

高等数学基础教程



内 容 提 要

本书是根据教育部最新制定的《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年教学经验和目前职业教育课程改革的要求而编写的。内容主要包括：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元函数微分学简介等。书后附有数学建模及竞赛简介、数学软件简介、初等数学常用公式、积分表以及习题参考答案。

本书特点：一是突出职业教育特色，兼顾各专业选取内容；二是内容处理深入浅出，精确、精练；三是突出了知识的实践与应用，引用大量实例，介绍了数学建模的有关知识；四是将数学知识与数学文化相融合，克服了一般科技书籍枯燥、抽象的缺点。

本书可作为高等职业院校各专业高等数学课程通用教材，也可作为相关技术人员和数学爱好者的参考资料。

前言

目前,我国高等职业教育人才培养的模式已从“任务驱动型”向“工作过程型”转化。因此,高职高专教材的编写理念也应突破传统而创新模式,以适应当前教学改革的实际需要。基于这一考虑,我们组织了一批学术水平高、教学经验丰富且长期从事职业教育数学教学的教师,在教育部关于高职高专的相关文件的精神指导下,结合最新颁布的高等职业教育数学课程教学大纲而编写了本教材——《高等数学基础教程》。

本教材严格贯彻高等数学课程的教学基本要求,在编写过程中我们以“强化概念、重视计算、注重应用、兼顾文化”为理念,以“应用为目的,必须、够用”为原则,理论描述精确简约,具体讲解明晰易懂;很好地兼顾了高等职业教育各专业后续课程教学对数学知识的要求,同时也充分考虑了学生可持续发展的需要。在内容结构、适应范围及编写质量方面作了更好的把握,力求使其成为同类教材中的经典之作。

本教材作为高职院校第一学期使用的教材,内容主要包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分三部分。为了提高学生学习数学的兴趣,尽力避免一般教科书抽象、枯燥的缺点,全书通过“历史的注记”、“观察与思考”、“数学家简介”等内容,始终将数学知识与文化背景相融合。每节配有A、B两组习题,章末附有知识结构图,书末附有初等数学常用公式、积分表、习题答案等。另外本教材为了体现实用性,书末还介绍了MATLAB数学软件和数学建模及竞赛的有关知识、概念,突出了数学概念与实际问题的联系。

本教材还具有以下特点:(1)适度淡化逻辑论证,充分利用几何直观说明,帮助学生理解有关概念和理论;(2)充分考虑职业院校学生的数学基础,较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接;(3)优选了微积分在几何、物理、经济等方面的应用实例,适用专业面宽;(4)每节均配有A、B两组习题,便于学生巩固基础知识,提高基本技能,加强对教材内容的理解;(5)每章末通过“应用与实践”一节,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力;(6)各章末附有本章知识结构图,可帮助学生掌握本章重点知识,理解知识之间的内在联系;(7)每章都涉及数学文化,增强了教材的趣味性,有利于提高学生学习数学的兴趣;(8)兼顾了电力类专业特点,适度选取了有关方面的例题和习题。

本教材按90学时设计,标有*号的内容需另加学时,可供部分专业选学或自学。本教材由西安电力高等专科学校吴文海担任主编,段东东、胡雅彬担任副主编,廖虎教授担任主审。参加编写的还有马小燕、姚振宇、吴少祥。具体分工如下:绪论、第一、二、三、四章由吴文海编写;第五章由胡雅彬编写;第六、七章由段东东编写;书中涉及经济学应用部分由姚振宇编写;附录部分由马小燕、吴少祥共同完成。廖虎教授对全书的统稿提出了宝

贵的意见。

本教材除适用大学专科及高等职业院校综合类专业的教学需要之外,亦可供成人、函授、远程教育院校等选用。书中打“*”内容可作为选学。

尽管我们在编写《高等数学基础教程》的过程中进行了不少尝试,做出了许多努力,但由于我们水平有限,书中难免存在不妥或疏漏之处,恳请广大师生、读者、同仁和专家批评斧正,并将意见及时反馈给我们,以便修订时加以完善。

编 者

2011 年 8 月

目 录

绪 论

- 一、数学科学的形成与发展
- 二、学习数学的目的和意义
- 三、数学研究的对象及特点
- 四、高等数学与初等数学的区别
- 五、感 悟

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数

- 一、区间与邻域的概念
- 二、函数概念 1. 函数定义 2. 两要素 3. 表示法
- 三、函数几种性质
- 四、反函数
- 五、分段函数 符号函数 单位阶跃函数
- 六、初等函数 1. 基本初等函数 2. 复合函数 3. 初等函数

第二节 函数模型

- 一、数学模型的概念
- 二、数学模型的建立

第三节 常用经济函数

- 一、单利与复利
- 二、多次付息
- 三、贴现
- 四、需求函数
- 五、供给函数
- 六、成本函数
- 七、收入函数与利润函数

第四节 极限的概念

- 一、数列的极限 1. 数列的概念 2. 数列的极限
- 二、函数的极限 1. $x \rightarrow \infty$ 2. $x \rightarrow x_0$

第五节 极限运算

一、极限运算法则

二、极限运算举例

三、两个重要极限

第六节 无穷小量与无穷大量

一、无穷小量与无穷大量

二、无穷小的性质

三、无穷小的比较

第七节 函数的连续性

一、函数的连续与间断

二、连续函数的性质与初等函数的连续性

三、闭区间上连续函数的性质

* 第八节 应用与实践

一、细菌系列繁殖问题

二、抵押贷款问题

三、连续复利问题

● 本章知识结构图

数学家简介【1】——阿基米德

第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

一、导数定义

二、求导数举例

三、导数的意义 1. 几何意义 2. 物理意义 3. 经济意义

四、可导与连续的关系

第二节 函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

二、复合函数的求导法则

三、高阶导数

第三节 隐函数及参数方程确定的函数求导法

一、隐函数的求导法

二、对数求导法

三、参数方程确定的函数的求导法

四、初等函数的求导

第四节 函数的微分

一、微分的概念及几何意义

二、微分基本公式及微分的运算法则

第五节 微分的应用

一、微分在近似计算中的应用

二、微分在误差估计中的应用

第六节 导数在经济中的应用

一、边际问题

二、弹性问题

* 第七节 应用与实践

一、函数变化率问题

二、抛物镜面的聚光问题

● 本章知识结构图

数学家简介【2】——柯西

第三章 导数的应用

第一节 中值定理与罗必达法则

一、微分中值定理

二、罗必达法则

第二节 函数的单调性和极值

一、函数单调性的判定

二、函数的极值

三、函数的最大值、最小值求法

第三节 函数图像的描绘

一、曲线的凹凸性与拐点

二、函数图像的描绘

* 第四节 应用与实践

生态学中的优化问题

● 本章知识结构图

数学家简介【3】——拉格朗日

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数和不定积分的概念

二、不定积分的性质

三、不定积分的运算法则

第二节 不定积分的基本积分公式

第三节 换元积分法

一、第一换元积分法(凑微分法)

二、第二换元积分法(变量代换)

第四节 分部积分法

第五节 积分表的使用

一、可以直接从积分表中查到结果的

二、先进行变量代换,然后再查表求积分

三、利用递推公式在积分表中查到所求积分

* 第六节 应用与实践

一、物体在空气中的冷却问题

二、潜水艇下沉的速度问题

三、放射性元素的衰变问题

● 本章知识结构图

数学家简介【4】——牛顿

第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、两个实例

二、定积分的定义

三、定积分的几何意义

四、定积分的性质

第二节 微积分基本定理

一、变上限定积分

二、微积分基本定理

第三节 定积分的换元积分法与分部积分法

一、定积分的换元积分法

二、定积分的分部积分法

第四节 广义积分

一、积分区间是无限的广义积分

二、有限区间上无界函数的广义积分

* 第五节 应用与实践

一、生产效益问题

二、存储问题

三、森林救火问题

● 本章知识结构图

数学家简介【5】——莱布尼茨

第六章 定积分的应用

第一节 定积分在几何中的应用

- 一、定积分应用的微元法
- 二、定积分的几何应用

第二节 定积分在实际问题中的应用

- 一、定积分在物理中的应用
- 二、定积分在经济中的应用

● 本章知识结构图

数学家简介【6】——傅里叶

第七章 多元函数微积分简介

第一节 向量代数与空间解析几何

- 一、空间直角坐标系
- 二、向量与向径的概念
- 三、向量的运算及其坐标表示
- 四、直线与平面方程
- 五、空间曲面的方程

第二节 多元函数及其偏导数

- 一、多元函数的概念
- 二、二元函数的极限与连续
- 三、二元函数偏导数的概念

第三节 全微分及应用

- 一、全微分的概念
- 二、全微分在近似计算中的应用
- 三、复合函数微分法
- 四、隐函数微分法

第四节 多元函数的极值与最值

- 一、二元函数极值概念
- 二、函数极值的求法
- 三、多元函数的最值

第五节 二重积分的概念

- 一、二重积分的定义
- 二、二重积分的性质

第六节 二重积分的计算

- 一、在直角坐标系下二重积分的计算

二、在极角坐标系下二重积分的计算

* 第七节 应用与实践

一、血管分支问题

二、人口数量问题

三、火山喷发后高度变化问题

● 本章知识结构图

数学家简介【7】——泰勒

参考答案

附录 I 积分表

附录 II 初等数学常用公式

附录 II 数学建模及竞赛简介

附录 IV 数学软件(MATLAB)简介

绪 论

考虑到数学有无穷多的主题内容,数学,甚至是现代数学也是处于婴儿时期的一门科学,如果文明继续发展,那么在今后两千年,人类思维中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位.

——A.N.怀特海^①

一、数学科学的形成与发展

当人类试图按照自己的意志来支配和改造自然界时,就需要用数学的方法来思考、描述和实施,因此,在人类文明之初就诞生了数学.古代的巴比伦、埃及、中国、希腊和印度在数学上都有重要的创新,不过从现代意义上说,数学形成于古希腊.著名的欧几里得几何学是第一个成熟的数学分支.相比于欧几里得几何学,其他文明中的数学并未形成一个独立的体系,也没有形成一套方法,而是表现为一系列相互无关的、用于解决日常问题的规则,诸如历法推算和用于农业与商业的数学法则等,这些法则如同人类的其他知识一样是源于经验归纳而成的,因此往往只是近似正确的,例如,有许多像“径一周三”这样以三表示圆周率的命题.欧几里得几何学则完全不同,它是一个逻辑严密的庞大体系,仅从 10 条公理出发,就推导出 487 个命题,采用的是与归纳法相反的演绎推理法.归纳法是由特殊现象归纳出一般规律的思维方法,而演绎法则正好相反,它从已有的一般结论推导出特殊命题.例如,假定有“一个运用数学的学科是成熟的学科”这样一个公认正确的一般结论,即所谓的大前提“物理学运用了数学”这是一个特殊的命题,即所谓的小前提;由以上两点可以得出结论“物理学是成熟的学科”.这就是常说的“三段论”逻辑.演绎法就运用了这样的逻辑,其主要特征是在前提正确的情况下,结论一定正确.意识到逻辑推理的作用是古希腊文明对人类的一项巨大贡献.

在希腊被罗马帝国统治之后,希腊的数学研究中断了将近 2000 年.在与罗马的历史平行的 1100 年间,希腊没有出现过一位数学家.他们夸耀自己讲究实际,兴建过许多庞大的工程.但是过于务实的文化不能产生深刻的数学.在那之后统治欧洲的基督教提倡为心灵做好准备,以便死后去天国,对于现实的物理世界缺乏兴趣.这一时期,数学在中国、印度和阿拉伯地区继续发展,也有许多重要的创新.但是这些古代文明不像希腊文明那样追求绝

^① A.N.怀特海(Whitehead,1861—1947),英国数学家.

对可靠的真理,因此没有形成大规模的理论结构体系.例如,著名的祖冲之提出的圆周密率领先欧洲 1000 多年,但是他没有给出推导密率的理论依据,

被罗马帝国和基督教逐出的希腊文明,在 1000 多年后重返欧洲.当时,教会仍然主宰一切,真理只存在于圣经之中.饱受压抑而善于思索的学者们看清了希腊文明远比教会高明,于是他们立即接受了这份遗产,特别是“世界是按数学设计”的信念.哥白尼经过多年的观察和计算,创立了日心说,认定太阳才是宇宙的中心,而不是地球.日心说不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识,而且动摇了宗教的基本教义:上帝把最珍贵的造物——人类安置在宇宙的中心——地球.日心说是近代科学的开端,而科学正是现代社会的标志.科学使处于低水平的西欧文明迅速崛起,短短两三百年后领先于全世界.

在这之后,科学发展具有决定性意义的一步是由伽利略(G. Galileo)迈出、由牛顿完成的,这就是科学的数学化.伽利略认为,基本原理必须源于经验和实验,而不是智慧的大脑.这是革命性的关键的一步,它开辟了近代实验科学的新纪元.人脑可以提供假设,但假设和猜想必须通过检验,哥白尼的日心说如此,牛顿的万有引力如此,爱因斯坦的相对论也是如此.为了使科学理论得以反复验证,伽利略认为科学必须数学化,他要求人们不要用定性的模糊的命题来解释现象,而要追求定量的数学描述,因为数量是可以反复验证和精确测定的.追求数学描述而不顾物理原因是现代科学的特征.

17 世纪 60 年代,牛顿用这种新的方法论取得了辉煌的成功,以至于几乎所有科学家都立即接受了这种方法,并取得了丰硕的成果,这种方法称为西欧工业革命的科学基础.牛顿决心找出宇宙的一般法则,他提出著名的力学三定律和万有引力假设.然后用他发明的微积分方法,经过复杂的计算和演绎,既导出了地球上物体的运动规律,也导出了太空中物体的运动规律,统一了宇宙中的各种运动,而这些都是由数学推导完成的,从而引起了巨大的轰动.17 世纪的伟大学者们发现了一个量化了的世界,这就是繁荣至今的科学数学化的开始.

牛顿广泛的研究方向,以及他和莱布尼茨(G. W. Leibniz)共同创造的微积分,成为从那以后的 100 多年间科学家研究的课题.由于追求量化的结论,当时的科学家都是数学家,而伟大的数学家也毫无例外地都是科学家.科学家寻求一个量化的世界的努力一直延续至今,他们的主要目标不再是解释自然,而是为了作出预测,以便实现各种理想和愿望.在这个过程中,以几何为基础的数学,重心转移到了代数、微积分及其各种数量关系的后续分支上.

代数成为一门学科可以认为开始于韦达(F. Viète)的研究,在此之前,代数是文字表示的一些应用问题,只不过是一些实用的方法和计算的“艺术”,没有自己的理论.韦达的功绩是用一整套符号表示代数中的已知量、未知量和运算.这使得代数问题可以抽象归结为符号算式,这样就脱离了它的具体背景,然后根据一整套规定的法则作恒等变形,直至求出答案,后来,笛卡儿(R. Descartes)用坐标方法,把点表示为坐标,把曲线表示为方程,

实现了几何对象的代数化.传统的几何问题都可以量化为代数方程来求解.

代数方法是机械的,思路明确简单,不像几何问题那样需要机智巧妙的处理.那个时期,笛卡儿实际上已经洞察到了代数将使数学机械化,使得数学创造变成一项几乎自动化的工作.等到牛顿,尤其是莱布尼茨把微积分也像代数一样形式化,并解决了大量科学问题之后,符号化的定量数学终于取代了几何学,成了数学的基础.20 世纪中叶计算机出现以后,数学机械化的思想得以广泛应用于解决各个领域的实际问题,而借助计算机工具,数学也越来越深入到社会生活的各个领域,

二、数学的研究对象及其特点

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学.

中国科学院院士姜伯驹说“数学科学研究的对象可以取自任何领域,它的着眼点不是各领域素材的内容,而是它的数量和形式的各种表现形式;它能够把一个领域的思想,最新的进步,经过抽象的过程提炼出来,再把这些思想转移到完全不相干的领域里面去.很多学科的成就大小,取决于它们与数学结合的程度.”

著名数学大师希尔伯特(D. Hilbert)说“数学是调节理论和实践、思想和经验之间的差异的工具.它建立起了一座连通双方的桥梁,并在不断地加固它.事实上,全部现代文明中有关理论认识和征服自然的部分都有赖于数学.”

A.D.亚历山大洛夫说“甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地觉察到数学的这些特点:第一是它的抽象性,第二是精确性,或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性,最后是它的应用的极端广泛性.”

中国科学院院士王梓坤说“数学的特点是:内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性.”

1. 高度的抽象性

数学的抽象性表现在哪里呢?那就是暂时撇开事物的具体内容,仅抽取事物或现象的量的关系和空间形式去进行研究.数学中的许多概念都是从现实世界抽象出来的,比如几何学中的“直线”这一概念,并不是指现实世界中的拉紧的线,而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了,只留下了“向两方无限伸长”这一属性,但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的.几何图形的概念、函数概念都是比较抽象的.但是抽象并不是数学独有的属性,它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性.只是数学的抽象性有它不同于其他学科抽象的特征罢了.

2. 逻辑的严密性

任何一门科学,必须要正确并且精确地反映所研究的客观事实,既不能漏洞百出又不能自相矛盾.数学中的每一个定理,不论验证了多少实例,只有当它从逻辑上被严格地证明了的时候,才能在数学中成立.在数学中要证明一个定理,必须是从条件和已有的数学公式

出发,用严谨的逻辑推理方法导出结论.

爱因斯坦(Einstein)曾对数学逻辑的严密性有如下的论述“为什么数学比其他一些科学受到特殊的尊重,一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而且不像其他科学的命题经常处于会被新发现的事实推翻的危险境地之中……数学之所以有高声誉,还有另一个理由,那就是数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性,没有数学,这些科学是达不到这样的可靠性的.”

3.应用的广泛性

数学从它产生那日起,就成为人类征服自然的有力武器被广泛应用,而数学应用的广泛性正是由数学自身的高度抽象性和逻辑的严密性所决定的.

历史上物理学、天文学、力学的许多重大发现无不与数学的进步息息相关,如:牛顿力学、爱因斯坦的相对论、电磁波和光的本质的发现、海王星和冥王星的发现、量子力学的诞生等等.20世纪最伟大的技术成就——电子计算机的发明和应用都是以数学为基础的.而现代的许多所谓高科技本质上就是“数学技术”,如:医学上的CT技术、指纹的存储和识别、飞行器的模拟设计、石油地震勘探的数据处理分析、信息安全技术、保险精算、金融风险分析和预测等等.当今的数学不再只是通过其他学科间接地应用于各技术领域,而是广泛地直接地应用于各技术领域中.现代数学是自然科学的基本语言,是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段,更是现代技术与工程必不可少的工具.恩格斯早就预言:“任何一门科学的真正完善在于数学工具的广泛应用.”

因此,华罗庚说“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.”

三、高等数学与初等数学的区别

高等数学与初等数学不同的是初等数学是研究常量的数学,而高等数学则是研究变量的数学.

初等数学到高等数学,观念与思维方式的转变,主要体现在极限概念,极限概念学习是难点.好在我们中学时已接触到了极限,我们不期望短时间内完善对极限的认识,但要求逐步地加深认识,及时总结体会,最终把握极限的实质,

极限概念揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系.从极限的观点来看,无穷小量不过是极限为零的变量.这就是说,在变化过程中,它的值可以是“非零”,但它变化的趋向是“零”,可以无限地接近于“零”.

学习微积分学当然应该有初等数学的基础,而学习任何一门近代数学或者工程技术都必须先学微积分.英国科学家牛顿和德国科学家莱布尼茨在总结前人工作的基础上各自独立地创立了微积分,与其说是数学史上,不如说是科学史上的一件大事.恩格斯指出“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分学的发明那样被看作人类精神的

最高胜利了。”他还说“只有微积分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程、运动。”

四、学习数学的目的和意义

随着科学技术的发展,人们越来越深刻地认识到:没有数学,就像鸟儿没有翅膀,不能在科学的蓝天自由翱翔;就像盲人没有拐杖,在科学的迷宫举步维艰.没有它,就难于创造出当代的科学成就,科学技术发展越快越高,对数学的需求就越多.数学是自然科学的基本语言,是应用模式探索客观世界运动机理的主要手段.对于非数学专业的学生而言,大学数学的教育,其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已,而是人的理性思维品格和思辨能力的培养,是聪明智慧的启迪,是潜在的能动性创造性的开发,其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

数学与其他学科之间的交叉、渗透与相互作用,既使得数学领域在深度和广度上进一步扩大,又促进众多新兴的交叉学科与边缘学科的蓬勃发展,如金融数学、生物数学、控制数学、定量社会学、数理语言学、计量史学、军事运筹学,等等.这种交融大大促进了各相关学科的发展,使得数学的应用无处不在.20 世纪下半叶,数学与计算机技术的结合产生了数学技术,数学技术的迅速兴起,使得数学对社会进步所起的作用从幕后走向台前.计算机的迅速发展和普及,不仅为数学提供了强大的技术手段,也极大地改变了数学的研究方法和思维模式.所谓数学技术,就是数学的思想方法与当代计算机技术相结合而成的一种高级的、可实现的技术.数学的思想方法是数学技术的灵魂,数学技术对于人类社会的现代化起着极大的推动作用.正是在这个意义上,联合国教科文组织把 21 世纪的第一年定为“世界数学年”,并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”.

联合国教科文组织在一份调查报告中强调指出:“目前科学研究工作的特点之一是各门学科的数学化.”凡讲求高精度、高速度、高效率、高自动、高安全、高质量的东西,只有通过数学模型来设计,用数学方法借助计算机的计算、控制,才能得以实现这些高性能.正如马克思所说“一门科学只有当它达到了能够成功应用数学时,才算真正发展了.”

数学是一种语言,一切科学的共同语言;数学是一把钥匙,一把打开科学大门的钥匙;数学是一种工具,一种思维的工具;数学是一门艺术,一门理性的艺术.

五、感 悟

古往今来对数学做了开创性工作的大数学家,其创造动机都不是追求物质,而是追求一种理想,或是为了揭开自然的奥秘,或是出于某种哲学信念,数学是一种理想,为理想而奋斗才有力量,数学是人类智慧的杰出结晶,是人脑最富创造性的产物.与文学、艺术、音乐等创造有共同之处的是,指引数学创造的是数学家的一种审美直觉.数学是介于自然科学与人文科学之间的一种特殊学科,是影响人类文明全局的一种文化现象.每一个时代的总

的特征与这个时代的数学活动密切相关.著名的数学史家克莱因(M.Klein) 曾以抒情的笔调写道 “音乐能激起或平静人的心灵,绘画能愉悦人的视觉,诗歌能激发人的感情,哲学能使思想得到满足,工程技术能改善人的物质生活,而数学则能做到所有这一切.”

第一章 函数、极限与连续

函数是客观世界中量与量之间依赖关系的一种数学抽象,是高等数学的主要研究对象,极限是研究高等数学问题的基本工具,连续是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限与连续的基本概念,以及它们的一些重要性质.

第一节 函 数

一、区间与邻域的概念

1. 区间

设 a, b 为两个实数,且 $a < b$, 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间,记为 (a, b) , 见图 1-1, 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

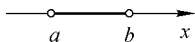


图 1-1

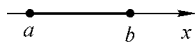


图 1-2

同理, 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 数集 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 及 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半开区间, 分别记为 $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, 见图 1-2、图 1-3 及图 1-4. 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

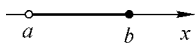


图 1-3

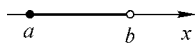


图 1-4

以上几类区间为有限区间. 有限区间右端点 b 与左端 a 的差 $b - a$, 称为区间的长. 还有以下三类无限区间:

$$(1) (a, +\infty) = \{x \mid a < x\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}.$$

$$(2) (-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}.$$