概率统计方法

（初　稿）

全国高等农业院校农业经济管理专业

统计课教师讲习班用

西北农学院印

一九八〇年七月

目录

第一章 绪论 ——————— 1-1—1-7

第二章 概率的基本性质 ——————— 2-1—2-8
第一节 概率的定义 ——————— 2-1
第二节 概率的基本运算规则 ——————— 2-5
第三章 变量的分布及其数量特征 ——————— 3-1—3-33
第一节 随机变量及其概率函数 ——————— 3-1
第二节 随机变量的数量特征 ——————— 3-9
第三节 随机变量的几种重要概率分布 ——————— 3-20
附录 求和符号及其运算规则 ——————— 3-28
第四章 抽样估计 ——————— 4-1—4-34
第一节 抽样估计的任务 ——————— 4-1
第二节 抽样估计的理论依据 ——————— 4-3
第三节 总体平均数的抽样估计 ——————— 4-13
第四节 其它总体参数的抽样估计 ——————— 4-29
第五章 假设检验 ——————— 5-1—5-17
第一节 假设检验的基本概念 ——————— 5-1
第二节 参数的假设检验 ——————— 5-4
第三节 正态分布的假设检验 ——————— 5-13
第六章 方差分析 ——————— 6-1—6-16
第一节 方差分析的基本概念 ——————— 6-1
第二节 单因素的方差分析 ——————— 6-2
第三节 双因素的方差分析 ——————— 6-8
第七章 回归与相关分析 ——————— 7-1—7-39

第一节　一元线性回归 ------------ 7-2
第二节　简单相关系数 ------------ 7-18
第三节　多元线性回归 ------------ 7-25
第四节　多重相关分析 ------------ 7-33
第八章　非参数方法 ------------ 8-1—8-18
第一节　不配对资料的非参数检验法 ------ 8-1
第二节　配对资料的非参数检验法 ------ 8-7
第三节　等级相关系数 ------------ 8-14
附录　等级相关系数的推导 ------------ 8-17
附录　表一　随机数表
表二　标准正态曲线纵坐标和面积查对表
表三　普哇松分布数值表
表四　t— 分布表
表五　χ^2 — 分布的数值表
表六　F — 分布表
表七　检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值表
表八　多变量相关系数 r 的显著性临界值表
表九　威尔柯克逊分布表（不配对材料）
表十　威尔柯克逊分布表（配对材料）第一部分，第二部分
表十一　r 对 Z 的变换表
表十二　符号检验表
表十三　T 值检验表
表十四　正态分布的柯尔莫哥洛夫检验法中概率 P(λ) 的数值表
参考书目

概率统计方法

第一章　绪　论

概率统计方法是统计方法的组成部分，它的中心任务，是用抽样调查的材料对全部研究对象的数量特征作出有科学根据的推断，因此要了解概率统计方法在统计中的地位和作用，就得从全面调查和非全面调查的比较说起。

一、全面调查与非全面调查的比较

统计是认识社会的有力武器。统计作为认识事物的一种数量方法，首先必须占有大量的原始资料。这项占有原始资料的工作在统计过程中叫做统计观察或统计调查。一切统计调查，从所占有原始资料来看，不外两种情况：一种情况是对所研究的全部对象都进行了观察和记载，从而掌握了每个单位的具体材料，这样的统计调查叫做全面调查。例如，国家统计机关颁发的基本统计报表，定期或不定期举行的各种普查，都属于这种调查类型。另一种情况是在全部研究对象中只调查其一部分，因而实际掌握的只是一部分单位的具体材料，这样的统计调查叫做非全面调查。例如，对一部分农民家庭进行的农民家计调查，对一部分国营农场或农村人民公社基本核算单位进行的农产品成本调查，农作物收割前在一部分地块上进行的测产等，都属于非全面调查。

通过统计调查占有了大量的原始资料，就可以经过整理分析，得出描述研究对象某些数量特征的统计数字。但是应该看到，从全面调查得出的统计数字和从非全面调查得出的统计数字，其性质是大不相同的。全面调查提供了全部研究对象的原始资料，因此，根据全面调查得出的统计数字是研究对象某些数量特征的准

确概括；而且，就一定的研究对象来说，全面调查的统计数字是唯一的，肯定的数值。非全面调查则不然。非全面调查只占有研究对象中一部分单位的具体材料，因而其统计的结果，总不免和研究对象全体的数量特征有或大或小的误差。这种由于调查的非全面性而产生的误差叫做代表性误差；而且每次非全面调查的统计结果，随调查单位的构成不同而改变，它是可变动的、不肯定的。

这样说来，全面调查可以得出准确的、肯定的统计结果，而非全面调查则必然带有代表性误差，那末，我们就只进行全面调查好了，为什么还要采用非全面调查呢？为了弄清楚这个问题，让我们想一想下列各种情况：

第一，某些社会经济现象的发生是无限的，不可能对它们进行全面调查，农村集市贸易的商品价格就是这类现象的一个例子。

第二，某些社会经济现象的发生虽然不是无限的，但实际上不能够对它们进行全面调查。这主要有两种情况：一种是研究对象的数量太多，由于人员、经费和时间的限制，不能够全面地进行调查。例如，研究农民家庭收支问题，要对亿万农民家庭全面调查，这在实际上是做不到的。一种是调查研究的性质，排除了全面调查的可能。例如，破坏性的商品质量检验，检验过程就破坏了商品的使用价值，要对全部商品进行破坏性检验，显然是不可行的。

第三，全面调查的准确性是以调查统计过程中不存在登记性误差和技术性误差为前提的。实际上，调查的对象越多，调查内容越复杂，在实地调查和资料整理过程中产生登记性误差和技术性误差的可能性也越大，如果全面调查由于调查对象加多而增加的登记性误差和技术性误差，大于非全面调查的代表性误差，

或者非全面调查由于提高工作质量而减少的登记性和技术性误差大于其代表性误差；那末，即使从准确性的角度考虑，非全面调查也优于全面调查。

第四、除了准确性以外，还要考虑非全面调查能够大大缩短调查统计的周期，提供比较详尽的材料，节约人力和经费开支，提高全面经济效果，这些都是非全面调查的优点。

从以上各方面考虑，可以明白：不是说有了全面调查这一种方式就够了，不需要再搞非全面调查了。恰恰相反，非全面调查不仅是研究某些问题的客观必要，而且给调查方法提供了选择的余地。全面调查和非全面调查之间的关系不是对立的，而是相辅相成、互相配合的。只有把全面调查和非全面调查的方法灵活地运用起来，发挥它们各自的长处，从研究对象的特点、研究任务的要求和研究工作的具体条件出发，选择最适当的调查方法或调查方法的组合，才能最有效地组织统计调查，满足经济管理工作对统计资料的多种多样的需要。

二、非全面调查的种类

非全面调查是和全面调查相区别的，只要不是全面调查，就可称做非全面调查。所以，非全面调查是一个非常笼统的概念。按照一般的说法，非全面调查包括重点调查，典型调查和抽样调查。

所谓重点调查，就是把全部研究对象分成重点单位和非重点单位，然后对所有重点单位进行全面的调查。至于对非重点单位，则或者根本不作实际调查，仅仅根据原有的统计资料加以粗略的估计；或者再从其中抽选一小部分作调查。在后一种情况下，重点调查实际上是全面调查和抽样调查相结合的一种方式，即对重点单位的全面调查和对非重点单位的抽样调查相结合。

所谓典型调查，一般地说，就是从研究对象中挑选出少数具

有典型意义的单位来进行实际的调查。典型调查在实行中又有各种不同的作法，从掌握一两个典型到划分类型的选点调查，其形式不一而足。

所谓抽样调查，是指从全部研究对象中，按照一定的原则抽取一部分单位作调查，然后根据调查材料对研究对象的某些数量特征进行估计或推论。在这里，全部研究对象是抽取调查单位的范围和源泉，又是抽样调查估计和推论的目标，我们把它叫做总体，或称母体。实际抽取的那些调查单位，构成了一个代表全部研究对象的小集体，用来作为全部研究对象的一个缩影，我们称它为样本，或叫子样。为了便于进行抽样和观察，全部研究对象必须划分为基本的调查单位，每一个调查单位叫做一个单元。在一个样本中所包含的单元的数目叫做这个样本的容量，或者称之为样本的大小。

抽样调查的实际作法也是多种多样的。从抽取调查单位所依据的原则来看，抽样调查可以概括为两类：概率抽样与非概率抽样。概率抽样抽取调查单位所依据的基本原则是随机原则[1] 所谓随机原则，就是在抽选调查对象时，规定了一定的程序以保证每一个单位都有同等的中选机会，这样就避免了主观因素的影响。所以概率抽样又叫随机抽样。非概率抽样选定调查单位不依据随机的原则，而是根据操作的方便，或者根据主观的判断，例如，在麦场上从成堆的麦粒中顺手抓上一把来鉴别水分的含量，这样的抽样，只有表层的麦粒才有被抓到手上的机会，表层以下的麦

---

[1] 概率抽样包括等概抽样和不等概抽样。随机原则一般解释为等概抽样的原则，这里为了叙述的简化，不对等概抽样和不等概抽样作严格的划分。

粒没有被抽的机会，因而不是随机抽样。再如，从一个生产队的全部麦田里选出几块"标准"地块来进行测产，这些标准地块是凭主观判断来确定的，不是按随机原则抽取的，所以也不是随机抽样。

三、概率抽样的特点

概率抽样按照随机原则抽取调查单位，避免了调查人主观因素的影响，从而保证了调查材料的客观性，这是概率抽样的最明显的特点。但是概率抽样的目的，主要不是为了排除人的主观因素。实践证明，在一定的条件下，正确发挥主观因素的能动作用，可以收到事半功倍的效果。例如，在农作物产量调查中，利用老农的丰富经验和对当地生产情况的透彻了解，采取判断抽样的办法，可以用较少的调查单位取得接近实际的产量数字。这样的事例是不乏实例的。所以，主观因素的影响并不一定都是坏事。问题在于即使当主观因素发挥积极作用的情况下，我们也无法对这种抽样调查的结果精确到什么程度作出定量的估计。上面所举农作物产量调查的例子，只有在实际产量的数字统计出来以后，才能够知道调查的数字是否接近实际和接近到什么程度。在实产数字没有出来以前，或者在实产数字无法确知的情况下，调查结果的精确程度是无法衡量的。而且，即使今年的调查结果，经过实产数字的检验证明是接近实际的，明年照样做能否取得同样精确的结果也仍然无法预计。

概率抽样由于实行随机的原则，每个单位入选的机会是相等的，这样就能计算出各种抽样结果出现的概率，也就能够在概率的基础上确定抽样估计的精确程度。概率抽样与非概率抽样的根本区别，在于概率抽样服从随机现象的客观规律，它的代表性误差是可以用数学方法精确地计算出来；而非概率抽样则依靠了人经验和主观判断能力，它的代表性误差是无法用数学方法来计算的。

在研究对象比较单纯，观察范围比较狭窄的情况下，调查者的主观判断对保证抽样调查取得成功能够起重要的作用；但是随着社会生产的发展和研究领域的不断扩大，个人经验和判断的局限性便日益暴露了出来．

概率统计方法的理论基础是现代数学中的概率论．概率论的研究开始于十七世纪．早期的概率论研究取材还是比较狭窄的，研究的内容和方法也都比较简单。近几十年来，随着科学技术的突飞猛进，概率论的理论研究和实际应用都有了非常迅速的发展．到了今天，概率论在国民经济的各个部门以及科学技术的各个领域如近代物理，地球物理、自动控制与通信理论、生物学、气象学、水文学和医学等方面都得到广泛的应用．概率论研究的一个重要特点是和统计研究相结合．概率论的公理系统给统计方法提供了理论基础，统计的实践对概率论的公理进行检验并提出新的资料和问题，从而反过来又促进概率论研究的发展．由于概率统计方法具有数学的严密性和应用的广泛性，在国外的应用统计学教科书中，已经成为统计方法的主要的、核心的内容。

现代科学技术的发展趋势是更多地、更深刻地使用数学方法。马克思早就预见性地指出：“一种科学只有在成功地运用数学时，才能达到了真正完善的地步。”我国目前农业经济管理工作，在很大程度上还是靠的个人经验和直观判断；农业经济管理的科学水平还很低．但是，我国的社会主义农业，从本质上说是社会化的大农业，它必然地要向着现代化的目标发展．而农业生产的现代化也一定要求农业管理的现代化．因此，农业经济管理必须摆脱目前的落后状态，逐步提高它的科学水平．农业经济管理要成为一门科学，也必须走“数学化”的道路．统计是经济管理的工具，在统计工作中扩大使用概率统计方法是运用数学方法进行经济管理的基本环节，我们必须从这个基本环节开始，运用概率统

计方法，提供经过科学整理的统计资料，为在农业经济管理工作中逐步采用数学方法，实现农业经济管理的科学化、现代化开辟道路。

第二章　概率的基本性质

我们在运用概率统计方法来观察和分析问题的时候，总是把观察的结果和分析的论断同一定的概率联系起来。因此，学习概率统计方法必须对概率的概念和性质有一个基本的了解。

第一节　概率的定义

一、什么是概率

概率是对事物出现可能性大小的度量，平常我们谈到某种事物出现的可能性大小时，往往用"非常可能"、"可能性较大"、"不大可能"、"可能性很小"等类的词句来表达我们的思想，这在需要说明的事物不多，而且对所描述的现象不作严格要求的情况下是可以的，如果要求对许多事物的可能性大小作出准确的描述，光靠用比较级和最高级之类的形容词来表达就显得很不够了，在这种情况下，就要对事物的可能性大小进行定量的观察。而概率就是标明事物可能性大小的量。

二、概率的古典定义

在给概率下一个严格的定义之前，让我们先举几个简单的例子：

例1，投掷一枚硬币，可能出现的结果有两种：一种是正面向上，一种是反面向上；由于硬币的两面是对称的，因而两种结果出现的可能性是相等的，用概率来表示

出现正面的概率 $=\frac{1}{2}$

出现反面的概率 $=\frac{1}{2}$

例2　投掷一枚骰子，可能出现6种不同的结果，由于骰子的制作是对称的，因而任何一种结果出现的概率都是$\frac{1}{6}$。

例3　投掷一枚骰子，在可能出现的6种结果中，出现单数

的结果有3种（1点、3点、5点），出现双数的结果也有3种（2点、4点、6点），因此，投掷一枚骰子

$$出现单数的概率=\frac{3}{6}$$

$$出现双数的概率=\frac{3}{6}$$

从上面所举的例子可以得知，在(1)每次试验只有有限种不同的结果，(2)出现每一种结果的可能性是相同的，这样两个条件下，在一次试验中出现某种事件的概率，就是这种事件所包含的结果数与全部可能结果数之比。现在我们把试验的每一种结果叫做一个基本事件，称试验的基本事件总数为n，称事件A所包含的基本事件数为m，则数m/n就是在一次试验中出现事件A的可能性大小的具体量度，称之为事件A的概率，记作

$$P\{A\}=\frac{m}{n}$$

也就是说，我们定义事件A的概率为：事件A中包含的基本事件数与基本事件的总数之比。这种概率的定义，称为概率的古典定义。对于这样定义的概率，显然有下列基本性质：

性质1　必然事件的概率等于1，记作 $P(U)=1$

意思是说，如果试验的每一种结果都能够产生事件U，则事件U称为必然事件，它所包含的基本事件数就等于基本事件的总数；由上述定义，事件U的概率 $P(U)=n/n=1$，即必然事件的概率其数量表现为1

性质2　不可能事件的概率等于零，记作 $P(V)=0$

按照同样的逻辑推理，如果试验的n种结果都不产生事件V，则称事件V为不可能事件，它所包含的基本事件数为0，这时 $P(V)=\frac{0}{n}=0$，即不可能事件的概率在数量上表现为0.

性质3　不属于必然事件及不可能事件的事件，其概率界于0与1之间，记作　$0\leq P(A)\leq 1$

这里，A表示不属于必然事件及不可能事件的事件，它所包含的基本事件数m满足不等式$0\leq m<n$，所以$0\leq\frac{m}{n}=P(A)\leq1$

概率的古典定义对于我们理解概率的基本概念和基本性质是很有帮助的，但是它的假设条件（基本事件数是有限的而且出现的可能性是相同的）却把问题过于简单化了。实际上，有很多现象，特别是自然现象，其基本事件的总数常常是无限的，而且各种基本事件出现的可能性也不总是相等的。比如，气象观测的材料，可以取某一区间的任意实数值；某个地区的年降雨量，出现各种不同数量的可能性并不是等可能的。对于这些复杂的现象，概率的古典定义已经满足不了要求，而必须用另一种观点来描述概率的概念。

三、概率的统计定义

统计是研究大量现象的数量表现及其规律性的。在大量观察的过程中，经常可以发现某种事件出现的次数很多，某种事件出现的次数较少，某种事件则很少出现；这样就使我们很自然地把事件发生的可能性大小同它们在大量观察中出现次数的多少联系起来。如果以观察的总次数为n，其中事件A出现了S次，称作事件A出现的频数，则频数S与总次数n之比就是事件A出现的频率。统计实践证明，当n不断增大时，A的频率S/n呈现出向一个稳定值p摆动的趋势。n越是增大，S/n向p摆动的幅度越小。因此，这个稳定值p可以用来描述事件A出现的可能性的大小，我们就把它定义为事件A发生的概率，即

$$P(A)=p.$$

应当指出，由于观察的次数可以无限增大，p只是一个理论值。在实际工作中，通常取已经做过的调查或实验中，观察次数最多的一次所实际观察到的事件A的频率S/n作为事件A的概

率 p 的一个近似值，即

$$P(A)=p\approx\frac{S}{n}$$

上面所说的概率的统计定义可以简述为：事件 A 的概率就是当观察的次数 n 无限增大时，事件 A 的频率 S/n 所趋近的稳定值 p.

有人曾以投掷一枚硬币做实验，其观察结果与理论频率作比较列表如下：（表 2.1.1）

表 2.1.1　　投掷一枚硬币的观察频率与理论频率的比较表

事件	实验Ⅰ		实验Ⅱ		实验Ⅲ		理论频率（概率）
	出现次数	频率	出现次数	频率	出现次数	频率	
A（正面向上）	2,048	0.5069	6,019	0.5016	12,012	0.5005	0.5000
B（反面向上）	1,992	0.4931	5,981	0.4984	11,988	0.4995	0.5000
合　　计	4,000	1.0000	12,000	1.0000	24,000	1.0000	1.0000

（注）　实验数据转录南京大学数学系计算数学专业编《概率统计基础和概率统计方法》，科学出版社，1979年，第2页。

从表列数字可以看到，当实验的投掷次数增大时，事件 A（正面向上）出现的频率越来越接近一个稳定值 p。取投掷次数最多的一次实验中事件 A 的频率 0.5005 作为 p 的近似值，它与从理论上计算的事件 A 的概率，$P(A)=\frac{1}{2}=0.5000$ 是非常接近的。这就证明了投掷一枚硬币的实验，符合古典概率的假定条件，因而观察频率与理论频率相一致。

第二节　概率的基本运算规则

一、排列与组合的基本计算公式

计算古典概率需要算出基本事件总数及事件A所包含的基本事件数，这在许多情况下是相当繁难的，在这些计算中，排列、组合是常用的数学工具。下面列出排列、组合的一些基本计算公式，供大家参考：

1、全排列公式　$P_{n,n}=n!$　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$，$0!=1$

2、选排列公式　$P_{n,r}=\frac{n!}{(n-r)!}$

3、n中取r组合公式

$$C_{n,r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

或

$$C_{n,r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

易知　$C_{n,1}=n$，　$C_{n,n}=C_{n,0}=1$

且　$C_{n,r}=C_{n,(n-r)}$

二、概率的基本运算规则

在概率的计算中，下面的几个基本运算规则不论对古典概型、一般概型或统计概率都是适用的。

1、如果有两个或两个以上的事件，在一次试验中只有其中的一个有可能出现，则称这样的事件为互不相容事件或互斥事件。设有r个互斥事件，其各自出现的概率，为p_1、p_2…、p_r，则在一次试验中出现其中任何一个事件（即不论出现第一个事件，或第二个事件，…或第r个事件）的概率为

$$P=p_1+p_2+\cdots+p_r \text{ ------------（公式2·1·1）}$$

这条规则叫做概率的加法定理。

如果一组互不相容事件的概率之和等于1，就称之为完备事件组，简称完备组

如果事件A与B互不相容，而且在一次试验中两者至少出现一件，则A与B就构成一个完备组，A和B称为互逆事件，即A为B的逆事件，同时B为A的逆事件，记为 $A=\bar{B}$ ，$B=\bar{A}$

2、如果有两个或两个以上的事件，其中任何一个事件出现的概率不受任何其他事件出现与否的影响，则称这些事件为独立事件，设 p_1， p_2，…， p_r 为r个独立事件的各自出现的概率，则在一次试验中，这些事件同时出现的概率为

$$P=p_1 p_2 \cdots p_r \quad \text{---------（公式2.1.2）}$$

这条规则叫做概率的乘法定理

3、对于r个非独立的事件（或称相依事件），如果第一个事件出现的概率为 p_1；在第一个事件出现后，第二个事件出现的概率为 p_2；在第一、二个事件出现后，第三个事件出现的概率为 p_3；以下依此类推；则这些事件按照顺序全部出现的概率为

$$P=p_1 p_2 \cdots p_r \quad \text{---------（公式2.1.3）}$$

显而易见，这个公式是上述乘法定理的一般化。

4、在上述情况下，第二个事件B是在第一个事件A已经发生的条件下发生的，它的概率叫做条件概率，记第一事件A的概率为P(A)，并假定P(A)>0，则事件B对于事件A的条件概率记作P(B|A)，它的计算公式为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{---------（公式2.1.4）}$$

式中P(AB)是事件A和事件B一起发生的概率

同样地，设B是具有正概率的事件，在已知事件B发生的条件下事件A发生的概率叫做事件A对于事件B的条件概率，记

记作P(A|B)，其公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \text{------} (公式2.1.5)$$

条件概率总是以某一事件已经发生为条件，计算其后事件的概率，如果P(A)与P(A|B)相等，说明事件A对于事件B是独立的，这时，P(B)也一定与P(B|A)相等，即两个事件的独立性是对称的。

5、把条件概率推广到一系列事件对于某一事件的条件概率，即得著名的巴叶斯公式（Bayes' Formula）。现表述如下：

如果$B_1, B_2, \cdots, B_n$是一个完备事件组，也就是说，如果$B_1, B_2, \cdots, B_n$是n个互不相容的事件，且$P(B_1)+P(B_2)+\cdots+P(B_n)=1$，A是具有正概率（$P(A)>0$）的任一事件，则在A已发生的条件下$B_i$发生的概率就是$B_i$对于A的条件概率，记作$P(B_i/A)$，其计算公式为

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)}$$

$$=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{K=1}^{n} P(B_K)P(A|B_K)} \text{------} (公式2.1.6)$$

6、在概率计算中，常常遇到研究对象只划分为两种类型的情况，例如，试验结果分为成功或失败，产品质量分为合格或不合格，经营结果分为盈利或亏损等，这类问题称做贝努里（Bernoulli）概型。

设试验的成功事件为A，其出现的概率为p，由于试验只有两种可能的结果，则失败事件就是$\bar{A}$，其概率$q=1-p$，现在要求确定在n次独立试验中，事件A出现r次（$r=0,1,2,\cdots n$）的概率$P_n(r)$，其基本公式如下：