线性规划与运筹学

（企业管理数学）

【日本】大阪大学教授
理学博士 竹之内修 著
尚文斗 译 许振海 校

沈阳机电学院

前　　言

从许多学生中经常听到“不知怎样才能学好数学”。

实际上，一切科学的基础都与数学有密切地联系。因此，要想学好数学，必须有一定的文化程度和一定的基础知识。由于有些学生不具备这些知识，对学好数学往往就产生了疑问。

随着科学的发展，今天的数学除了应用于自然科学外，还对日常生活起到了积极的作用。尤其对社会问题，经常通过数学计算和推理得到了解决。所以学好数学是很重要的。

运筹学是一门新的数学分支，它把社会上各种各样的现象归结成数学问题。通过运筹学能够得到不同程度的答案。

学习运筹学不需要高深的基础知识，只要有中学的数学基础就能够把社会现象归结成数学问题。例如，在学习线性规划时只用到中学数学中的一次不等式；在解决库存问题时用到概率和统计。

本书是按下列顺序编写的：

解释→例题→发展问题→练习

从基础知识到解决应用问题，既使没有教师指导也可自学。

读本书时，要联系周围的各种实际问题，如能得到解决，一定会很高兴的。

作　　者

1974年9月

读 前 须 知

为了学习本书方便，对书内各处难点进行分散解决，以便逐渐引导学习兴趣。所以本书与一般书编排不同。

（1）小题目主义

每节内容都有小标题，这样会引导学习兴趣和对问题加深理解。比一般教科书更广泛，更深入，更易于理解。为了提高学习效率，将每节内容分成两部分编排，左侧记入该节内容的重要事项。

（2）例题→发展问题→练习

为了加深对问题的理解，要对例题，发展问题，练习题作反复学习，就会不知不觉提高实力，这是本书最大的特点。例题，发展问题是引导学习深入的手段，要点是指导学习的窍门。如果对练习题和习题难于解决，可参看书末的解答或提示。数学是一步一步积累的一门科学，只有反复练习才会得到成效。对练习题只要在例题和发展问题完全理解的基础上是很容易掌握的。

（3）习　题

将所有习题分成A、B两类，A类题结合例题和发展问题编写的。B类题是在完成了练习题的基础上而编写的，其中有难度较大的题，这是为了学习兴趣和检查学习效果的。

本书是一本指导学习数学思考方法的书，同时具有广泛地应用价值。希望持有本书的读者，能够理解数学的应用和数学对真理的探索，并增强学习信心和提高实力。

本书的特点

（1）这本线性规划与运筹学是为了适应各种教材而编写的，对内容作较深入的探索和解释。并与中学生学习线性规划与运筹学具有密切的联系。从基础到应用都有独特的见解。本书可供中学生学习线性规划时的参考书，也是社会上各行各业学习线性规划的一本入门书。

（2）数学着重于思考，为了便于学习和思考在编排上采用了小标题方法。这样，能对内容的论证方法和问题解法的步骤作出详细的说明。为适应学习人员的不同情况，将难点加强分析，促进提高学习兴趣和自觉地学习热情。

（3）对重点加强说明，用适当的例题，发展问题指导学习。各小标题都是为了对内容→例题→发展问题→练习题作反复的说明，以便加深对问题的理解，只要开动脑筋，有条有理地按顺序地进行学习就会收到良好的效果。

（4）重要问题用粗体字标明。所有解释的形式都是为了便于学习理解为原则；重要公式是解题的基础。容易出现错误理解的地方也都用粗体字标明。为了便于自学，采用了由浅入深循序渐进的形式的原则，这样，能够提高学习兴趣和收到良好的效果。并能推动学习的自觉性。

译 者 的 话

本书是为了我院企业管理干部班学员学习企业管理科学而翻译的教材。所用数学知识不多，只要有初中以上文化程度，基本上可以阅读。只有部分用到概率和统计的知识。本书可供企业管理中的经理、厂长以及计划员、统计员、质量检查员、推销员、采购员、保管员等有关人员学习和参考。由于译者是教数学的，对这方面知识有限，错误或不当之处，请广大学员批评指正。

译　　者

目　　录

1. 不等式和区域

不等式的基本性质

应用下列不等式的基本性质，将不等式变形。

〔不等式的基本性质〕

（1）对任意数C，有

$$A>B \leftrightarrows A+C>B+C$$

（2）对C＞0，有

$$A>B \leftrightarrows AC>BC,\ \frac{A}{C}>\frac{B}{C}$$

（3）对C＜0，有

$$A>B \leftrightarrows AC<BC,\ \frac{A}{C}<\frac{B}{C}$$

一元一次不等式

对一元一次不等式 $ax\leqslant b$，

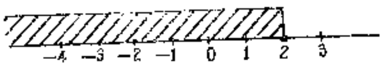
当 $a>0$ 时，其解的集合为 $\left\{x \mid x\leqslant \frac{b}{a}\right\}$

当 $a<0$ 时，其解的集合为 $\left\{x \mid x\geqslant \frac{b}{a}\right\}$

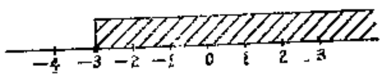
解不等式

求不等式解的集合，叫做解不等式。

〔例〕 ① $3x\leqslant 6$，解的集合为 $\{x \mid x\leqslant 2\}$



② $-2x\leqslant 6$，解的集合为 $\{x \mid x\geqslant -3\}$



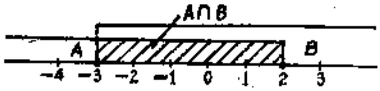
一元一次不等式组

对一元一次不等式组 $\begin{cases} a_1x<b_1 \cdots\cdots ① \\ a_2x<b_2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

其解的集合是①式解的集合A和②式解的集合B的交集$A\cap B$

〔例〕 不等式组 $\begin{cases} 3x\leqslant 6 \\ -2x\leqslant 6 \end{cases}$

其解的集合，可由下图斜线部分表示：



二元一次不等式

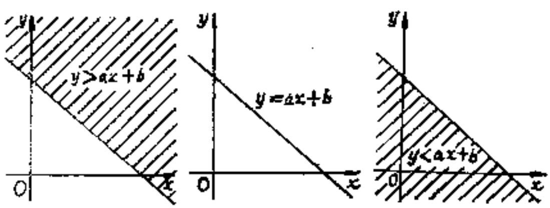
对不等式 $ax+by<c$（设 a、b 不同时为0）,叫做关于变数 x，y 的二元一次不等式。

对$ax+by<c$，其解的集合是在坐标平面上，由直线$ax+by=c$，将平面分成半平面的一侧点的集合。特殊地，

$y>ax+b$，其解的集合在直线$y=ax+b$的上方部分。

$y=ax+b$,其解的集合在直线$y=ax+b$上。

$y<ax+b$，其解的集合在直线 $y=ax+b$ 的下方部分。

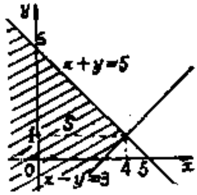


二元一次不等式组

对二元一次不等式组 $\begin{cases} a_1x+b_1y\leqslant c_1 \cdots\cdots ① \\ a_2x+b_2y\leqslant c_2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

其解的集合是由①式解的集合A和②式解的集合B的交集A∩B。

〔例〕 $\begin{cases} x+y\leqslant 5 \\ x-y\leqslant 3 \end{cases}$



其解的集合S，是右图的斜线部分。

区　　域

在坐标平面上，用图形表示不等式的解的集合叫做区域，属于区域内的任意二点连接线段上的点，如果都被该区域

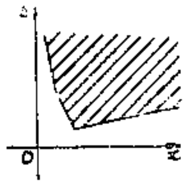
凸　区　域

包围，这个区域叫做凸区域。其次，由几条线段或半直线围成的区域，其中二条直线围成的

顶　　点

交点叫做区域的顶点。

二元一次不等式组所表示的区域

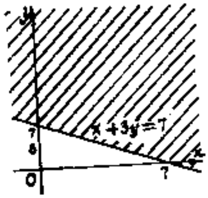


二元一次不等式组所表示的区域，是由几条线段围成的区域，右图所表示的区域是开区域。

例题1. 试确定下列不等式组所表示的区域，并说明是凸区域。

（1） $\begin{cases} x+3y\geqslant 7 \cdots\cdots ① \\ 3x-2y\leqslant 10 \cdots\cdots ② \\ x+2y\leqslant 14 \cdots\cdots ③ \\ 4x-y\geqslant 2 \cdots\cdots ④ \end{cases}$　（2） $\begin{cases} 3x+2y\geqslant 8 \cdots\cdots ① \\ x+3y\geqslant 5 \cdots\cdots ② \\ x\geqslant 0 \cdots\cdots ③ \\ y\geqslant 0 \cdots\cdots ④ \end{cases}$

〔提示〕（1）不等式①：满足 $x+3y\geqslant 7$ 的区域是以直线 $x+3y=7$ 为边界线，如右图所示，不包含原点一侧的半平面。



边界直线的方程为 $x+3y=7$，即将不等式①的不等号换成等号。其次，在斜线的区域外，任意一点都不在直线 $x+3y=7$ 上，例如，将原点坐标（0，0）代入不等式①，可以看出

$$0+3\times 0\geqslant 7，即 0\geqslant 7$$

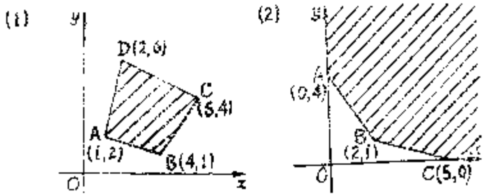
显然，在这种情形下，坐标原点不满足不等式①，所以不等式①所表示的区域，是以直线 $x+3y=7$ 为边界线，不包含原点一侧的半平面。

不等式②，③，④的区域也同样可以求出。

不等式组的区域，就是所求这些区域的交集。

（2）用与（1）完全相同的方法，可以确定所求的区域

【解答】（1）



由图形（1），（2）可以看出，显然都是凸区域。

发展问题

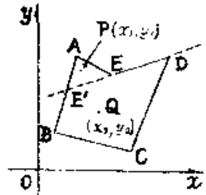
试说明由二元一次不等式组所围成的区域不能是凹多边形。

〔要点〕

不等式组所围成的区域是凸区域，一般可用图形表示。

如果二元一次不等式组所围成的区域是凹多边形，则能导出与凸区域定义相矛盾。

【解答】由反证法证明。



设不等式组所围成的区域，如右图所示的凹多边形ABCDE。因为线段DE必须是边界线，所以直线DE应该是不等式组中一个不等式的边界线。

设这个边界线用不等式 $ax+by\leqslant c$ 表示。因为凹多边形被直线 DE 分成二部分，如果在 $\triangle AEE'$，四边形 $E'BCD$ 中分别取一点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，将P，Q代入一次不等式 $ax+by$，则点P，Q不在直线DE $(ax+by=c)$ 上，而在直线DE的两侧，这时

$$(1)\begin{cases}ax_1+by_1>c\\ax_2+by_2<c\end{cases}\text{或}(2)\begin{cases}ax_1+by_1<c\\ax_2+by_2>c\end{cases}$$

必定成立。

如果（1）成立，则点P的坐标不满足不等式 $ax+by<c$。

如果（2）成立，则点Q的坐标不满足不等式 $ax+by<c$。

这与区域内的点都是不等式解的集合相矛盾。所以二元一次不等式组所围成的区域不能是凹多边形。

〔练习〕

1. 试用图形表示下列不等式组所围成的区域。

$$（1）\begin{cases} 5x-\ y\geqslant 4 \\ -3x+5y\geqslant 2 \\ x+2y\leqslant 14 \end{cases} \qquad （2）\begin{cases} -x+3y\leqslant 9 \\ 4x+3y\leqslant 24 \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

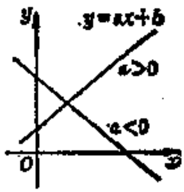
2. 求练习1.的不等式组所围成区域的顶点坐标。

2. 含有参数的直线方程

$y=ax+b$ 的图象　斜率　截距

二元一次方程 $y=ax+b$ 的图象是直线。

直线 $y=ax+b$ 的方向由 a 确定，位置由 b 确定。a 是直线的斜率，b 是直线的截距（在 y 轴上的截距）。

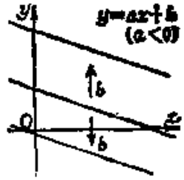


设直线 $y=ax+b$

当 $a>0$ 时，是右边向上的直线。

当 $a<0$ 时，是右边向下的直线。

直线的平行移动

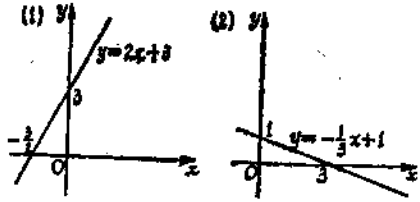


随着 b 值的增加，直线 $y=ax+b$ 在 y 轴上正的方向平行移动。随着 b 值的减少，直线 $y=ax+b$ 在 y 轴上负的方向平行移动。

〔例〕 直线（1） $y=2x+3$

$$（2）\quad y=-\frac{1}{3}x+1$$

的图象，分别如下图所示。



$ax+by=c$ 的图象

二元一次方程 $ax+by=c$ 的图象是直线。

（i）$a\neq 0$，$b\neq 0$ 时，直线 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 的斜率为 $-\frac{a}{b}$，截距为 $\frac{c}{b}$

（ii）$a\neq 0$，$b=0$ 时，直线 $x=\frac{c}{a}$ 与 y 轴平行，x 的坐标为 $\frac{c}{a}$

（iii）$a=0$，$b\neq 0$ 时，直线 $y=\frac{c}{b}$ 与 x 轴平行，y 的坐标为 $\frac{c}{b}$

含有参数的直线

含有参数的直线

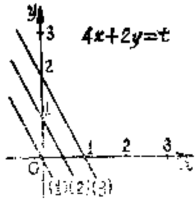
$ax+by=k$（$a\neq 0$，$b\neq 0$，k 为参数）

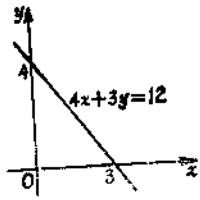
将上式变形，得

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{k}{b}$$

直线的斜率为 $-\frac{a}{b}$，截距为 $\frac{k}{b}$。由参数 k

	值的变化，直线沿 y 轴作上下平行移动。 〔例〕 设$4x+2y=t$， t 为参数， （1） $t=0$ （2） $t=2$ （3） $t=4$ 时的图象如右图所示。
一次式$ax+by$的值	当一次式$ax+by$， 在 $x=x_1$， $y=y_1$， 时， 一次式的值为ax_1+by_1 由直线$ax+by=k$上的坐标 x， y 来确定一次式的 k 值。 〔例〕（1） 当 $x=2$， $y=3$ 时，一次式 $4x+3y$ 的值为 $4\times2+3\times3=17$ （2） 一次式$4x+3y$的值为12时，解的集合是直线$4x+3y=12$上点的坐标的集合。





例题2. 设一次式$4x-3y$，回答下列问题。

（1） $x=2$， $y=3$ 时，求一次式的值。

（2）试用图象表示，满足$4x-3y=12$解的集合，即

$$\{(x,\ y)\mid 4x-3y=12\}$$

（3）设$4x-3y=k$。当$k=0,2,4,6$时，画出解的集合$\{(x,\ y)\mid 4x-3y=k\}$的图象。当k值逐渐增大，问图象如何移动。

〔提示〕（1）将 $x=2$，$y=3$ 代入一次式 $4x-3y$ 即可。

（2）与 x 轴，y 轴分别相交于点（3，0），（0，-4）的直线，就是 $4x-3y=12$ 的图象。

（3）$k=0$ 时，$4x-3y=0$，即 $y=\frac{4}{3}x$ ……①

$k=2$ 时，$4x-3y=2$，即 $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$ ……②

$k=4$ 时，$4x-3y=4$，即 $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$ ……③

$k=6$ 时，$4x-3y=6$，即 $y=\frac{4}{3}x-2$ ……④

由①，②，③，④各式，可以看出，斜率相同，k 值越大，截距越小。

【解答】（1）$4\times2-3\times3=-1$　　（2）图象为左下图：

（3）图象为右下图，随着 k 值的增加，直线向 y 轴负的方向平行移动。