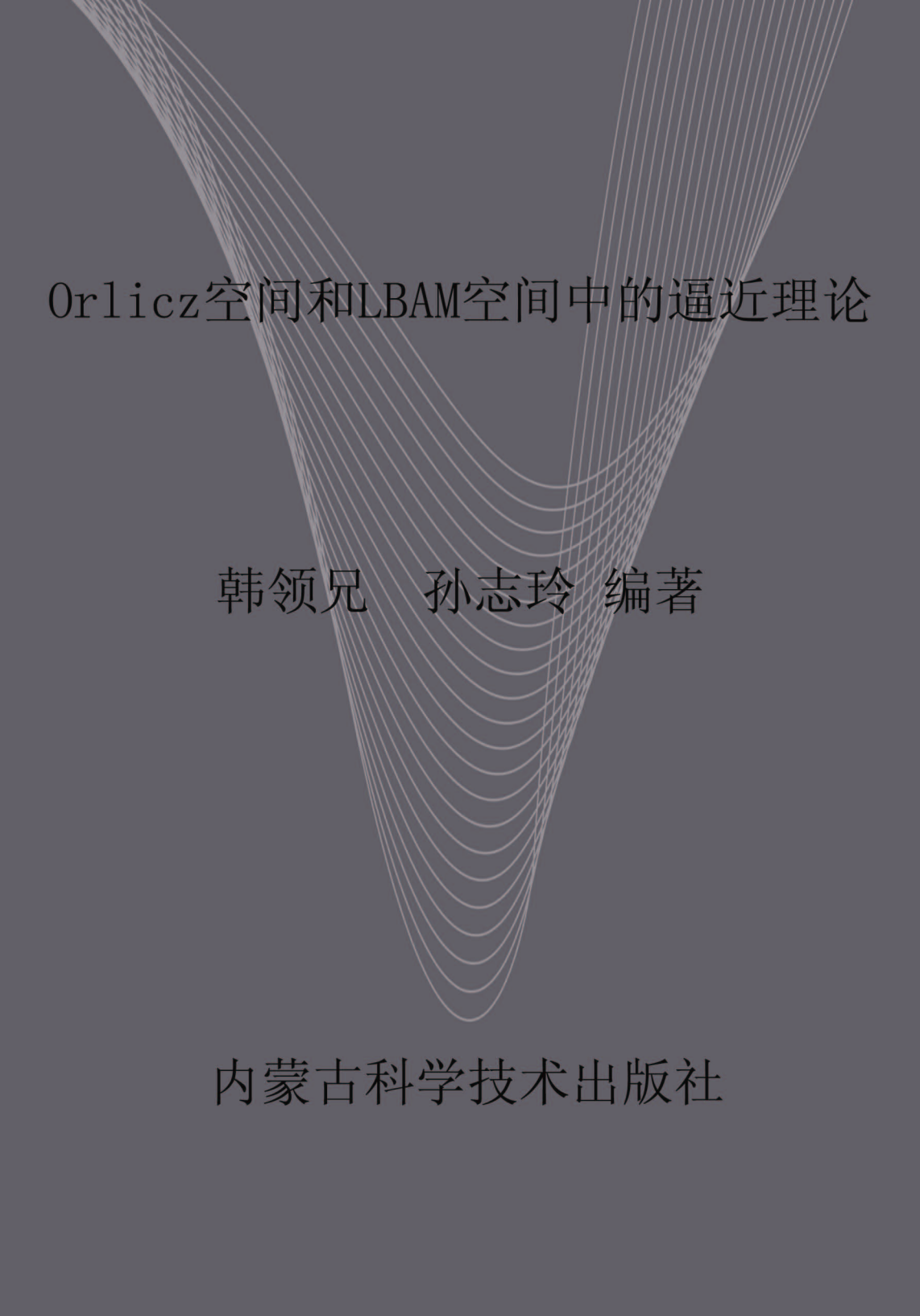




Orlicz空间和LBAM空间中的逼近理论

韩领兄 孙志玲 编著

内蒙古科学技术出版社

Φ

Orlicz空间和 L_M^{Ba} 空间中的逼近理论

韩领兄 孙志玲 编著

L_M^{Ba}

π

$\tilde{f}(x)$

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

Σ

图书在版编目 (CIP) 数据

Orlicz空间和 L_M^{Ba} 空间中的逼近理论 / 韩领兄, 孙志玲编著. — 赤峰: 内蒙古科学技术出版社, 2012. 11
ISBN 978-7-5380-2218-6

I. ①O… II. ①韩… ②孙… III. ①函数逼近论—研究 IV. ①0174.41

中国版本图书馆CIP数据核字 (2012) 第266875号

出版发行: 内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社
地 址: 赤峰市红山区哈达街南一段4号
邮 编: 024000
电 话: (0476)8224848 8226867
网 址: www.nm-kj.com
责任编辑: 季文波
封面设计: 永 胜
印 刷: 赤峰市地质宏达印刷有限责任公司
字 数: 130千
开 本: 880×1230 1/32
印 张: 5.625
版 次: 2012年12月第1版
印 次: 2012年12月第1次印刷
定 价: 38.00元

前言

函数逼近论是现代数学的重要分支之一。溯其源头, 应该是1885年由德国数学家Weierstrass所建立的关于连续函数可以用多项式逼近的著名定理和1859年前苏联数学家Chebyshev提出的最佳逼近的特征定理。但函数逼近论作为一门独立的学科并得以蓬勃发展却是为20世纪经Jackson, Bernstein以及前苏联分析学派的一系列深入工作所推动的, 这些工作使函数逼近论的研究目标明确为用简单的可计算函数对一般复杂函数的逼近问题, 并进而考虑这种逼近的程度和如何刻画被逼近函数本身的特征。无论是在理论研究上, 还是在实际应用中常常都要考虑用一些简单函数去逼近一般复杂函数的问题。这样, 函数逼近论就以构造函数论的姿态吸引着越来越多的学者进入这个研究领域, 从而一系列的重要工作在不断出现, 这说明函数逼近论这个学科是一个经久不衰的、具有强大生命力的研究分支。它不仅与泛函分析、调和分析、小波分析、微分方程等诸多研究方向有着密切的关系, 而且已成为计算数学与应用数学及优化理论的基础。人们一致认为, 函数逼近论的近代发展无论在理论上还是在实际应用上都具有重要意义。

现代逼近论的基本内容通常可分为三种类型的问题: 第一类问题是线性赋范空间 X 内的定元 x 借助于 X 的某一定子集 F 来逼近的问题; 第二类问题是 X 内具有某些已知性质的元素集 A 借助于 X 的某一定子集 F 来逼近的问题; 第三类问题是 X 的定子集 A 借助于 X 的给定子集族 $\{F\}$ 来逼近的问题。上述每一类问题现在都有大量的基本研

究结果。第一类问题中用代数多项式或三角多项式逼近函数是函数逼近论中一个十分重要的方面。另外, 在一些函数空间内研究线性算子逼近、插值逼近、有理逼近、Müntz逼近等问题也都是属于第一类问题。第二类问题是第一类问题的延伸。前两类问题是第三类问题的基础。第三类问题实际上是前苏联著名学者A.N.Kolmogorov于1936年提出的宽度概念的早期思想基础。第三类问题通常涉及寻求(在一定意义下的)最佳逼近集和最佳逼近方法, 而对函数类提出的逼近问题(或更一般些, 对函数空间内的点集提出的逼近问题)在很多情形下是极值问题, 由此看来, 宽度理论与极值问题之间有着天然的联系。促使宽度问题的研究趋于活跃的一个重要背景是数值分析和应用数学的需要。数学物理问题的近似求解是数值分析和应用数学的重要组成部分, 近代科学技术的发展是许多数学物理问题的源泉, 而数学物理中的好多近似求解问题是宽度理论与极值问题的直接背景, 同时宽度理论与极值问题的理论成果可以为数学物理问题的近似求解以及选择“最优的”求解方案提供理论分析依据。所以, 这一研究工作是既有理论意义又有实际背景的研究课题。随着科学技术的发展, 函数逼近论同其他应用学科之间的关系日趋密切。几十年来, 国内外已有相当数量的一批学者从事这一领域的研究, 在连续函数空间和 L_p 空间内已有大量结果。但是, 在更广泛的一些函数空间(如Orlicz, L_M^{Ba} 空间等)内这一方向的研究成果不多, 本书就是力求在这一方面开展工作, 并取得一些成果。随着越来越多的复杂度问题和非线性问题的出现, 在更广泛的一些函数空间内研究这一课题已成为历史的必然, 函数空间本身又是从各类实际问题中提出的数学模型, 因此对这一方面的研究, 无论在学术上还是在实

际应用方面都具有重要意义。

本书主要从以下两方面内容来论证的：一个是Orlicz空间中的算子逼近和宽度问题；另一个是 L_M^{Ba} 空间中的多项式逼近、算子逼近、插值逼近和Müntz有理逼近问题。1983年，哈尔滨出版了由吴从炘和王廷辅合著的专著《奥尔里奇空间及其应用》，从而开始了研究Orlicz空间中的逼近问题。早期的有1984年A.-R.K. Ramazanov 在“Analysis Mathematica”上发表了《On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces》；1985年谢敦礼在“杭州大学学报”上发表了《Orlicz空间上最佳逼近的特征》；1991年吴嘎日迪在“逼近论及其应用”上发表了《On Approximation by polynomials in Orlicz spaces》；1993年，汪和平的北京师范大学硕士论文《Orlicz空间中的多项式逼近》等等。韩领兄和孙志玲作为吴嘎日迪教授的学生继续研究Orlicz空间中的算子逼近和宽度问题。孙志玲在2005年在“内蒙古师范大学学报”上发表了《Stancu-Kantorovich算子在Orlicz空间逼近的正定理》；2006年在“内蒙古师范大学学报”上发表了《Kantorovich-Vertesi算子在Orlicz空间逼近的正定理》；2007年在“数学研究与评论”上发表了《某可微函数类在Orlicz空间内的宽度估计》；2007年在“内蒙古民族大学学报”上发表了《修正的Nevai算子在 L_ω^M 空间的逼近定理》；2010年在“内蒙古师范大学学报”上发表了《某周期卷积类在L尺度下的单边逼近》等等。1981年我国院士丁夏畦与罗佩珠引入的一类新的函数空间叫做Ba空间。2001年孟伯秦和刘官厅在内蒙古人民出版社出版的专著《内插空间理论及其应用》中给出 L_M^{Ba} 空间的定义，并研究了 L_M^{Ba} 空间的内插定理。 L_M^{Ba} 空间是Ba空间的一种。吴嘎日迪在由一系列Lebegue

空间 L_p ($p>1$)构成的Ba空间 L^{Ba} 中研究了算子逼近, 多项式逼近等问题。 L_M^{Ba} 空间是 L^{Ba} 空间的推广。韩领兄, 孙志玲在由一系列Orlicz空间构成的Ba空间 L_M^{Ba} 中研究算子逼近、插值逼近、多项式逼近、Müntz有理逼近等。2006年韩领兄和吴嘎日迪在“内蒙古师范大学学报”上发表了《空间中积分型拟Kantorovic算子逼近的正逆定理》; 2007年韩领兄在“内蒙古师范大学学报”上发表了《修正的Hermite-Fejer插值在 $L_{M,\omega}^{Ba}$ 空间中的逼近》; 2007年韩领兄, 吴嘎日迪在“应用泛函分析学报”上发表了《一类广义插值在 L_M^{Ba} 空间中的逼近》; 2009年, 2011年韩领兄在“内蒙古民族大学学报”上分别发表了《空间中的Müntz有理逼近》和《 L_M^{Ba} 空间中最佳逼近的集中性质》; 2012年韩领兄在“Intelligent Information Management Systems and Technologies”上发表了《空间中Müntz有理逼近的Jackson型估计》; 2011年孙志玲在“Chinese Quarterly Journal of Mathematics”上发表了《Approximation theorems of Bernstein-Durrmeyer operators in spaces》等文章。其余文章就不一一列出了。在 L_M^{Ba} 空间中的逼近论的研究正处于发展阶段, 需要我们共同努力来完善它。由于资料来源不全以及篇幅所限, 本书只能摘其很少部分内容介绍, 挂一漏万, 敬请同行与读者谅解和指正。

作者

2012年7月

目 录

第一章 Orlicz空间和 L_M^{Ba} 空间

§1.1 Orlicz 空间 $L_M^*(D)$	2
1.1.1 N函数	2
1.1.2 Orlicz空间 $L_M^*(D)$	4
1.1.3 Orlicz空间 $L_M^*(D)$ 中的连续模与K泛函的等价性	6
§1.2 L_M^{Ba} 空间	9
1.2.1 L_M^{Ba} 空间	9
1.2.2 L_M^{Ba} 空间中的连续模与K泛函的等价性	13

第二章 Orlicz空间中的若干算子逼近

§2.1 Stancu-Kantorovich算子在Orlicz空间逼近的正定理	24
2.1.1 Stancu-Kantorovich算子	24
2.1.2 辅助引理	25
§2.2 Kantorovich-Vertesi算子在Orlicz空间逼近的正定理	29
2.2.1 Kantorovich-Vertesi有理算子	29
2.2.2 Kantorovich-Vertesi有理算子逼近正定理	30
2.2.3 定理的证明	34
§2.3 一类Nevai-Durrmeyer 算子在 $L_{M,\varphi}^*$ 空间中的逼近	36
2.3.1 一类Nevai-Durrmeyer 算子	36
2.3.2 一类Nevai-Durrmeyer 算子的逼近定理	38

第三章 宽度问题

§3.1 由非周期线性积分算子确定的函数类在Orlicz空间中 宽度的下方估计	44
--	----

3.1.1 函数类概念 44

3.1.2 函数类 $\mu_{r,\infty}$ 在Orlicz空间内宽度的下方估计47

3.1.3 对偶定理51

§3.2 由某一线性微分算子确定的可微函数类
在Orlicz空间中的宽度估计55

3.2.1 基本知识介绍55

3.2.2 Π_n 的极值问题56

3.2.3 一些宽度的计算60

§3.3 某一函数类在Orlicz空间中的宽度的精确估计 64

3.3.1 基本知识介绍 64

3.3.2 Π_n 与 Π'_n 的极值问题65

3.3.3 一些宽度的估计71

§3.4 某些周期卷积类的宽度的精确估计75

3.4.1 基本知识介绍75

3.4.2 辅助引理76

3.4.3 主要结果及其证明78

第四章 $L_M^{B_a}$ 空间中的多项式逼近

§4.1 $L_M^{B_a}$ 空间中的多项式逼近84

§4.2 $L_M^{B_a}$ 空间中多项式的倒数逼近96

§4.3 $L_M^{B_a}$ 空间中最佳逼近的“集中性质” 109

4.3.1 最佳逼近的集中性质 109

4.3.2 定理的证明 114

第五章 $L_M^{B_a}$ 空间中的若干算子逼近

§5.1 积分型拟Kantorovic 算子 122

5.1.1 积分型拟Kantorovic 算子	122
5.1.2 主要结果	123
5.1.3 定理5.1.1的证明	130
§ 5.2 Bernstein-Durrmeyer算子在 $L_M^{B_a}$ 空间中的逼近	132
 第六章 $L_M^{B_a}$ 空间中的若干插值逼近	
§ 6.1 修正的Hermite-Fejér插值在 $L_{M,\varphi}^{B_a}$ 空间中的逼近	140
6.1.1 修正的Hermite-Fejér插值多项式	140
6.1.2 修正的Hermite-Fejér插值多项式的逼近定理	142
§ 6.2 一类广义插值在 $L_M^{B_a}$ 空间中的逼近	149
6.2.1 一类广义插值	149
6.2.2 一类广义插值的逼近定理	151
 第七章 $L_M^{B_a}$ 空间中的Müntz有理逼近阶	
§ 7.1 $L_M^{B_a}$ 空间中的Müntz有理逼近阶	159
§ 7.2 $L_M^{B_a}$ 空间中的Müntz 系 $\{x^{\lambda_n}\}$ 满足 $\lambda_n \searrow 0$ 时 有理逼近阶	165

Ω_N^r

Φ

第一章

Orlicz空间和 L_M^{Ba} 空间

L_M^{Ba}

π

$\tilde{f}(x)$

Σ

§ 1.1 Orlicz 空间 $L_M^*(D)$

本节给出由N函数 $M(u)$ 生成的Orlicz 空间. 基于 $M(u)$ 是幂函数 $|u|^p$ ($p > 1$) 的推广, Orlicz 空间是熟知的空间 L_p ($p > 1$) 的推广. 然而Orlicz 空间, 尤其是不满足 Δ_2 条件的 $M(u)$ 生成的Orlicz 空间是 L_p ($p > 1$) 的实质性的推广. 一方面, L_p ($p > 1$) 的若干基本属性在Orlicz 空间中已经消失; 另一方面, Orlicz 空间确比 L_p ($p > 1$) 提供了广阔得多的活动天地. 例如, 许多在 L_p ($p > 1$) 中不封闭的运算在Orlicz 空间中仍为封闭. 因而也就具有更广泛的应用. 这里讨论有界闭集上的Orlicz 空间.

1.1.1 N函数

设 $u(x), v(x)$ 为实Lebesgue 可测函数, D 为有界集.

定义1.1.1 我们称定义在 $R = (-\infty, +\infty)$ 上的实值函数 $M(u)$ 为N函数, 假如它具有下列性质:

- (i) $M(u)$ 为偶的连续凸函数且 $M(0) = 0$;
- (ii) 当 $u > 0$ 时 $M(u) > 0$;
- (iii) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$.

定理1.1.1 $M(u)$ 为N函数的充要条件为存在定义在 $[0, \infty)$ 上的实值函数 $p(u)$ 满足下列条件:

(i) $p(u)$ 为右连续的非减函数;

(ii) 当 $u > 0$ 时 $p(u) > 0$;

(iii) $p(0) = 0, p(\infty) = \infty$,

并且使得

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt.$$

定义1.1.2 设 $p(t)$ 满足定理1.1.1 的条件, 则称定义在 $[0, \infty)$ 上的实值函数

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t = \inf_{p(t) > s} t$$

为 $p(t)$ 的右反函数.

当 $p(t)$ 连续且渐升时 $q(s)$ 就是 $p(t)$ 的右反函数, $p(t)$ 的右反函数 $q(s)$ 也满足定理1.1.1 的条件.

定义1.1.3 设 $M(u)$ 为N函数, $q(s)$ 为它的右导数 $p(t)$ 的右反函数, 则称

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds,$$

为 $M(u)$ 余N函数.

$N(v)$ 也是N函数.

N函数 $M(u)$ 有如下的性质:

(i) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $M(\alpha u) < \alpha M(u)$;

(ii) 当 $\alpha > 1$ 时, $M(\alpha u) > \alpha M(u)$.

定义1.1.4 称N函数 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件, 假如 $\exists k > 0, u_0 > 0$, 使当 $u \geq u_0$ 时有

$$M(2u) \leq kM(u).$$

定义1.1.5 若N函数 $M(u)$ 满足

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(u)}{\ln u} = p < \infty,$$

则称 $M(u)$ 满足 M_Δ 条件, 也可称 $M(u)$ 是指数为 p 的近似幂函数, 简记为 $M(u) \approx u^p$ ($1 < p < +\infty$).

若N函数 $M(u)$ 满足 M_Δ 条件, 则有以下性质:

(i) 设N函数 $M(u) \approx u^p$, $M(u)$ 的反函数为 $M^{-1}(v)$, 则

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln M^{-1}(v)}{\ln v} = p^{-1}. \quad (1.1.1)$$

(ii) 设N函数 $M(u) \approx u^p$, 则对任意的正数 δ 与 ε 成立

$$u^{p-\delta} \prec M(u) \prec u^{p+\varepsilon}. \quad (1.1.2)$$

定义1.1.6 称N函数 $M_2(u)$ 快于 $M_1(u)$, 若存在 $A > 0$ 和 $u_0 \geq 0$, 使当 $u \geq u_0$ 时,

$$M_1(u) \leq M_2(Au),$$

这时记为 $M_1(u) \prec M_2(u)$.

1.1.2 Orlicz空间 $L_M^*(D)$

定义1.1.7 由N函数 $M(u)$ 生成的Orlicz类 $L_M(D)$ 是指满足

$$\rho(u, M) = \int_D M(u(x)) dx < +\infty$$

的可测函数的全体 $\{u(x)\}$, 其中 $\rho(u, M)$ 称为 $u(x)$ 关于 M 的模.

不同的N函数可能生成不同的Orlicz类. 在一个Orlicz类 $L_M(D)$

的元之间引进通常的函数加法和数量乘法之后, 由 $M(u)$ 的凸性直接导致 $L_M(D)$ 是凸集, 然而 $L_M(D)$ 却未必是线性集合. $L_M(D)$ 为线性集的充要条件为 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件.

定义1.1.8 Orlicz空间 $L_M^*(D)$ 是指有限的Orlicz范数

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v, N) \leq 1} \left| \int_D u(x)v(x) dx \right|$$

的可测函数的全体 $\{u(x)\}$.

Orlicz范数还可由下式计算

$$\|u\|_M = \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (1 + \int_0^1 M(\alpha u(x)) dx),$$

并且, 存在 $\alpha > 0$, 满足 $\int_0^1 N(p(\alpha |u(x)|)) dx = 1$, 使得

$$\|u\|_M = \frac{1}{\alpha} (1 + \int_0^1 M(\alpha u(x)) dx).$$

定理1.1.2 $L_M^*(D)$ 关于 $\|\cdot\|_M$ 完备.

Orlicz空间还赋予与Orlicz范数等价的Luxemburg范数.

定义1.1.9 对于 $u \in L_M^*(D)$, 称

$$\|u\|_{(M)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_D M\left(\frac{u(x)}{\alpha}\right) dx \leq 1 \right\}$$

为 u 的Luxemburg范数.

定理1.1.3

(i) Orlicz范数与Luxemburg范数等价, 即

$$\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)},$$

(ii) Orlicz空间中的Hölder不等式:

$$\left| \int_D u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_M \cdot \|v\|_{(N)}, \left| \int_D u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{(M)} \cdot \|v\|_N.$$

定义1.1.10 加权函数 $\varphi(x)$ 的Orlicz空间 $L_{M,\varphi}^*(D)$ 是指有限的Orlicz范数

$$\|u\|_{M,\varphi} = \sup_{\rho(v,N) \leq 1} \left| \int_D u(x)v(x)\varphi(x) dx \right|$$

的可测函数的全体 $\{u(x)\}$.

在Orlicz空间 $L_{M,\varphi}^*(D)$ 还赋予与Orlicz范数等价的Luxemburg范数:

$$\|u\|_{(M)\varphi} = \inf\{\alpha > 0 : \int_D M\left(\frac{u(x)}{\alpha}\right)\varphi(x)dx \leq 1\},$$

$$\text{且} \quad \|u\|_{(M)\varphi} \leq \|u\|_{M,\varphi} \leq 2\|u\|_{(M)\varphi}.$$

1.1.3 Orlicz空间 $L_M^*(D)$ 中的连续模与K泛函的等价性

连续模是为了刻划连续函数的连续性和光滑性的优劣程度而引入的一种数量特征. 在逼近论的定量问题的涉及逼近度的数量估计中有广泛的应用, 同时又是函数论中用来刻划一些重要函数类的一种基本数量特征. 吴嘎日迪和旺和平分别在Orlicz空间 $L_M^*(D)$ 和加权的Orlicz空间 $L_{M,\varphi}^*[a,b]$ 中得到连续模与K泛函的等价性.

定义1.1.11 给定 $x \in [a,b]$, 整数 $k \geq 1, h \neq 0$, 设 $x+kh \in [a,b]$, 量

$$\Delta_h^k(f, x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih)$$

称为 f 在 x 点上步长 h 的 k 阶向前差分.

定义1.1.12 设 $f \in L_M^*[a, b]$, $r \geq 1, t \geq 0$, 称

$$\omega_r(f, t)_{M[a, b]} = \sup_{0 < h \leq t} \left\| \Delta_h^r(f, \cdot) \right\|_{M[a, b]}$$

为 f 的 r 阶连续模或 r 阶光滑模.

定理1.1.4 $\omega_r(f, t)_{M[a, b]}$ 具有以下性质:

- (i) $\omega_r(f, 0)_{M[a, b]} = 0$;
- (ii) $\omega_r(f, t)_{M[a, b]}$ 单调增加;
- (iii) $\omega_r(f, t)_{M[a, b]}$ 连续;
- (iv) 对 $\forall \lambda > 0, \omega_r(f, \lambda t)_{M[a, b]} \leq (1 + \lambda)^r \omega_r(f, t)_{M[a, b]}$.

若 $\lambda = n$ 是整数, 则

$$\omega_r(f, nt)_{M[a, b]} \leq n^r \omega_r(f, t)_{M[a, b]}.$$

- (v) 任取正整数 $j < k$, $\omega_k(f, t)_{M[a, b]} \leq 2^{k-j} \omega_j(f, t)_{M[a, b]}$.

对正整数 $r > 0$, $L_{M, D}^*$ 和加权 $\varphi^r(x)$ 的 Sobolev-Orlicz 空间所组成的空间对上的 K 泛函的定义为:

$$K_{r, \varphi}(f, t^r)_M = \inf_g \left\{ \|f - g\|_M + t^r \left\| \varphi^r g^{(r)} \right\|_M : g^{(r-1)} \in A.C_{\cdot loc} \right\}.$$

定理1.1.5 设 $f \in L_{M, \varphi}^*[a, b]$, 存在常数 $C > 0$, 不依赖于 f 和 t (t 足够小) 有

$$C^{-1} \omega_{r, \varphi}(f, t)_M \leq K_{r, \varphi}(f, t^r)_M \leq C \omega_{r, \varphi}(f, t)_M.$$

附记 定理1.1.1至定理1.1.3的证明见[1], 定理1.1.4的证明见[2], 定理1.1.5的证明见[5], 在此省略.