管理数学

下　册

（干部专修科教材）

中央农业管理干部学院华中农学院分院

一九八五年二月

目 录

第三编　概率论与数理统计

概率论是以随机事件及其规律性为研究对象的一个数学分支。数理统计是以概率论为理论根据、以统计资料的收集、整理、分析和推断为主要内容的另一个数学分支。随着科学技术、工农业生产及经济管理工作的不断发展，这两个数学分支也有了十分丰富的内容和十分广泛的应用。

为学习顺利起见，我们先学习排列、组合以及集合的概念和有关的计算，并将这些知识编为一章，统称为学习概率论与数理统计的预备知识。但是，这些知识的应用，并不限于概率论与数理统计。

第一章　预备知识

第一节　排列与组合

1　排列

例如 ON 与 NO 的意义不同，上海与海上的意义不同，123 与 231 的意义不同，它们各自的意义分别与英文字母、汉字、阿拉伯数字排列的次序有关。称 ON 与 NO 是英文字母 O、N 排成一列所得的两种不同形式的排列，称上海与海上是汉字上、海排成一列所得的两种不同形式的排列，称 123 与 231 是阿拉伯数字 1、2、3 排成一列所得的两种不同形式的排列，并且称上述英文字母、汉字、阿拉伯数字为上述各种排列的元素。

一般而言，n 个不同的元素，按照一定的次序排成一列，叫做 n 个不同元素的全排列，简称为全排列。

从 n 个不同的元素中选出 m 个元素，按照一定的次序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中选 m 个元素的选排列，简称为选

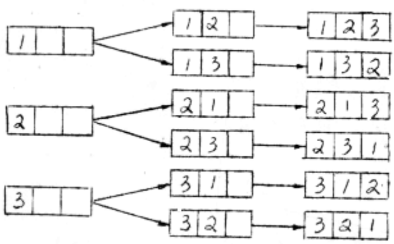
排列.

全排列与选排列一起，统称为排列.

但是，可以按照一定的次序排成一列的元素并不限于英文字母、汉字、和阿拉伯数字，人、物和事也都可以按照一定的次序排成一列，也都可以抽象地称之为排列的元素.

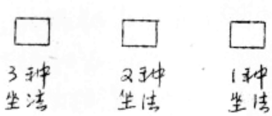
在实际工作中，常常要计算n个不同元素可以排成的各种全排列的种数（以符号P_n表示）以及从n个不同的元素中选m个元素可以排列的各种选排列的种数（以符号A_n^m表示），下面学习种数P_n及A_n^m的计算公式.

例2　三个元素1、2、3可以排成的各种全排列可以按以下方法得出：



因此，$P_3=3\times2\times1=6$.

也可以将上述三元素的各种全排列看作是三个人坐三个位子所得的各种不同的坐法，如下图所示：



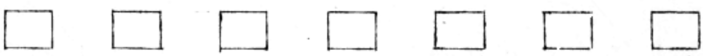
坐第一个位子的方法有3种，坐第二个位子的方法有2种，坐第三个位子的方法只有1种，因此，三个人坐三个位子所得的各种不同的坐法共有$P_3=3\times2\times1=6$种.

例3. 四个元素A、B、C、D可以排成的各种全排列也可以按以上方法得出，也可以看作是四个人坐四个位子所得的各种不同的坐法．如下图所示．

4种坐法　3种坐法　2种坐法　1种坐法

坐第一个位子的方法有4种，坐第二个位子的方法有3种，坐第三个位子的方法有2种，坐第四个位子的方法只有1种．因此，四个人坐四个位子所得的各种不同的坐法共有 $P_4 = 4\times3\times2\times1 = 24$ 种．

一般而言，n 个不同的元素可以排成的各种全排列，可以看作是 n 个人坐 n 个位子所得的各种不同的坐法．如下图所示，



n 种坐法　$n-1$ 种坐法　$n-2$ 种坐法　…　3种坐法　2种坐法　1种坐法

坐第1个位子的方法有 n 种，坐第二个位子的方法有 $n-1$ 种，坐第三个位子的方法有 $n-2$ 种，…，坐倒数第三个位子的方法有3种，坐倒数第二个位子的方法有2种，坐倒数第一个位子（也就是最后一个位子）的方法只有1种，因此 n 个人坐 n 个位子所得的各种不同的坐法共有 $P_n = n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1 = n!$ 种．

符号 $n!$ 表示自然数1到 n 的连乘积；读作 n 的阶乘，用 CASIO $fx-3600P$ 计算器可以一次算出．

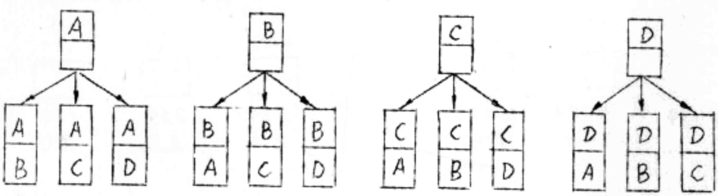
例4　三个小麦品种种在三块试验地上，共有 $P_3 = 3! = 6$ 种不同的种法，即

品种 \ 土地	种法					
	一	二	三	四	五	六
Ⅰ	1	1	2	2	3	3
Ⅱ	2	3	1	3	1	2
Ⅲ	3	2	3	1	2	1

例5　六个小麦品种种在六块试验地上，共有 $P_6=6!=720$ 种不同的种法．

例6　一部故事片在四个单位轮流放映，每单位放映一场，共有 $P_4=4!=24$ 种不同的轮映次序．

例7　从四个元素A、B、C、D中选两个元素可以排成的各种选排列可以按以下方法得出



因此，$A_4^2=4\times3=12$．

也可以将上述从四个元素中选两个元素的各种选排列看作是四个人坐两个位子所得的各种不同的坐法．如下图所示，

坐第一个位子的方法有4种，坐第二个位子的方法有3种，因此，四个人坐两个位子所得的各种不同的坐法共有 $A_4^2=4\times3=12$ 种．

一般而言，从n个不同的元素中选m个元素可以排成的各种选排列，可以看作是n个人坐m个位子所得的各种不同的坐法。如下图所示，

n 种坐法	$n-1$ 种坐法	$n-2$ 种坐法	…	$n-m+2$ 种坐法	$n-m+1$ 种坐法

坐第一个位子的方法有n种，坐第二个位子的方法有$n-1$种，坐第三个位子的方法有$n-2$种，…，坐倒数第二个位子的方法有$n-(m-2)=n-m+2$种，坐倒数第一个位子（也就是最后一个位子）的方法有$n-(m-1)=n-m+1$种，因此，n个人坐m个位子所得的各种不同的坐法共有 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)(n-m+1)$ 种。

例8　从三块试验地中选两块地进行小麦和油菜新品种试验，三块地分别记为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ时，可供选择的方案有 $A_3^2=3\times2=6$ 种，即

试验地 \ 作物	可供选择的方案					
	一	二	三	四	五	六
小麦	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅲ
油菜	Ⅱ	Ⅰ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅲ	Ⅱ

例9　从10个候选同志中选举一正一副两个组长，共有 $A_{10}^2=10\times9=90$ 种不同的选法。

小结　综上所述，全排列的种数

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1=n!$$

选排列的种数

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)(n-m+1)$$

$$\text{或}\quad A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}$$

可根据后面的公式，用计算器计算A_n^m.

2 组合

例10 从甲乙丙丁四人中任选三人照相，问共有多少种不同的照法？从甲乙丙丁四人中任选三人看电影，留一人在家值班，问共有多少种不同的选法？

解：任选三个人照相，照的方法与三个人的排列次序有关，是选排列问题，共有$A_4^3 = 4\times3\times2 = 24$种不同的照法.

任选三个人看电影，选的方法与三个人的排列次序无关，只须选出三个人，不论次序合成一组，便是一种选法.

这样的问题，叫做是从4个元素中选3个元素的组合.

一般而言，从n个不同的元素中选出m个元素，不论次序合成一组，叫做从n个不同的元素中选m个元素的组合，简称为组合.

在实际工作中，也常常要计算从n个不同的元素中选m个元素所得到的各种组合的种数（以符号C_n^m表示），下面学习种数C_n^m的计算公式.

为此，先将上述看电影问题的各种选法与照相问题的各种选法作一比较.

看电影(组合)问题	照相(排列)问题		
甲乙丙	甲乙丙	乙甲丙	丙甲乙
	甲丙丁	乙丙甲	丙乙甲
甲乙丁	甲乙丁	乙甲丁	丁甲乙
	甲丁乙	乙丁甲	丁乙甲
甲丙丁	甲丙丁	丙甲丁	丁甲丙
	甲丁丙	丙丁甲	丁丙甲
乙丙丁	乙丙丁	丙乙丁	丁乙丙
	乙丁丙	丙丁乙	丁丙乙

由此看出，从四个元素中选三个元素的任一组合，若论及次序，便可排成$P_3=3!=6$种不同的三个元素的全排列．现在，不同组合的种数为$C_4^3=4$，若论及次序便可排成$C_4^3\cdot P_3=24$种不同的由四个元素中选三个元素的选排列，而$A_4^3=4\times3\times2=24$，故

$$C_4^3\cdot P_3=A_4^3,\quad C_4^3=\frac{A_4^3}{P_3}=\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}=4.$$

一般而言，$C_n^m\cdot P_m=A_n^m$，可以看作是分两步来进行选排列：

第一步：从n个不同的元素中选m个元素，不论次序合成一组，得到C_n^m种不同的组合；

第二步，将每一组中的m个元素按照一定的次序排成一列排成A_n^m种不同的选排列．

故　$C_n^m\cdot P_m=A_n^m$.

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

可根据后面的公式，用计算器计算 C_n^m。

例11　从20粒种子中任选5粒种子，共有 $C_{20}^5 = \frac{20!}{5!15!}$

$= 15504$ 种不同的选法。

例12　从五块地中选三块地种小麦新品种，问共有多少种不同的选法？从五块地中选三块地种小麦新品种Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ号，问共有多少种不同的选法？

解：前一问题是组合问题，

共有　$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ 种不同的选法；

后一问题是排列问题，共有 $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ 种不同的选法。

习　题　1－1

1. 把五本不同的书放在书架上，共有几种不同的放法？

2. 从8块试验地中选四块地种小麦新品种Ⅰ至Ⅳ号，问共有多少种不同的种法？

3. 有五本不同的书，准备给3名同学，每人一本，问共有多少种不同的给法？

4. 一个火车站有7股岔道，停放4列不同的火车，每股岔道只停放一列，问共有多少种不同的停放方法？

5. 某校举行排球单循环赛，有8个队参加，问一共需要举行多少场比赛？

6. 从3、5、7、11这四个质数中任取两个数相乘，问可以得到多少个不相等的乘积？

7. 由A城到B城有9个中途站，问这条线路上一共需要多少种不同的车票？如果不同的两站间的票价都不相同，问一共有多少种不同的票价？

8. 从100件产品中任抽4件进行检查，问有多少种不同的抽取方法？

第二节 加法原理与乘法原理

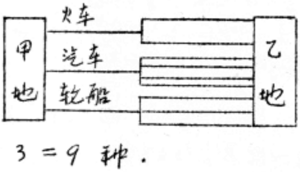
在概率论中所研究的排列与组合问题，用公式立即可以算出的比较少，需要进行分析和思考的比较多。而加法原理与乘法原理，将是我们进行分析和思考的主要根据。

下面介绍加法原理与乘法原理，并举例说明它们的应用。

1 加法原理

做一件事，完成它的方法可以分为若干类，第一类中有m个方法，第二类中有n个方法，…，最后一类中有r个方法。那么，完成这件事的方法一共有$m+n+\cdots+r$种。

例如1. 由甲地至乙地可以乘火车，也可以乘汽车或轮船。一天中，火车有两班，汽车有4班，轮船有3班。那么，从甲地到乙地的方法如下图所示：



共有 $2+4+3=9$ 种。

例2. 用红、黄、篮三面旗子从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以任意挂一面、两面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号. 那么，挂旗法一共可以表示 $A_3^1+A_3^2+P_3=15$ 种不同的信号.

例3. 用一定数量的红、黄、篮三种颜料来调色，可以得到的颜色有这三种单色，这三种单色中任选两种所成的混合色以及这三种单色所成的混合色，一共有 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种.

例4 用0到9这十个数字，可以组成多少个没有重复的数字的三位数? 为解此问题，可将符合上述要求的三位数分为三类：第一类是每一位数字都不为0的三位数，第二类是个位数字为0的三位数，第三类是十位数字为0的三位数. 因此，符合要求的三位数共有 $A_9^3+A_9^2+A_9^2=648$ 个。

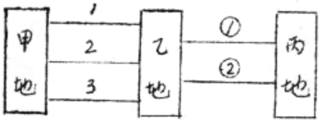
例5. 有13个队参加篮球赛，比赛时先分成两组，第一组7个队，第二组6个队. 各组都进行单循环赛(即每一个队都要与本组其他各队比赛一场)，然后由各组的前两名共4个队进行单循环赛决定冠军和亚军. 问一共需要比赛多少场?

解：根据题意，第一组7个队进行单循环赛，需要比赛 C_7^2 场；第二组6个队进行单循环赛，需要比赛 C_6^2 场；各组的前两名共4个队再进行单循环赛，又需要比赛 C_4^2 场. 因此，一共需要比赛 $C_7^2+C_6^2+C_4^2=42$ 场，才能决定冠军与亚军.

2 乘法原理

做一件事，完成它的步骤有若干个，做第一步有 m 种方法，做第二步有 n 种方法，…，做最后一步有 r 种方法，那么，完成这件事的方法一共有 $m \cdot n \cdot \cdots \cdot r$ 种.

例6 由甲地到乙地有三种走法，由乙地到丙地有两种走法，那么，由甲地经乙地到丙地的走法如下图所示：



共有 $3\times 2=6$ 种.

例7　在读书活动中，有政治书籍5本，科技书籍8本，文艺书籍10本供选读．如果每一类选2本，那么，不同的选法一共有 $C_5^2\cdot C_8^2\cdot C_{10}^2=12600$ 种.

例8　用1到9这九个数字，可以组成多少个末尾两数都是偶数的四位数？为解此问题，可将这样的四位数看做是分两步骤而得到的：第一步，先在2、4、6、8中任取两个数字作为四位数的个位和十位数字；第二步，在剩下的七个数字中任取两个数字作为四位数的百位和千位数字．因此，符合要求的四位数共有 $A_4^2\cdot A_7^2=504$ 个.

例9　从100件产品中任意抽出3件进行检查.

(1) 如果100件产品中有2件次品，问抽出的3件中恰好有一件是次品的抽法有多少种？

(2) 如果100件产品中有2件次品，问抽出的3件中至少有一件是次品的抽法有多少种？

解：(1) 从2件次品中抽出1件次品的抽法有 C_2^1 种，从98件正品中抽出2件正品的抽法有 C_{98}^2 种．因此，抽出的3件中恰好有一件是次品的抽法共有 $C_2^1\cdot C_{98}^2=9506$ 种.

(2) 从100件产品中抽出的3件至少有一件是次品的抽法，包括1件是次品的和2件是次品的．其中，1件是次品的抽法有 $C_2^1\cdot C_{98}^2$ 种，2件是次品的抽法有 $C_2^2\cdot C_{98}^1$ 种．因此，至少有1件是次品的抽法共有 $C_2^1\cdot C_{98}^2+C_2^2\cdot C_{98}^1=9604$ 种.

作为乘法原理的应用，下面介绍可重复的排列及分组组合，学习两者的种数公式.

3　可重复的排列

例10　从五个数字1、2、3、4、5中任选三个，所能够组成的无重复数字的三位数，一共有 $A_5^3=60$ 种，有重复或者说可以重复时，百位、十位、个位上分别有5种可能性。根据乘法原理，从上述五个数字中任选三个，所能够组成的有重复数字的三位数，一共有 $5\times5\times5=5^3=125$ 种，即

111	112	113	114	115	211	212	$\underline{213}$	$\underline{214}$	$\underline{215}$
121	122	$\underline{123}$	$\underline{124}$	$\underline{125}$	221	222	223	224	225
131	$\underline{132}$	133	$\underline{134}$	$\underline{135}$	$\underline{231}$	232	233	$\underline{234}$	$\underline{235}$
141	$\underline{142}$	$\underline{143}$	144	$\underline{145}$	$\underline{241}$	242	$\underline{243}$	244	$\underline{245}$
151	$\underline{152}$	$\underline{153}$	$\underline{154}$	155	$\underline{251}$	252	$\underline{253}$	$\underline{254}$	255
311	$\underline{312}$	313	$\underline{314}$	$\underline{315}$	411	$\underline{412}$	$\underline{413}$	414	$\underline{415}$
$\underline{321}$	322	323	$\underline{324}$	$\underline{325}$	$\underline{421}$	422	$\underline{423}$	424	$\underline{425}$
331	332	333	334	335	$\underline{431}$	$\underline{432}$	433	$\underline{434}$	$\underline{435}$
$\underline{341}$	$\underline{342}$	343	344	$\underline{345}$	441	442	443	444	445
$\underline{351}$	$\underline{352}$	353	$\underline{354}$	355	$\underline{451}$	$\underline{452}$	$\underline{453}$	454	455
511	$\underline{512}$	$\underline{513}$	$\underline{514}$	515					
$\underline{521}$	522	$\underline{523}$	$\underline{524}$	525					
$\underline{531}$	$\underline{532}$	533	$\underline{534}$	535					
$\underline{541}$	$\underline{542}$	$\underline{543}$	544	545					
551	552	553	554	555					

其中，用横线标出的三位数是从五个数字中任选三个，所能够组成的无重复数字的三位数。

一般而言，从n类不同的元素中选出m个元素，按照一定的次序排成一列，如果所选出的元素可以重复，便叫做从n类不同的元素中选m个元素的可以重复的排列，简称为可重复的排列。

根据乘法原理，它的种数 $\tilde{A}_n^m = n^m$.

例11 一年中有365天，每一个人都可能在一年的任一天过生日．问一个三口人之家的父亲、母亲和女儿在一年中过生日的时间顺序一共有多少种？

解：这是在365天中任选3天的可以重复的排列，所求的时间顺序一共有 $365^3 = 48627125$ 种．

例12 由1、2、3、4、5这五个数字中，任选若干个数字，能组成多少个数字有重复而又不大于55555的自然数？

解：根据题意，所求的自然数可以是由1、2、3、4、5这五个数字在可重复的情况下所组成的一位数、二位数、三位数、四位数和五位数，一共有 $5+5^2+5^3+5^4+5^5=3905$ 个．

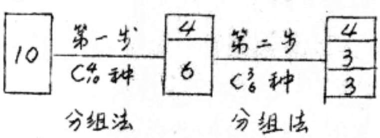
4 分组组合

例如，把10个小麦品种分成三组，一组四个品种，另两组各三个品种，便是分组组合．它可以按以下两步骤得出：

第一步，将10个小麦品种分成两组，一组有四个品种，另一组有六个品种，相当于10个品种中选4个品种的组合．种数为 C_{10}^4；

第二步，将6个小麦品种又分成两组，一组有三个品种，另一组也有三个品种，相当于6个品种中选3个品种的组合．种数为 C_6^3．

即



若将上述分组组合的种数记为 $C_{10}^{4,3,3}$，则根据乘法原理，

$$C_{10}^{4,3,3} = C_{10}^4 \cdot C_6^3 = \frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = 4200.$$

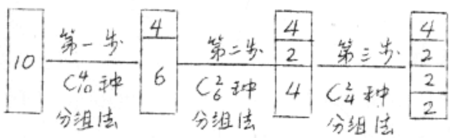
又如，把10个小麦品种分成四组，一组四个品种，另三组各两个品种，也是分组组合。它可以按以下三步骤得出：

第一步，将10个小麦品种分成两组，一组有四个品种，另一组有六个品种，相当于10个品种中选4个品种的组合，种数为C_{10}^{4}；

第二步，将6个小麦品种又分成两组，一组有两个品种，另一组有两个品种，相当于6个品种中选2个品种的组合，种数为C_6^2；

第三步，将4个小麦品种再分成两组，一组有两个品种，另一组也有两个品种，相当于4个品种中选2个品种的组合，种数为C_4^2.

即



若将上述分组组合的种数记为$C_{10}^{4,2,2,2}$，则根据乘法原理，

$$C_{10}^{4,2,2,2}=C_{10}^{4}\cdot C_6^2\cdot C_4^2=\frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}$$

$$=\frac{10!}{4!2!2!2!}=18900.$$

一般而言，把n个不同的元素分成k组，第一组有m_1个元素，第二组有m_2个元素，…，第k组有m_k个元素，且$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$时，这样分组的结果叫做分组组合。

根据乘法原理，分组组合的种数

$$C_n^{m_1,m_2,\cdots,m_k}=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$$