《中国工程物理研究院科技丛书》第027号

无穷维动力系统

（上册）

郭柏灵　著

国防工业出版社

《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

无穷维动力系统

（上册）

郭柏灵　著

国防工业出版社

·北京·

《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

无穷维动力系统

（下册）

郭柏灵 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

无穷维动力系统/郭柏灵著. —北京:国防工业出版社,2000.1

(中国工程物理研究院科技丛书)

ISBN 7-118-02105-9

Ⅰ.无… Ⅱ.郭… Ⅲ.核武器-动力系统-计算 Ⅳ.TJ91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14307 号

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 30⅛ 806 千字

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1-1000 册 定价:48.00 元

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院30年来，坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务，在许多专业学科领域里，不论在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累了丰富的知识和经验，造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院30年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果，内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给30年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989年1月25日

《中国工程物理研究院科技丛书》
第三届编审委员会

《中国工程物理研究院科技丛书》

已 出 版 书 目

001 高能炸药及相关物性能
董海山、周芬芬主编 科学出版社 1989年11月
002 光学高速摄影测试技术
谭显祥编著 科学出版社 1990年02月
003 凝聚炸药起爆动力学
章冠人等编著 国防工业出版社 1991年09月
004 线性代数方程组的迭代解法
胡家赣编著 科学出版社 1991年12月
005 映象与混沌
陈式刚编著 国防工业出版社 1992年06月
006 再入遥测技术(上册)
谢铭勋编著 国防工业出版社 1992年06月
007 再入遥测技术(下册)
谢铭勋编著 国防工业出版社 1992年12月
008 高温辐射物理与量子辐射理论
李世昌编著 国防工业出版社 1992年10月
009 粘性消去法和差分格式粘性
郭柏灵著 科学出版社 1993年03月
010 无损检测技术及其应用
张俊哲等著 科学出版社 1993年05月
011 半导体材料辐射效应
曹建中著 科学出版社 1993年05月
012 炸药热分析
楚士晋编著 科学出版社 1994年12月
013 脉冲辐射场诊断技术

刘庆兆主编　　科学出版社　　1994年12月

014　放射性核素活度的测量方法和技术

·古当长编著　　科学出版社　　1994年12月

015　二维非定常流和激波

王继海编著　　科学出版社　　1994年12月

016　抛物型方程差分方法引论

李德元　陈光南著　　科学出版社　　1995年12月

017　特种结构分析

刘新民　韦日演主编　　国防工业出版社　　1995年12月

018　理论爆轰物理

孙锦山　朱建士著　　国防工业出版社　　1995年12月

019　可靠性维修性可用性评估手册

潘吉安编著　　国防工业出版社　　1995年12月

020　脉冲辐射场测量数据处理与误差分析

陈元金编著　　国防工业出版社　　1997年01月

021　近代成象技术与图象处理

吴世法著　　国防工业出版社　　1997年03月

022　一维流体力学差分方法

水鸿寿著　　国防工业出版社　　1998年02月

023　抗辐射电子学

-辐射效应及加固原理

赖祖武等著　　国防工业出版社　　1998年07月

024　金属的环境氢脆及其试验技术

周德惠　谭云编著　　国防工业出版社　　1998年12月

025　实验核物理测量中的粒子分辨

段绍节编著　　国防工业出版社　　1999年06月

026　实验物态方程导引(第二版)

经福谦著　　科学出版社　　1999年09月

027　无穷维动力系统

郭柏灵著　　国防工业出版社　　2000年01月

前　言

1993年，作者在"非线性演化方程"一书第五章中曾对无穷维动力系统的基本概念、研究方法和研究概况作了一个简要的介绍。由于篇幅所限，未能对这些内容作进一步深入的讨论，再加上最近五年来又有不少新的重要结果不断出现，这就促使作者下了一个决心：写一本有关无穷维动力系统的专门著作。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上，用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅，来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果，其中包括作者本人以及他的合作者所得到的一些结果。第一章，吸引子以及维数估计，主要介绍近代物理中提出的某些具耗散的非线性发展方程整体吸引子的存在性及其 Hausdorff 维数、fractal 维数的估计，其中包括有界域和无界域的、空间一维和高维的。第二章，惯性流形，主要介绍对于很广泛的抽象微分方程在很一般的情况下给出了精确的谱间隙条件，证明了惯性流形的存在性，同时还讨论了惯性流形的光滑性、正规双曲性等。第三章，近似惯性流形，主要介绍各种近似惯性流形的构造和数值逼近，以及近似惯性流形的收敛性，并从而导致了惯性流形存在性的另一种构造性证明。第四章，离散吸引子及近似计算，主要介绍各种离散形式吸引子的存在性，它们和有限维动力系统紧密联系起来，用数值计算结果显示了整体吸引子、近似惯性流形的具体图象。第五章，整体吸引子的某些性质，主要介绍了整体吸引子的振荡性质，它的渐近行为可由少数几个点决定的性质以及它和双曲不动点的不稳定流形的紧密联系，用几何测度论的方法和结果估计了整体吸引子水平集 Hausdorff 测度的上界，同时，还给出了一种方法，估计

了吸引子维数的下界。第六章，具小耗散系统的结构，主要介绍了用几何摄动理论、无限维中心流形理论以及多维 Melnikov 函数研究在小扰动下稳定、不稳定流形的不变性以及出现混沌的状况，其中稳定流形、不稳定流形的性质还和纤维丛上的第一陈数密切相关。第七章，孤立波的存在性和稳定性，主要介绍用集中紧致原理证明多维孤立波的存在性以及用某种能量泛函方法和谱分析方法研究孤立波的非线性稳定性、不稳定性和渐近稳定性。

由于无穷维动力系统的研究内容十分丰富和非常广泛，它和许多学科如流体力学、分形理论、泛函分析、拓扑学、几何测度论、计算数学等紧密相连，各种研究方法和结果不断涌现，限于作者现有的水平和能力，本书难免存在许多不妥、不够全面甚至错误，敬请读者给予批评和指正。

这里我要衷心感谢鲁百年、蒋慕蓉、李用声、苗晨霞、高洪俊、林国广、邢家省、元荣等，他们热情地帮助作者校对、修改、打印全书的书稿，为此他们付出了许多艰辛的劳动，使作者深受感动。

最后，作者衷心感谢周毓麟院士对本书的关心和帮助；衷心感谢孙和生、井竹君、常谦顺、水鸿寿教授，他们审阅本书的内容，并提出了许多宝贵的意见。

郭柏灵

1998 年春节于北京

内 容 简 介

本书是有关无穷维动力系统数学理论方面的专著。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上，用比较简单明了，深入浅出的方法和尽量少的篇幅，来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果，其中包括作者本人以及其他的写作者所得到的一些结果。

全书共分七章：第一章吸引子及维数估计，第二章惯性流形，第三章近似惯性流形，第四章离散吸引子及近似计算，第五章整体吸引子的某些性质，第六章具小耗散系统的结构，第七章孤立波的存在性和稳定性。

本书可供应用数学专业的高年级本科生和研究生作参考书，也可供从事非线性科学研究的科研人员参考。

目　录

第一章　吸引子及其维数估计

1.1　整体吸引子及其 Hausdorff、分形维数估计

本节将引入无穷维动力系统中的非常重要的一个概念——整体吸引子，叙述整体吸引子的存在定理以及对其 Hausdorff 维数、分形维数的估计。

定义 1.1.1　设 E 为 Banach 空间，$S(t)$为连续的算子半群，即有 $S(t):E\to E, S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau), \forall t,\tau\geqslant 0, S(0)=I$(恒等算子)。如果紧集 $\mathscr{A}\subset E$ 满足：

(i) 不变性：即在半群 $S(t)$作用下为不变集

$$S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A};\forall t\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

(ii) 吸引性：$\mathscr{A}$ 吸引 E 中一切有界集，即对任何有界集 $B\subset E$ 有

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\mathscr{A})=\sup_{x\in B}\inf_{y\in\mathscr{A}}\|S(t)x-y\|_E\to 0, t\to\infty \tag{1.1.2}$$

特别地，有当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨线 $S(t)u_0$ 收敛于 $\mathscr{A}$，即有

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0,\mathscr{A})\to 0, t\to\infty \tag{1.1.3}$$

那么，紧集 $\mathscr{A}$ 称为半群 $S(t)$的整体吸引子。

整体吸引子的结构是很复杂的。对于一个非线性演化方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=F(u(t)) \tag{1.1.4}$$

$$u(0)=u_0 \tag{1.1.5}$$

它所生成的半群 $S(t)$ 除了包括方程的简单平衡点(可能是多重解)外,还包括时间周期的轨道,拟周期解的轨道,以及分形、奇异吸引子等,它可能不是光滑流形,且具有非整数维数。

为了给出整体吸引子的存在定理,我们需要引进吸收集的概念。

定义 1.1.2 对于有界集 $B_0 \subset E$,使得对任何有界集 $B \subset E$,如存在 $t_0(B) > 0$,有

$$S(t)B \subset B_0, \quad \forall t \geqslant t_0(B) \tag{1.1.6}$$

则称 B_0 为 E 中的有界吸收集。

定理 1.1.1 设 E 为 Banach 空间,$S(t), t \geqslant 0$ 为算子半群,$S(t): E \to E$, $S(t+\tau) = S(t) \cdot S(\tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, $S(0) = I$,其中 I 为恒等算子。设半群 $S(t)$ 满足以下条件:

(i) 半群 $S(t)$ 在 E 中一致有界,即对一切 $R > 0$,存在常数 $C(R)$,使得当 $\| u \|_E \leqslant R$ 时,有

$$\| S(t)u \|_E \leqslant C(R), \quad \forall t \in [0, \infty) \tag{1.1.7}$$

(ii) 存在 E 中有界的吸收集 B_0。 (1.1.8)

(iii) 当 $t > 0$ 时,$S(t)$ 为全连续算子。

则半群 $S(t)$ 具有紧的整体吸引子 $\mathscr{A}$。

附注 1.1.1 如将条件(ii)中的有界吸收集 B_0 改换为存在紧的吸收集合 B_0,则条件(iii)中 $S(t)$ 的全连续性可改为 $S(t)$ 为连续算子,这时定理 1.1.1 仍成立。

附注 1.1.2 可以证明上述的整体吸引子 $\mathscr{A}$ 为吸收集 B_0 的 ω 极限集,即有

$$\mathscr{A} = \omega(B_0) = \bigcap_{s \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant s} S(t) B_0} \tag{1.1.9}$$

其中闭包在 E 上取。

另一个常用的吸引子的存在定理为:

定理 1.1.2 设 E 为 Banach 空间,半群 $S(t)$ 是连续的。设存在一个开集 $\mathscr{U} \subset E$ 和 $\mathscr{U}$ 的一个有界集 $\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{U}$ 中是吸收的。又设满足条件:

(1) 算子 $S(t)$ 对充分大的 t 是一致紧的,即对每个有界集 $\mathscr{B}$,

存在 $t=t_0(\mathscr{B})$，使得

$$\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathscr{B} \tag{1.1.10}$$

在 E 中是相对紧的。或

(2) $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，其中算子 $S_1(\cdot)$ 对充分大的 t 是一致紧的(即满足条件(1.1.10))，算子 $S_2(t)$ 为连续映射，$S_2(t):E\to E$，且对每个有界集 $B\subset E$，

$$r_B(t) = \sup_{\phi\in B}\| S_2(t)\phi \|_E \to 0 \tag{1.1.11}$$

则 $\mathscr{B}$ 的 ω 极限集 $\mathscr{A}=\omega(\mathscr{B})$ 是紧的吸引子，它吸引 $\mathscr{U}$ 中的有界集。它是在 $\mathscr{U}$ 中的最大有界吸引子，且当 $\mathscr{U}$ 既凸又连通时，$\mathscr{A}$ 是连通的。

因此，要证明整体吸引子的存在性，就是要验证定理 1.1.1 或定理 1.1.2 的假设是否成立，最主要的是：

(i) 半群 $S(t)$ 的存在性与连续性；

(ii) 存在一个有界或紧的吸收集；

(iii) $S(t)(t\geq 0)$ 为全连续算子或满足条件(1.1.10)(或条件(1.1.11))。

为了对整体吸引子的几何性质作最简单的刻画，我们可对它的 Hausdorff 维数、分形维数作一些估计。

定义 1.1.3 集合 X 的 Hausdorff 测度为

$$\mu_H(X,d) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_H(X,d,\varepsilon) = \sup_{\varepsilon>0}\mu_H(X,d,\varepsilon) \tag{1.1.12}$$

其中

$$\mu_H(X,d,\varepsilon) = \inf\sum_i r_i^d \tag{1.1.13}$$

这里 inf 是对一切覆盖 X 的半径 $r_i\leqslant\varepsilon$ 的球而取的。如果存在一个数 $d=d_H(X)\in[0,+\infty]$，使得

$$\mu_H(X,d) = 0, d > d_H(X) \tag{1.1.14}$$

$$\mu_H(X,d) = \infty, d < d_H(X) \tag{1.1.15}$$

则称这个数 $d_H(X)$ 为集合 X 的 Hausdorff 维数。

定义 1.1.4 集合 X 的分形维数为