普通高等院校
规划教材

WEIJIFEN XINBIAN JIAOCHENG

主 编 丁正中

微积分
新编教程

(第二册)

浙江科学技术出版社

微积分新编教程

（第二册）

主编　丁正中
编著　丁正中　朱　灵　王海敏
　　　华就昆　李剑秋

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分新编教程. 第 2 册 / 丁正中主编;朱灵等编著. —杭州:浙江科学技术出版社,2011.8
普通高等院校规划教材
ISBN 978-7-5341-4222-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①丁… ②朱… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 173866 号

丛 书 名	普通高等院校规划教材
书　　名	**微积分新编教程(第二册)**
主　　编	丁正中
编　　著	丁正中　朱　灵　王海敏　华就昆　李剑秋
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码:310006 联系电话:0571-85170300-61712 E-mail:cl@zkpress.com
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州丰源印刷有限公司
经　　销	全国各地新华书店

开　　本	787×1092　1/16	**印　　张**	14.25
字　　数	316 000		
版　　次	2011 年 8 月第 1 版		2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5341-4222-2	**定　　价**	33.00 元

责任编辑　张祝娟　陈　岚　　**封面设计**　孙　菁
责任校对　张　宁　　**责任印务**　崔文红

前　言

我国现代化建设的迅速发展，需要造就一大批掌握现代经济理论与现代管理知识的专门人才. 在现代经济学与现代管理科学中，由于日益强调定量分析，因此大量引进了近代数学的概念、理论及其方法，几乎在每一本现代经济理论的书籍中，都可找出一大堆近代数学的符号与公式. 可以说，不懂得近代数学，特别是经济应用数学，在现代经济领域里将寸步难行.

大学中的经济应用数学通常包括应用数理统计、运筹学和计量经济学等基本课程，而作为这些课程的共同基础是以微积分为主体的高等数学知识. 由于高等数学具有高度的抽象性与严密的逻辑性等特点，故对于刚入学的文科本科学生来说，是一门较难学好的课程，这个问题还反映在至今还没有一本公认的比较有特色的适合于经济管理类本科学生使用的经济数学基础教科书. 多年来的教学实践，使我们深切地体会到这方面的迫切要求，为此我们试编了这本教材，以期起到抛砖引玉的作用.

在编写这本教材时，我们在以下几个方面做了一些尝试：

(1) 注意对基本概念做深入浅出的描述. 在基本概念的引入上，例如在介绍极限、导数、弹性、微分等概念时，我们对它们的经济背景问题以及这些概念的实质都做了详尽的阐述，希望学生不仅知道这些概念的抽象数学定义，并且还能透过这些字眼知道为什么要这样下定义，从而能够学到一点如何对实际问题进行数学定量化刻画的思想与方法.

(2) 增大理论与实际中应用部分的篇幅. 考虑到文科本科学生的特点以及高等数学在经济管理类学科中的应用作用，我们对数学理论部分的内容做了较大限度的压缩，一些并非必要的理论证明和应用意义不大的内容，都被做了删略，以便有较多的篇幅来叙述理论应用方面的知识. 例如，我们加强了对函数最大、最小值问题的讨论，增加了导数以及与之相关的"边际"、"弹性"等概念在经济学上应用的例子；在定积分经济应用方面，引入了资金流的现值和终值的概念与计算、消费者剩余和生产者剩余的概念与计算、洛伦兹曲线和基尼系数的概念与计算等问题；在微分方程经济应用方面，介绍了逻辑斯蒂克模型和市场经济下商品价格动态均衡模型等经济数学模型及其建模思想等.

(3) 在教材中融入了计算机和应用软件的使用. 抽象的内容与计算机应用软件的结合，会使学生更为直观地学好大学本科教学中微积分这门重要的公共基础课. 我们试图通过介绍一个简单易学的数学软件 Mathematica 来达此目的. 该软件的操作介绍只涉及微积分课程

中所提出的高等数学运算，如极限、求导、不定积分、定积分、幂级数求和、微分方程求解等等，其具体内容将用标以星号的小节形式分布在各相应章节之末尾，以便于学用结合.

(4) 对于普通教科书上一些常见的概念性错误及易混淆之处，例如分段函数、复合函数、反函数、反正弦函数等，在本书中也做了必要的澄清与纠正.

(5) 重视练习题的配备.一套精心编写的练习题往往可以使一本教材增色不少.数学的特点决定了学生必须通过演算一定量难易适当的习题，才能真正领会概念，掌握定理及公式，所以我们在习题编写方面做了一些努力.同时，我们也适当配备了一些涉及前后知识点的综合题和近年来的考研试题，以期达到前后章节的知识能被贯串运用的目的和使越来越多希望考研的本科生在一年级就打好扎实的基础.除此之外，我们在每一章后面还编写了复习题，这些复习题分为：客观性习题、基本计算题、应用题及证明题四大部分，主要供学生学完该章后进行系统复习或准备阶段测验和期末考试之用.

(6) 注意与中学知识的衔接.例如，近年来中学数学教学中对于文科学生均删去了有关三角函数的知识，我们特地做了专节介绍，以使前后知识不脱节.

本教材是针对每周时数为 4 学时、共 34 教学周数的本科教学需要而编写的.为了便于教师的教学以及学生的自学，我们尽量按 2 个学时的讲授内容作为一节进行章节划分.全书共分十章(第一册、第二册)，其中第一章和第二章由丁正中教授编写，第三章和第四章由华就昆副教授编写，第五章和第六章由王海敏副教授编写，第七章和第八章由朱灵教授编写，第九章和第十章由李剑秋副教授编写，最后由丁正中教授统稿并担任主编.

本书在编写过程中，我们借鉴了一些图书文献，有的参考文献未在书后一一列出，在此向他们致以诚挚的谢意.

由于编写时间仓促，加之编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编著者

2011 年 3 月

目　　录

第六章　定 积 分

积分学有两类基本问题.我们已经讲了它的第一类基本问题,即求函数的不定积分,它是作为微分的逆运算提出来的.这一章我们将讨论积分学的第二类基本问题.这类问题有着丰富的实际应用背景,例如计算一个由曲线围成的图形的面积、计算一个几何体的体积,以及计算以产品总产量的变化率为已知时的产品总产量等等.但是,这些问题并不明显地表示为求原函数或求不定积分.也就是说,与积分学的第一类基本问题表面上看来似乎没有什么联系.在数学史上,定积分的发展起初是完全独立的,直到17世纪,牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)才在前人大量的研究工作的基础上建立了微积分基本定理,揭示了不定积分与定积分之间的联系,使得定积分的计算问题通过微积分基本定理化为不定积分的计算问题,而不定积分的存在性问题又通过微积分基本定理得到解决,从而大大推动了积分学的发展,使之成为解决实际问题的有力工具.

第一节　定积分的概念

在初等数学中,我们会计算三角形的面积,由此我们就可以将多边形的面积用若干个三角形的面积和(如图6-1所示)来计算它.但我们不会计算一个由曲线围成的平面图形(如图6-2所示)的面积.

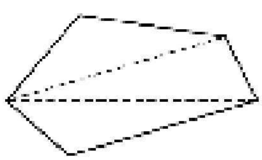

图6-1

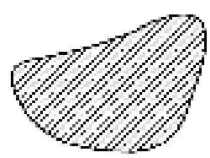

图6-2

一般地,求曲边形的面积可以化成求曲边梯形的面积.所谓曲边梯形,是指这样的图形:它有三条边是直线段,其中两条互相平行,第三条与前两条垂直,叫做底边,第四条是一条曲线段,叫做曲边,任意一条垂直于底边的直线与这条曲边至多只交于一点.特别地,两条互相平行的直线中的一条或两条也可以退化成点.

从几何直观上看,一个曲边形的面积往往可以化成两个曲边梯形的面积的差.例如,如图6-3所示中的曲边形的面积,可以化为两个曲边梯形的面积 S_1 和 S_2 的差,即 $S=S_1-S_2$.

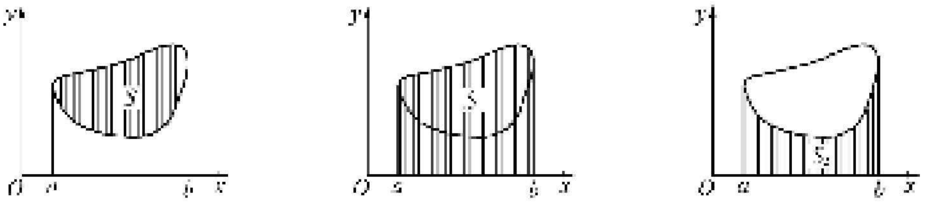

图 6-3

由此可见,如果我们会计算曲边梯形的面积,那么就可计算出所有的曲边形的面积.那么,如何计算曲边梯形的面积呢?退一步,先求近似值.例如,将曲边梯形分成一个个小的曲边梯形,每一个小曲边梯形都可以近似看作一个小矩形(如图 6-4 所示),而曲边梯形的面积也就近似地看作若干个小矩形的面积之和.换句话说,这些小矩形面积之和就是所要求的曲边梯形面积的近似值.可以想象,如果分割得越多,近似程度就越高.我们知道,为了得出精确值,必须利用极限这一工具.大量的问题,尽管它们在表面上、形式上来看各不相关、各不相同,但是却都提出了一个同样的要求:计算一个和式的极限,这就是定积分的概念.

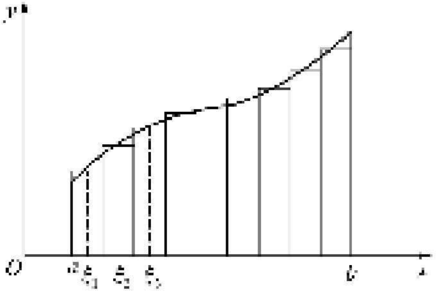

图 6-4

下面,我们来讨论由连续曲线 $y=f(x)$($f(x)\geqslant 0$),直线 $x=a$,$x=b$($a<b$)和 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

(1) 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a,b]$等分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

这些小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.过每个分点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 作 x 轴的垂线,把曲边梯形 $AabB$ 分成 n 个小曲边梯形(如图 6-5 所示).用 S 表示曲边梯形 $AabB$ 的面积,ΔS_i 表示第 i 个小曲边梯形的面积,则有

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

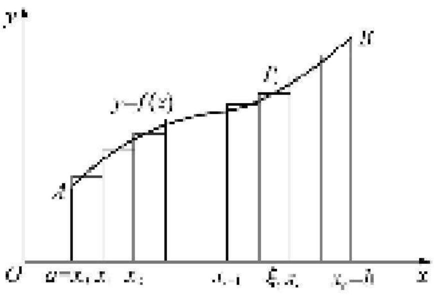

图 6-5

(2) 在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$($i=1,2,\cdots,n$) 内任取一点 ξ_i($x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$),过点 ξ_i 作 x 轴的垂线与曲边交于点 $P_i(\xi_i, f(\xi_i))$,以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$ 为高作矩形,取这个矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\dfrac{b-a}{n}$ 作为 ΔS_i 的近似值,即

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

作总和

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n},$$

则 S_n 是 S 的一个近似值.

(3) 当等分数 n 无限增大而小区间长度$\dfrac{b-a}{n}\to 0$ 时,总和 S_n 的极限(如果存在的话) 就定义为曲边梯形 $AabB$ 的面积 S,即

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

现在,我们再来考虑下面一个经济学上关于总产量的计算问题:设某产品的总产量对时间的变化率为 $f(t)$,它是时间 t 的函数,求在时间间隔$[T_1, T_2]$上的总产量 Q.

首先,还是求近似值. 在时间间隔$[T_1, T_2]$ 上用点等分成 n 个小区间,在每一小段$[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i,只要等分得相当细(即 $n\to\infty$),就可以设想在小区间$[t_{i-1}, t_i]$ 上每一时刻的变化率可近似看作是均匀的,且变化率是 $f(\xi_i)$($t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i$),从而在每一小段上产品的产量近似地等于 $f(\xi_i)\Delta t_i = f(\xi_i)\dfrac{T_2-T_1}{n}$. 因此,在时间间隔$[T_1, T_2]$ 上的总产量 Q 可近似地看作这些产量之和,即

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{T_2-T_1}{n}.$$

当分得越细时,近似程度就越高. 所以,自然地就把总产量的精确值看作是当等分数 $n\to\infty$时上述和式的极限.

许多实际问题都归结到计算一种和式的极限,因此有必要对这些问题在抽象的形式下进行研究,这样就引出了数学上的定积分概念.

定义 6.1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数,用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

来等分区间 $[a,b]$,在每一小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i,作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$. 若当 $n\to\infty$ 时,和式极限存在,且此极限不依赖于 ξ_i 的选择,则称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分),记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

数 a 和 b 分别称为积分的下限和上限;$f(x)$ 称为被积函数;x 称为积分变量;$f(x)\mathrm{d}x$ 称为积分表达式;$[a,b]$ 称为积分区间.

和 $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在,我们就说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

注意

(1) 如果积分和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在,则此极限值是个常数,它只与被积函数 $f(x)$ 以及积分区间 $[a,b]$ 有关,积分变量在定积分的定义中不起本质的作用. 如果把积分变量 x 改写成其他字母,例如 t 或 u,那么这时和式极限不变,也就是定积分的值不变,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

所以,我们也说定积分的值只与被积函数及积分区间有关,而与积分变量用什么符号表示无关.

(2) 从定义我们可以得出以下的推断:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界. 这是因为若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则这个函数至少会在其中某个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界. 因此,可在其上选取一点 ξ_i,而使 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于预先给定的数,随之可使和数 σ 也如此,从而和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 就不可能有有限的极限. 由此可见,在上述定义的意义下,可积函数一定是有界的. 也就是说,无界函数一定不可积.

对于定积分,有这样一个重要问题:函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足什么条件,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积? 这个问题我们不做深入讨论,而只给出以下两个充分条件:

定理 6.1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6.2 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个第一类间断点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

根据定积分的定义,前面两个实际问题的结果可以表述为:

由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$),直线 $x=a$, $x=b$ ($a<b$) 和 x 轴所围成的曲边梯形

的面积 S 就是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，即

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

产品在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上的总产量等于总产量对时间 t 的变化率 $f(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上的定积分，即

$$Q=\int_{T_1}^{T_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

下面，我们再来看一下定积分的几何意义.

设 $y=f(x)$ 是一连续曲线段，若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，我们已经知道，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积；若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴下方，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值；若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时，函数 $f(x)$ 图形的某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴的下方（如图 6-6 所示）. 如果我们对面积赋以正负号，在 x 轴的上方的图形面积赋以正号，在 x 轴的下方的图形面积赋以负号，则在一般情形下，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴，函数 $f(x)$ 的图形及直线 $x=a$，$x=b$ 之间各部分面积的代数和.

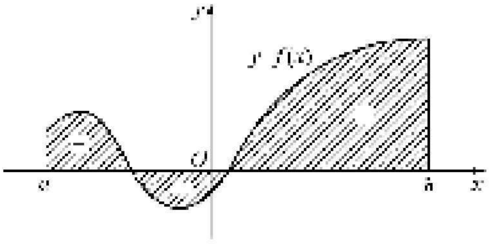

图 6-6

最后，我们举一个按定义计算定积分的例子.

【例 6-1】 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间 $[0,1]$ 上连续，而连续函数是可积的，所以积分与 ξ_i 的取法无关，因此可取 $\xi_i=\dfrac{i-1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是，得和式

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1-0}{n}\\&=\frac{1}{n}\times 0+\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].\end{aligned}$$

利用数学归纳法可以证明

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1).$$

于是

$$\sigma=\frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1).$$

按定积分的定义,即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sigma=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

习题 6.1

1. 设某物体做直线运动,已知速度 $v(t)$ 是时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上 t 的一个连续函数,且 $v(t)\geqslant 0$,试用定积分表示在这段时间内物体所经过的路程 s.

2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x\ (a<b)$;　　(2) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3. 利用定积分的几何意义,说明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$;　　(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$;　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

第二节　定积分的性质

为了今后计算及应用方便起见,我们先对定积分作以下两点补充规定:

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

它的几何意义相当于:线段无面积.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

这表明定积分具有“方向”的意义:同一个函数 $f(x)$,从 a 积到 b 和从 b 积到 a,其积分值相差一个符号.

下面,我们讨论定积分的性质.下列定积分中定积分上下限的大小如不特别指出,均不加限制,并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 6.1　$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k **是常数**).

证明

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[k\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right]$$

$$=k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

$$=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个性质表明：被积函数中的常数因子可以提到积分号外面.

性质 6.2　$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

类似于性质 6.1,可由定积分的定义证得.

性质 6.1 和性质 6.2 可以合并成下面一个公式：

$$\int_a^b[k_1 f(x)\pm k_2 g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 k_1 和 k_2 是常数.上式表明,定积分关于被积函数具有线性性.也就是说,函数的线性组合的定积分等于定积分的线性组合.这个法则马上可以推广到有限多个函数的代数和的情形.

性质 6.3　**设** $a<c<b$,**则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

从定积分的几何解释看,性质 6.3 是很明显的.

事实上,按定积分的补充规定,我们有：不论 a, b, c 的位置如何,总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立.例如,当 $a<b<c$ 时,由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个性质表明：定积分对于积分区间具有可加性.

性质 6.4　**如果在区间**$[a,b]$**上** $f(x)\equiv 1$,**则**

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a.$$

这个性质的证明由读者自己完成.

性质 6.5　**如果在区间**$[a,b]$**上** $f(x)\geqslant 1$,**则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0\quad(a<b).$$

证明　因为 $f(x)\geqslant 0$,所以

$$f(\xi_i)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n).$$

又由于$\frac{b-a}{n}>0$,因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} \geqslant 0,$$

令 $n\to\infty$,便得要证的不等式.

推论 6.1　如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

证明　因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$,由性质 6.5,得

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

再利用性质 6.2,可得要证的不等式.

推论 6.2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

证明　因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以由推论 6.1 及性质 6.1,可得

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质 6.6(估值定理)　设 M 和 m 分别是 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证明　因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,所以由性质 6.5 的推论 6.1,得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x.$$

再由性质 6.1 及性质 6.4,即得要证的不等式.

这个性质说明,由被积函数在积分区间上的最大值与最小值可以估计出积分值的大致范围.例如定积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,它的被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在积分区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上是单调递增的,于是最小值 $m=f(0)=1$,最大值 $M=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 由性质 6.6,得

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right),$$

即

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

性质 6.7(中值定理) **若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使下式成立:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

证明 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则由闭区间上连续函数的最大值和最小值定理,有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

其中 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 又由性质 6.6 知

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

再用 $b-a$ 去除不等式两边,得

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M,$$

即数 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 之间. 由连续函数的介值定理知道,至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi).$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

这个定理的几何意义为:在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得以区间 $[a,b]$ 为底,以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积(如图 6-7 所示).

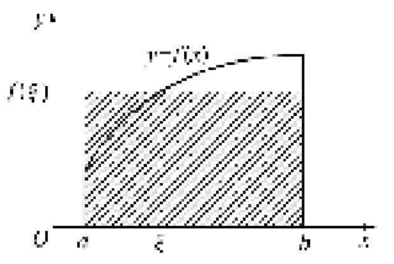

图 6-7

通常,称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值,它是有限个数的平均值概念的拓广.

习题 6.2

1. 证明下列定积分的性质:

(1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

2. 估计下列各定积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$.

3. 证明下列不等式:

(1) $\frac{2}{5} \leqslant \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$;

(2) $1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}$.

4. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,证明:若在$[a,b]$上,$f(x)\geqslant 0$ 且 $f(x)\not\equiv 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

5. 根据定积分的性质及第 4 题的结论,说明下列定积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是$\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,且满足 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$,试证:存在 $c \in (0,1)$,使得 $f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$.

7. 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $g(x) > 0$,利用闭区间上连续函数的性质,证明存在一点 $\xi \in [a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

*第三节　Mathematica 软件使用之八

利用 Mathematica 软件可以计算初等函数的定积分的数值.

一、求初等函数的定积分数值

如要求出所给初等函数的定积分数值,仍可使用 Mathematica 软件的内部指令