作业:收集并整理所学专业领域与高等数学内容有关的专业知识或应用题。

(五) 单元教学设计

微分中值定理是微分学的基本定理,在高等数学中占有重要的地位,是研究函数在某个区间的整体性质的有力工具。其中,拉格朗日定理是核心,罗尔定理是其特殊情况,柯西定理是其推广。

1. 创设情境,引入新课

设计意图:学生通过观察图像感受极值与最值的区别,从而引发学习本节内容的兴趣。

首先明确函数"极值"的概念,然后引导学生对极值和最值的分析比较,进而得到费马引理。

2. 动手操作,探索求知

设计意图:借助多媒体教学手段引导学生发现定理的几何意义,使问题变得直观,引导学生掌握新知识,进而完善知识结构。

将学生所画的初始图像截出一段,让学生观察所截图形的特征,根据学生的回答给出完整的罗尔定理。然后采用教师引导,学生探究的方式讲解拉格朗日定理和柯西定理。

3. 巩固知识,提升思维

设计意图:通过讲练结合,深化对知识的理解,领悟思想方法,提高学生的学习能力。

学生基本掌握三大定理的条件和结论后,引导学生学习罗尔定理的应用,即方程根的存在性的讨论。通过例题的讲解,归纳证明的方法和步骤,让学生动手练习。通过例题讲解拉格朗日定理的应用,结合学生课堂练习,归纳总结出如何通过构造辅助函数证明恒等式或不等式的方法和步骤。

4. 小结整理,形成系统

设计意图:引导学生进行自我小结,将新学内容在知识结构和思想方法等方面进行概括总结。

5. 布置作业,拓展提高

设计意图:针对学生素质的差异进行分层训练,为学生指明课后继续学习的方向,激发学生探索的兴趣。

(六) 教学具体过程

我们常常需要从函数的导数所给出的局部的或"小范围"性质,推出其整体的或"大范围"性质。为此,我们需要建立函数的差商与函数的导数间的基本关系式,这些关系式称为"微分学中值定理"。这些中值定理的创建要归功于费马、罗尔、拉格朗日和柯西等数学家。

我们知道,导数是刻画函数在一点处变化率的数学模型,它反映的是函数在一点处的局

部变化性态,但在理论研究和实际应用中,常常需要把握函数在某区间上的整体变化性态,那么函数的整体变化性态与局部变化性态有何关系呢?中值定理正是对这一问题的理论诠释。中值定理揭示了函数在某区间上的整体性质与该区间内部某一点的导数之间的关系。中值定理既是利用微分学知识解决应用问题的数学模型,又是解决微分学自身发展的一种理论性数学模型。

1. 创设情境,引入新课

1)极值的概念

设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在点 x_0 的一个邻域,对于该邻域内的任何点 x,除点 x_0 外,有 $f(x)<f(x_0)$(或 $f(x)>f(x_0)$)均成立,就称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值(或极小值)。极大值与极小值统称函数的极值,使函数取得极值的点 x_0 称为极值点。

这里要注意的是,函数的极大值和极小值概念是局部性的。若说 $f(x_1)$是函数 $f(x)$的一个极大值,是对 x_1 附近的一个邻域范围而言,哪怕该邻域小以至肉眼难以观察,只要在这小邻域内的函数值,除去 x_1 外,均满足 $f(x)<f(x_1)$,就可称 $f(x)$在 x_1 取得极大值,因而不能与最大值混为一谈。有的极大值可能比极小值还小。取得极值处,曲线的切线是水平的,即极值点处导数为零。但是注意导数为零处,即有水平切线处,不一定取得极值。进而就可以得到费马引理。

2)费马引理

设函数 $f(x)$在 x_0 点的某邻域内有定义,且在 x_0 可导,如果对于任意的 $x\in U(x_0)$,有 $f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$),则 $f'(x_0)=0$。

证明:由假设 $\forall x\in U(x_0)$,$f(x)\leqslant f(x_0)$,则当 $x>x_0$ 时,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$;当 $x<x_0$ 时,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$。由 $f(x)$在 x_0 可导及极限的保号性,有

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

所以必有 $f'(x_0)=0$。

对于 $f(x)\geqslant f(x_0)$的情形,可以同样证明。

费马引理的几何意义:在 x_0 邻近的一个范围内,曲线在 x_0 处达到最高点或者最低点,且在该点有切线则此切线必定平行于 x 轴。

通常导数等于零的点称为函数的驻点(或稳定点)。

注:极值点要么是驻点,要么是不可导点.驻点也不一定是极值点。

2. 动手操作,探索求知

1)罗尔定理

罗尔(Rolle　1652—1719)法国数学家。年轻时因家境贫穷,仅受过初等教育,是靠自学精通了代数和 Diophantus 分析理论。这个定理是罗尔在 17 世纪初,在微积分发明之前以几何的形式提出来的。

通过让学生观察图形(图 1)的特征，给出观察到的信息，再根据学生的回答进行纠正和总结，然后给出完整的罗尔定理。

定理(罗尔定理) 设函数 $f(x)$满足：

(1) 在$[a,b]$上连续，

(2) 在(a,b)内可导，

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

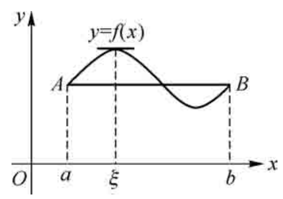

图 1

证明:因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，由闭区间上连续函数的最大值、最小值定理，$f(x)$在$[a,b]$上必取得最大值 M 和最小值 m。

(1) 如果 $M=m$，则 $f(x)\equiv M, x\in[a,b]$，因此 $\forall\xi\in(a,b), f'(\xi)=0$。

(2) 如果 $M>m$，则和 m 中至少有一个与端点值不等，不妨设 $M\neq f(a)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=M$，则由费马引理得 $f'(\xi)=0$。

$f'(\xi)=0$ 表示该点的切线是水平的，如图(图 1)所示，罗尔定理的几何意义是：如果光滑曲线 $y=f(x)(x\in[a,b])$的两个端点 A 和 B 等高，即其连线 AB 是水平的，则在曲线上至少有一个点 $C(\xi,f(\xi))$处的切线是水平的。

【例 1】 验证罗尔中值定理对函数 $f(x)=x^3+3x^2$，在区间$[-3,0]$上的正确性。并求出罗尔定理结论中的 ξ。

解:我们从定理中的三个条件来逐一判断，是否符合。

条件①：$f(x)=x^3+3x^2$ 是初等函数，所以函数 $f(x)$在$[-3,0]$上连续，即条件①符合。

条件②：$f'(x)=3x^2+6x$，所以函数 $f(x)$在$(-3, 0)$内可导，条件②符合。

条件③：$f(-3)=f(0)=0$，条件③符合。

所以 $f(x)$在$[-3,0]$上满足罗尔定理的条件。

令 $f'(x)=3x^2+6x=0$，解得 $x=0, x=-2$，因为 $x=0$ 不在区间$(-3, 0)$内，故舍去。所以取 $\xi=-2$，即在$(-3, 0)$内存在一点 $\xi=-2$，使得 $f'(\xi)=0$。所以罗尔中值定理结论中的 $\xi=-2$。

罗尔定理肯定了 ξ 的存在性，一般没必要知道究竟等于什么数，只要知道 ξ 存在即可。

【练习 1】 在区间$[0,1]$上对函数 $f(x)=x^2-x$ 验证罗尔定理。

解:它在闭区间$[0,1]$上是连续的，又在开区间$(0,1)$内可导且有 $f'(x)=2x-1$，另外有 $f(0)=f(1)=0$ 成立，故对所给定的函数来说，罗尔定理的三个条件都满足。若我们令 $f'(x)=0$，即 $2x-1=0$，由此得到一个点 $x=\frac{1}{2}$，并令它等于 ξ，于是有 $\xi=\frac{1}{2}\in(0,1)$使得罗尔定理的结论 $f'(\xi)=0$ 成立，这就验证了罗尔定理对本例的正确性。

注:若不满足罗尔定理中的三个条件，则罗尔定理的结论就不一定成立。例如，图 2 中 $y=f(x)$在 $x=c$ 处不连续，图 3 中 $y=f(x)$在 $x=c$ 处不可导，图 4 中 $f(a)\neq f(b)$都因为不满足某一个条件而不存在点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

罗尔定理中的条件是充分条件不是必要条件，如图 5 所示，在$[a,b]$上罗尔定理的三个条件均不满足，但却存在点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

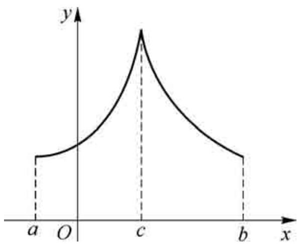

图 2

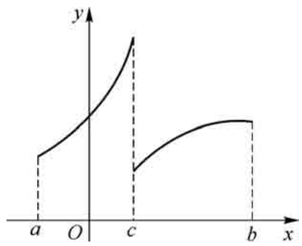

图 3

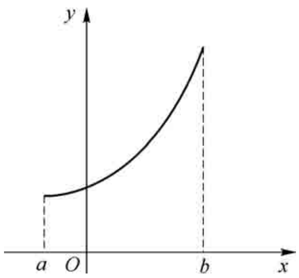

图 4

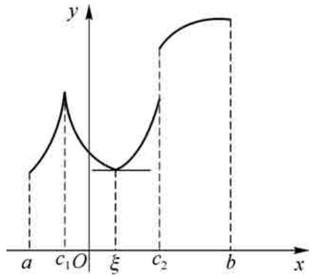

图 5

现在,微积分里面最著名的定理之一,就要登场了。只要该定理一出场,真可以让一大堆定理顿时黯然失色。不错,我们所说的不是别的,正是中值定理。你大概做梦也不会想到,大名鼎鼎的中值定理,不过只是朴实无华的罗尔定理转个角度,歪斜一下而已。你在看罗尔定理时,若是把脑袋歪向一边,看到的就是中值定理。

罗尔定理中,条件 $f(a)=f(b)$很特殊,一般的函数不满足这个条件,去掉这一条件把结果一般化,这就是拉格朗日中值定理。

如果将曲线 $y=f(x)$的端点 A 固定,将整个图形旋转一个适当的角度,我们可以看出,在区间的内部至少能找到一点,曲线在该点的切线平行于连接曲线两个端点的弦 AB,这就是下面要讲的拉格朗日中值定理的结论。

2) 拉格朗日中值定理

拉格朗日(Lagrange　1736—1813)法国数学家。普鲁士国王腓特烈大帝尊称他为“欧洲最大之数学家”,他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献,其中尤以数学方面的成就最为突出。

现在我们来证明拉格朗日中值定理,也称为微分中值定理,它是沟通函数与其导数之间的桥梁。

定理(拉格朗日定理):(图 6)设函数 $f(x)$满足:

(1) 在$[a,b]$上连续,

(2) 在(a,b)内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

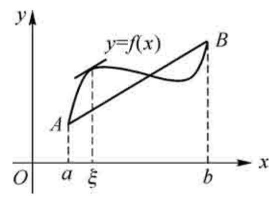

图 6

现在我们利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理(这里用分析法——知果索因)。

分析:要证$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,即证$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)=0$,

或$\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(\xi)\right)'|_{x=\xi}=0$。

希望有函数$F(x)$满足$F'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)$。

因此,可以考虑构造一个辅助函数$F(x)$,满足罗尔定理的条件,而加以证明。

为此,可取$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(x)$。

证明:令$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(x)$,

由于$f(x)$满足:在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则$F(x)$显然满足在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,又$F(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b+b)-f(a)$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b-f(b)=F(b)$$

即$F(a)=F(b)$,由此$F(x)$满足罗尔定理的条件,由罗尔定理知,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$F'(\xi)=0$,即$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)=0$,或$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

微积分里有许多决定性的结果,都要依赖于中值定理来证明,这个定理的重要性,使之不愧为“最有价值定理”。

拉格朗日中值定理的几何意义是:曲线$y=f(x)$上两端连线平行于曲线在(a,b)内某一点处的切线。

注:(1) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$称为拉格朗日中值公式。这个公式对于$b<a$也成立。此公式在微分学中占有极重要的地位。它表明了函数在两点处的函数值与导数间的关系。今后要多次用到它,尤其可利用它研究函数的单调性及某些等式与不等式的证明。

(2) 拉格朗日中值公式的其他形式:

设x为区间$[a,b]$内一点,$x+\Delta x$为这区间内的另一点,则在$[x,x+\Delta x]$或$[x+\Delta x,x]$上应用拉格朗日中值公式,得$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$。

因$0<\frac{x-\xi}{\Delta x}<1$,记$\theta=\frac{x-\xi}{\Delta x}$,则$\xi=x+\theta\Delta x$,有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

如果记$f(x)$为y,则上式又可写为

$$\Delta y=f'(x+\theta x)x \quad (0<\theta<1)$$

试与微分$dy=f'(x)\Delta x$比较:$dy=f'(x)\Delta x$是函数增量Δy的近似表达式,而$\Delta y=f'(x+\theta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$是函数增量Δy的精确表达式,称为有限增量公式。

(3) 拉格朗日中值定理的证明提供了一个用构造函数法证明数学命题的精彩典范;同时通过巧妙的数学变换,将一般化为特殊,将复杂问题化为简单问题的论证思想,也是高等数学中的重要而常用的数学思维的体现。

【例 2】 验证拉格朗日中值定理对函数$f(x)=\ln x$在区间$[1,e]$上的正确性。

解:我们从定理中的两个条件来逐一判断,是否符合。

首先，易知函数 $f(x)=\ln x$ 在闭区间[1,e]上连续，在开区间(1,e)内可导，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，于是拉格朗日中值定理的条件成立。

以下，只要验证是否能找到 $\xi\in(1,e)$，并使

$$f'(\xi)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1},\quad 即\ \frac{1}{\xi}=\frac{1}{e-1}$$

成立？对它的回答是肯定的，事实上只要令 $\xi=e-1$，它显然满足不等式 $1<\xi<e$，另外由 ξ 的取值自然有 $\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{e-1}$ 成立，这样就验证了拉格朗日中值定理对函数 $f(x)=\ln x$ 在[1,e]上的正确性。

【练习 2】 给定函数 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$，验证在区间[0,3]上，$f(x)$ 满足拉格朗日定理的条件，并求出定理结论中 ξ 的值。

解：我们从定理中的两个条件来逐一判断，是否符合。

$f(x)$ 显然在[0,3]上连续，在(0,3)内可导，所以 $f(x)$ 满足拉格朗日定理的条件。

$$f'(x)=3x^2-12x+11$$

计算 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=2$，由 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(\xi)$，得到 $2=3\xi^2-12\xi+11$，即 $\xi^2-4\xi+3=0$，于是有 $\xi_1=1$，$\xi_2=3$（ξ_2 在区间端点处，舍去），所以存在 $\xi_1=1\in(0,3)$，使得 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(1)$ 成立。

3. 柯西定理

柯西（Cauchy　1789—1857）法国数学家。柯西是一位多产的数学家，他的全集从 1882 年开始出版到 1974 年才出齐最后一卷，一共有 28 卷。柯西在数学中的各个领域都有贡献，是数学弹性理论的奠基人之一。

作为拉格朗日中值定理的一个推广，还可以得到下面的定理，即柯西定理。

定理（柯西定理） 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

证明：要证明上面的等式成立，只要证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$g'(\xi)(f(b)-f(a))-f'(\xi)(g(b)-g(a))=0$$

即证明

$$g'(x)(f(b)-f(a))-f'(x)(g(b)-g(a))\big|_{x=\xi}=0$$

由此，我们可以引入函数

$$H(x)=g(x)(f(b)-f(a))-f(x)(g(b)-g(a))$$

则，

$$H(a)=g(a)f(b)-g(b)f(a)$$
$$H(b)=g(a)f(b)-g(b)f(a)$$

所以函数 $H(x)$ 满足罗尔定理的条件：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$H'(\xi)=g'(\xi)(f(b)-f(a))-f'(\xi)(g(b)-g(a))=0$$

微分中值定理是微分学的基本定理，在高等数学中占有重要的地位，是研究函数在某个

区间的整体性质的有力工具。其中,拉格朗日定理是核心,罗尔定理是其特殊情况,柯西定理是其推广。

3. 巩固知识,提升思维

1) 罗尔定理的应用

对满足罗尔定理条件的具体函数,有时可以求出位于开区间内确切的 ξ 值,但有时则不能。特别是对于抽象的函数 $f(x)$,定理的结论只肯定了 ξ 的存在性,可以不止一个这样的值位于开区间 (a,b) 内,使得 $f'(\xi)=0$ 成立,也就是说导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内存在零点,即方程 $f'(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有实根,于是由罗尔定理可证明某些方程解的存在性及大致分布情况。

【例 3】 不求导数,判断函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数有几个零点及这些零点所在的范围。

解:因为 $f(1)=f(2)=f(3)=0$,所以 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$、$[2,3]$ 上满足罗尔定理的三个条件,从而,在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ_1,使 $f'(\xi_1)=0$,即 ξ_1 是 $f'(x)$ 的一个零点;

又在 $(2,3)$ 内至少存在一点 ξ_2,使 $f'(\xi_2)=0$,即 ξ_2 是 $f'(x)$ 的一个零点;

又因为 $f'(x)$ 为二次多项式,最多只能有两个零点,故 $f'(x)$ 恰好有两个零点,分别在区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$。

【例 4】 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根。

证明:设 $f(x)=x^5-5x+1$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=1$,$f(1)=-3$。由介值定理,存在 $x_0\in(0,1)$,使 $f(x_0)=0$,即为方程的小于 1 的正实根。设另有 $x_1\in(0,1)$,$x_1\neq x_0$,使 $f(x_1)=0$。

因为 $f(x)$ 在 x_0,x_1 之间满足罗尔定理的条件,所以至少存在一点 ξ(在 x_0,x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0$。但 $f'(x)=5(x^4-1)<0(x\in(0,1))$,导致矛盾,故 x_0 为唯一实根。

【练习 3】 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 为满足 $a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$ 的实数,试证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少存在一个实根。

证明: 作辅助函数

$$f(x)=a_1\sin x+\frac{1}{3}a_2\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}a_n\sin(2n-1)x,$$

显然,$f(0)=f(\pi/2)=0$,$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导。

故由罗尔定理知,至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $f'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+\cdots+a_n\cos(2n-1)\xi=0$$

从而题设方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根。

归纳:利用罗尔定理证明方程根的方法是把所给方程一端减去一端,再把变量 ξ 换成 x,观察哪个函数求导之后为这个代数式,这个函数就是要构造的函数;然后根据题设确定区间,验证是否满足罗尔中值定理。

2) 拉格朗日定理的应用

作为拉格朗日中值定理的应用,我们证明如下两个重要推论。